ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 19

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1955

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

19 (1955), 3—10

И. М. ВИНОГРАДОВ

УЛУЧШЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ЧИСЛА ЦЕЛЫХ ТОЧЕК В ОБЛАСТИ ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Дано новое улучшение асимптотической формулы для суммы значений известной функции $h(-t)$. Метод этой работы позволяет значительно улучшить асимптотические формулы и в других вопросах, сводящихся к подсчету числа целых точек в области трех измерений.

Обозначения. При положительном B обозначение $A \ll B$ показывает, что отношение $|A|$ к B не превосходит постоянного числа.

При вещественном α символ $\{\alpha\}$ обозначает дробную часть числа α, а символ (α) — расстояние числа α до ближайшего целого числа.

ε обозначает произвольно малое положительное постоянное число.

В одной из прежних статей ([1]), применяя мой метод 1934 г. и известную лемму ван дер Корпута для остаточного члена асимптотической формулы, выражающей сумму

$$h(-1) + h(-2) + \cdots + h(-N)$$

($h(-t)$ — число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-t$), я указал порядок

$$N^{0,7-\delta+\varepsilon}; \quad \delta = \frac{1}{405}.$$

В этой работе путем усовершенствования рассуждений указанной статьи, но без применения леммы ван дер Корпута, для того же остаточного члена я указываю порядок

$$N^{\frac{11}{16}+\varepsilon}.$$

Аналогичным путем можно понизить порядок остаточного члена и в ряде других случаев. Так, например, для остаточного члена асимптотической формулы, выражающей число целых точек области

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,$$

можно указать порядок

$$a^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

Если же пользоваться также и леммою ван дер Корпута, то для остаточных членов указанных выше асимптотических формул можно получить и еще более низкие порядки:

$$N^{\frac{11}{16}-\sigma}, \quad a^{\frac{11}{8}-2\sigma},$$

где σ — некоторое положительное постоянное число.

Переходя к изложению доказательства, я буду заменять более краткими те рассуждения, которые уже встречались в статье (1). Я буду пользоваться двумя следующими леммами, указанными в статье (1):

ЛЕММА 1. *Пусть H, A, U, q, r — вещественные числа с условиями*

$$H>0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0<r-q \ll U,$$

причем в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H,$$

и весь указанный интервал может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $\varphi(x)$ монотонна. Тогда имеем:

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}\right).$$

ЛЕММА 2. *Пусть H, A, U, q, r — вещественные числа с условиями*

$$H>0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0<r-q \ll U.$$

Пусть, далее, $f(x)$ и $\varphi(x)$ — алгебраические функции, степени которых не превосходят некоторых постоянных, и пусть в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ выполнены условия

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f'''(x) \ll \frac{1}{AU},$$

$$H \ll \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда имеет место формула

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(q)\leqslant k \leqslant f'(r)} Z_k + O(HT + H\ln(U+1)),$$

где, определяя x_k равенством $f'(x_k)=k$, имеем:

$$Z_k = b_k \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{f''(x_k)}} e^{2\pi i(-nx_k+f(x_k))},$$

причем $b_k=1$, если k отлично от $f'(q)$ и от $f'(r)$, и $b_k=0{,}5$, если k равно одному из этих чисел. Наконец, $T \ll \sqrt{A}$ и при нецелых $f'(q)$, $f'(r)$ также

$$T \ll \max\left(\frac{1}{(f'(q))}, \quad \frac{1}{(f'(r))}\right).$$

Как видно из рассуждений упомянутой статьи (1), достаточно рассма-

тривать выражение

$$B=\sum_{m=1}^{\infty} C_m W_m,$$

где

$$W_m=\sum_{x>\sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} W_{m,x}, \quad W_{m,x}=\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{<\sqrt{x^2-n}} e^{2\pi i\frac{n+y^2}{x}},$$

C_m зависит только от m, $C_m \ll Z_m$,

$$\Delta=n^{-\frac{5}{16}}, \qquad Z_m=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{если } m\leqslant\frac{1}{\Delta},\\ \frac{1}{\Delta^2 m^3}, & \text{если } m>\frac{1}{\Delta},\end{cases}$$

и доказать, что $B\ll n^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Применяя лемму 2 (роль переменного x леммы 2 здесь будет играть переменное y), при $m\leqslant\sqrt{n}$ получим:

$$W_{m,x}=\sum_{u\geqslant-\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}}^{\leqslant\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}} \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{x}{m}}\, e^{2\pi i\left(\frac{mn}{x}-\frac{u^2x}{4m}\right)}+O(T+\ln n),$$

где

$$T\ll\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}, \quad T\ll\frac{1}{\left(\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}\right)}.$$

Сумму

$$S=\sum_{x>\sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} T$$

мы можем разбить на $\ll\ln n$ сумм вида

$$S'=\sum_{x>\sqrt{n}+X}^{\leqslant\sqrt{n}+X'} T, \quad 1\leqslant X<\sqrt{\frac{4n}{3}}-\sqrt{n}, \quad X'\leqslant 2X,$$

причем, полагая

$$F(x)=\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x},$$

в интервале $\sqrt{n}+X\leqslant x\leqslant\sqrt{n}+X'$ будем иметь:

$$F'(x)=\frac{2mn}{x^2\sqrt{x^2-n}}, \qquad \frac{m}{2n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}}<F'(x)<\frac{2m}{n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}}.$$

При $X\leqslant 36m$ находим:

$$S'\ll X\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}\ll\sqrt{n}.$$

При $X > 36m$ интервал $\sqrt{n} + X < x \leqslant \sqrt{n} + X'$ можно разбить на

$$\ll \frac{X^{\frac{1}{2}} m}{n^{\frac{1}{4}}} + 1$$

интервалов, в каждом из которых разность между наибольшим и наименьшим значениями $F(x)$ будет $\leqslant 1$. Для части S'' суммы S', отвечающей одному из этих интервалов, имеем:

$$S'' \ll \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}} + \sum_{1 \leqslant s \leqslant m} \frac{n^{\frac{1}{4}} X^{\frac{1}{2}}}{m} \frac{1}{s} \ll \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}} + \frac{n^{\frac{1}{4}} X^{\frac{1}{2}}}{m} \ln n.$$

Поэтому

$$S' \ll \left(\frac{X^{\frac{1}{2}} m}{n^{\frac{1}{4}}} + 1 \right) \left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}} + \frac{n^{\frac{1}{4}} X^{\frac{1}{2}}}{m} \ln n \right) \ll \sqrt{n} \ln n, \quad S \ll \sqrt{n} (\ln n)^2.$$

Замечая, что при $\sqrt{n} < x \leqslant \sqrt{n} + 1$ главный член последнего выражения для $W_{m,x}$ будет $\ll \sqrt{n}$, мы можем из всего доказанного заключить, что при $m \leqslant \sqrt{n}$

$$W_m = \sum_{x > \sqrt{n}}^{< \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sum_{u \geqslant -\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}}^{< \frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}} \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{x}{m}} e^{2\pi i \left(\frac{mn}{x} - \frac{u^2 x}{4m} \right)},$$

откуда, меняя порядок суммирования, легко найдем:

$$W_m = \sum_{u \geqslant -m}^{\leqslant m} W_{m,u} + O(\sqrt{n} (\ln n)^2);$$

$$W_{m,u} = \sum_{x > \frac{2m\sqrt{n}}{\sqrt{4m^2 - u^2}}}^{< \sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{x}{m}} e^{2\pi i \left(\frac{mn}{x} - \frac{u^2 x}{4m} \right)}.$$

Применяя к $W_{m,u}$ лемму 2, получим:

$$W_{m,u} = \sum_{v > \frac{u^2 + 3m^2}{4m}} \frac{2im\sqrt{n}}{4mv - u^2} e^{2\pi i \sqrt{n(4mv - u^2)}} + O\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}} \ln n \right).$$

Вместе с тем найдем:

$$W_m = \sum_{u \geqslant -m}^{\leqslant m} \sum_{v > \frac{u^2 + 3m^2}{4m}}^{\leqslant m} \frac{2im\sqrt{n}}{4mv - u^2} e^{2\pi i \sqrt{n(4mv - u^2)}} + O(\sqrt{n} (\ln n)^2).$$

Отсюда, в частности, следует, что при $m \leqslant \sqrt{n}$

$$W_m \ll m\sqrt{n} + \sqrt{n} (\ln n)^2.$$

Кроме того, при $m > \sqrt{n}$ имеем тривиальную оценку

$$W_m \ll n.$$

Переходим к оценке B. Находим:

$$\sum_{m>0}^{\ll n^{\frac{3}{16}}} \frac{m\sqrt{n}}{m} \ll n^{\frac{11}{16}}, \qquad \sum_{m>n^{\frac{7}{16}}}^{\leqslant n^{\frac{1}{2}}} \frac{m\sqrt{n}}{\Delta^2 m^3} \ll n^{\frac{11}{16}},$$

$$\sum_{m>n^{\frac{1}{2}}} \frac{n}{\Delta^2 m^3} \ll n^{\frac{11}{16}}, \qquad \sum_{m=1}^{n^{\frac{1}{2}}} Z_m \sqrt{n} (\ln n)^2 \ll n^{\frac{11}{16}}.$$

Следовательно,

$$B = B_0 + O(n^{\frac{11}{16}}),$$

$$B_0 = \sum_{m>n^{\frac{3}{16}}}^{\leqslant n^{\frac{7}{16}}} C_m \sum_{u\geqslant -m}^{\leqslant m} \sum_{v>\frac{u^2+3m^2}{4m}}^{\leqslant m} \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2} e^{2\pi i \sqrt{n(4mv-u^2)}}.$$

Сумму B_0 можно разбить на $\ll \ln n$ сумм U_M вида

$$U_M = \sum_{m>M_0}^{\leqslant M} C_m \sum_u \sum_v \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2} e^{2\pi i \sqrt{n(4mv-u^2)}},$$

где M_0 и M — целые числа с условиями

$$n^{\frac{3}{16}} \leqslant M_0 < M \leqslant n^{\frac{7}{16}}, \quad M \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} M_0,$$

причем неравенства, ограничивающие область суммирования по u и по v, удобнее заменить такими:

$$m^2 - u^2 \geqslant 0, \quad m - v \geqslant 0, \quad 4mv - u^2 - 3m^2 \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$U_M = \frac{i\sqrt{n}}{6M^8} \sum_{m>\sqrt{\frac{2}{3}}M}^{\leqslant M} \sum_{u\geqslant -M}^{\leqslant M} \sum_{v>\sqrt{\frac{3}{8}}M}^{\leqslant M} \sum_{s_1=0}^{M^2} \sum_{s_2=0}^{M} \sum_{s_3=0}^{M^2} \sum_{k_1=1}^{2M^2} \sum_{k_2=1}^{2M^2} \sum_{k_3=1}^{3M^2} R,$$

$$R = C_m \frac{m}{4mv-u^2} e^{2\pi i \sqrt{n(4mv-u^2)} + 2\pi i \left(\frac{m^2-u^2-s_1}{2M^2} k_1 + \frac{m-v-s_2}{2M} k_2 + \frac{4mv-u^2-3m^2-s_3}{3M^2} k_3 \right)}.$$

Полагая при данных k_1, k_2, k_3

$$T_{k_1,k_2,k_3} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} e^{-2\pi i \left(\frac{s_1 k_1}{2M^2} + \frac{s_2 k_2}{2M} + \frac{s_3 k_3}{3M^2} \right)},$$

очевидно, будем иметь:

$$T_{k_1,k_2,k_3} \ll T'_{k_1,k_2,k_3},$$

$$T'_{k_1,k_2,k_3} = \min\left(M^2, \frac{1}{\left(\frac{k_1}{2M^2}\right)}\right) \min\left(M, \frac{1}{\left(\frac{k_2}{2M}\right)}\right) \min\left(M^2, \frac{1}{\left(\frac{k_3}{3M^2}\right)}\right),$$

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} T'_{k_1,k_2,k_3} \ll M^5 (\ln n)^3.$$

Для части U_{M,k_1,k_2,k_3} суммы U_M, отвечающей данным k_1, k_2, k_3, будем иметь:

$$U_{M,k_1,k_2,k_3} \ll M^{-4}\sqrt{n}\, Z_M T'_{k_1,k_2,k_3} \sum_m \sum_v \left| \sum_u \frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1u^2}{2M^2} - \frac{k_2u^2}{3M^2} + \sqrt{n(mv-u^2)}\right)}}{4mv-u^2} \right|.$$

Замечая, что $z = 4mv$ может пробегать лишь значения с условием

$$2M^2 < z \leqslant 4M^2,$$

причем число решений неопределенного уравнения $4mv = z$ при данном z будет $\ll n^{\varepsilon'}$, отсюда найдем:

$$U_{M,k_1,k_2,k_3} \ll M^{-4} Z_M n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} T'_{k_1,k_2,k_3}\Omega,$$

$$\Omega = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \left| \sum_{u>-M}^{\leqslant M} \frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1u^2}{2M^2} - \frac{k_2u^2}{3M^2} + \sqrt{w(z-u^2)}\right)}}{z-u^2} \right|.$$

Предварительно оценим сумму

$$K_{u_1,u} = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \frac{e^{2\pi i\sqrt{n}\left(\sqrt{z-u_1^2} - \sqrt{z-u^2}\right)}}{\left(z-u_1^2\right)\left(z-u^2\right)}$$

при целых u_1 и u и при условиях $-M \leqslant u_1 \leqslant M$, $-M \leqslant u \leqslant M$, причем, полагая $t = u^2 - u_1^2$, ограничимся лишь случаем $t \geqslant 0$ (к этому случаю тривиально сводится и случай $t < 0$). При $t = 0$ имеем

$$K_{u_1,u} \ll M^{-2}.$$

При $t > 0$ применим лемму 1. Здесь имеем:

$$f''(z) = \frac{\sqrt{n}}{4}\left(\left(z-u_1^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(z-u^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$H = M^{-4}, \quad U = M^2, \quad A = \frac{M^5}{\sqrt{n}\,t}.$$

Условия леммы 1 выполнены, и мы находим:

$$K_{u_1,u} \ll M^{-4}\left(\frac{M^2 n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{5}{2}}} + \frac{M^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{9}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}}.$$

Положим

$$h = \left[M^{\frac{4}{3}} n^{-\frac{1}{6}}\right].$$

Сначала оценим часть

$$\Omega_0 = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \left| \sum_{u\geqslant -h}^{\leqslant h} \frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1u^2}{2M^2} - \frac{k_2u^2}{3M^2} + \sqrt{n(z-u^2)}\right)}}{z-u^2} \right|$$

суммы Ω. Имеем:

$$\Omega_0^2 \ll M^2 Q_0, \quad Q_0 = \sum_{u_1\geqslant -h}^{\leqslant h} \sum_{u\geqslant -h}^{\leqslant h} K_{u_1,u},$$

откуда, замечая, что при данном t число решений $u^2 - u_1^2 = t$ будет

$\ll h$, если $t=0$, и $\ll n^{\varepsilon'}$, если $t>0$, получим:

$$Q_0 \ll hM^{-2} + n^{\varepsilon'}\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}h^3}{M^{\frac{9}{2}}} + \frac{h}{n^{\frac{1}{4}}M^{\frac{3}{2}}}\right), \quad \Omega_0 \ll n^{\frac{\varepsilon'}{2}}\left(h^{\frac{1}{2}} + \frac{n^{\frac{1}{8}}h^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{5}{4}}} + \frac{h^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{8}}}\right).$$

В оставшейся после выделения Ω_0 части Ω' суммы Ω слагаемые с $u=u'$ и $u=-u'$ равны. Поэтому

$$\Omega' = 2\sum_{z>2M^2}^{<4M^2}\left|\sum_{u>h}^{<M}\frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1u^2}{2M^2}-\frac{k_3u^3}{3M^2}+\sqrt{n(z-u^2)}\right)}}{z-u^2}\right|.$$

Подразделяя интервал $h<u\leqslant M$ на интервалы

$$h<u\leqslant 2h,\ 2h<u\leqslant 4h, \ldots, \left[\frac{M}{h}\right]h<u\leqslant M,$$

мы представим сумму Ω' в виде

$$\Omega' = 2\sum_{l=1}^{\left[\frac{M}{h}\right]}\Omega_{lh}, \quad \Omega_{lh} = \sum_{z>2M^2}^{<4M^2}\left|\sum_{u>lh}^{lh+h'}\frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1u^2}{2M^2}-\frac{k_3u^3}{3M^2}+\sqrt{n(z-u^2)}\right)}}{z-u^2}\right|,$$

где $h'\leqslant h$. Далее, находим:

$$\Omega_{lh}^2 \ll M^2Q_{lh}, \quad Q_{lh} = \sum_{u_1>lh}^{\leqslant lh+h'}\sum_{u>lh}^{\leqslant lh+h'}K_{u_1,u}.$$

При $t=0$ число решений $u^2-u_1^2=t$ будет $\ll h$. При данном $\xi>0$ число решений $u-u_1=\xi$ будет $\ll h$, причем соответствующее этому ξ значение

$$t=(u_1+\xi)^2-u_1^2=\xi(2u_1+\xi)$$

удовлетворяет условию

$$2lh\xi<t\leqslant 2(l+3)h\xi.$$

Следовательно, часть Q_{lh}, отвечающая данному $\xi>0$, будет

$$\ll \frac{n^{\frac{1}{4}}l^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{9}{2}}} + \frac{h^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}l^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}M^{\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому

$$Q_{lh} \ll hM^{-2} + \frac{n^{\frac{1}{4}}l^{\frac{1}{2}}h^3}{M^{\frac{9}{2}}} + \frac{h}{n^{\frac{1}{4}}l^{\frac{1}{2}}M^{\frac{3}{2}}},$$

откуда уже легко найдем:

$$\Omega_{lh} \ll h^{\frac{1}{2}} + \frac{n^{\frac{1}{8}}l^{\frac{1}{4}}h^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{5}{4}}} + \frac{h^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{4}}}{h^{\frac{1}{2}}l^{\frac{1}{4}}},$$

$$\Omega \ll Mh^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}}h^{\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{8}}Mh^{-\frac{1}{4}},$$

$$U_M \ll MZ_Mn^{\frac{1}{2}+\varepsilon''}\left(Mh^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}}h^{\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{8}}Mh^{-\frac{1}{4}}\right) \ll$$

$$\ll MZ_Mn^{\frac{1}{2}+\varepsilon''}\left(M^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{12}} + M^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{12}}\right) \ll Z_MM^{\frac{4}{3}}n^{\frac{7}{12}+\varepsilon''}.$$

Отсюда при $M \leqslant \frac{1}{\Delta}$ выводим:

$$U_M \ll M^{\frac{1}{3}} n^{\frac{7}{12}+\varepsilon''} \ll \Delta^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{7}{12}+\varepsilon''} = n^{\frac{11}{16}+\varepsilon''},$$

а при $M > \frac{1}{\Delta}$ выводим:

$$U_M \ll \frac{1}{\Delta^2 M^{\frac{5}{3}}} n^{\frac{7}{12}+\varepsilon''} \ll \Delta^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{7}{12}+\varepsilon''} = n^{\frac{11}{16}+\varepsilon''}.$$

Следовательно, $B \ll n^{\frac{11}{16}+\varepsilon''}$.

Таким образом верно утверждение, указанное в начале работы, т. е.

$$h(-1) + h(-2) + \cdots + h(-N) = \frac{4\pi}{21 \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3}} N^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi^2} N + O\left(n^{\frac{11}{16}+\varepsilon}\right)$$

Поступило
25.X.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Виноградов И. М.**, Улучшение остаточного члена одной асимптотической формулы, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 97—110.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 11—16

А. Г. ПОСТНИКОВ

О СУММЕ ХАРАКТЕРОВ ПО МОДУЛЮ, РАВНОМУ СТЕПЕНИ ПРОСТОГО ЧИСЛА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается применение оценок тригонометрических сумм с многочленом к оценке сумм значений характеров по модулю p^n. Сведение одной задачи к другой (лемма 2) основано на p-адическом анализе. Полученная оценка позволяет отодвинуть нули специальных L-рядов.

В работе производится оценка суммы характеров по модулю, равному степени простого числа, аналогичная известным оценкам тригонометрических сумм с логарифмом, используемых в теории ζ-функции и L-рядов (теорема 1). В лемме 1 дается анализ классического логарифмического ряда

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (|x|<1)$$

для индекса.

ЛЕММА 1. *Пусть p — простое $\neq 2$, n — натуральное, $n \neq \alpha p^f - \nu$, $f=1, 2, \ldots$, $0 \leqslant \nu \leqslant f-1$, $(\alpha, p)=1$. Существует многочлен с целыми коэффициентами $f(u) = u + a_2u^2 + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$ степени $n-1$ такой, что для любого первообразного корня g по модулю p^n при любом целом u справедливо сравнение*

$$\frac{\operatorname{ind}_g(1+pu)}{p-1} \equiv \Lambda f(u) \pmod{p^{n-1}}.$$

Пусть $k = p^\tau k'$, где $(k' p)=1$; тогда

$$a_k = (-1)^{k+1} p^{k-\tau-1} \varkappa_k$$

(очевидно, a_k можно брать с точностью до кратных p^{n-1}), где $\varkappa_k$ есть решение сравнения

$$k'\varkappa_k \equiv 1 \pmod{p^{n-k+\tau}},$$

а Λ — корень сравнения

$$\frac{\operatorname{ind}_g(1+p)}{p-1} \equiv \Lambda f(1) \pmod{p^{n-1}},$$

причем сравнение разрешимо и $(\Lambda, p)=1$.

Доказательство. Известно [см. ([1]), стр. 87], что в мультипликативной группе приведенной системы вычетов по модулю p^n классы,

сравнимые с 1 по модулю p, образуют циклическую подгруппу $\mathfrak{p}_{\mu}^{*}$ порядка p^{n-1}, порожденную, например, $1+p$. Очевидно, что все $\operatorname{ind}_g(1+pu)$ делятся на $p-1$ и что $\frac{\operatorname{ind}_g(1+p)}{p-1}$ взаимно просто с p.

Рассмотрим поле рациональных p-адических чисел R_p. При любом целом p-адическом числе u сходится ряд:

$$pu-\frac{(pu)^2}{2}+\frac{(pu)^3}{3}-\cdots=\log(1+pu).$$

Кроме того,

$$\log\big((1+pu_1)(1+pu_2)\big)=\log(1+pu_1)+\log(1+pu_2)$$

[см., например, (2), стр. 195 и 197]. Поэтому если ввести многочлен

$$F_n^*(1+pu)=pu-\frac{(pu)^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{(pu)^{n-1}}{n-1},$$

то получим

$$F_n^*\big((1+pu_1)(1+pu_2)\big)\equiv F_n^*(1+pu_1)+F_n^*(1+pu_2) \pmod{p^n}.$$

Для многочлена

$$\overline{F}_n(1+pu)=\frac{F_n^*(1+pu)}{p}=u-\frac{pu^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{p^{n-2}u^{n-1}}{n-1}$$

будет выполняться сравнение:

$$\overline{F}_n\big((1+pu_1)(1+pu_2)\big)\equiv\overline{F}_n(1+pu_1)+\overline{F}_n(1+pu_2) \pmod{p^{n-1}}.$$

Каждый коэффициент $F_n(1+pu)$ можно заменить по модулю p^{n-1} целым рациональным числом. Положим

$$a_k=(-1)^{k+1}p^{k-1-\tau}\varkappa_k;$$

тогда, в силу $\varkappa_k\equiv\frac{1}{k'} \pmod{p^{n-k+\tau}}$,

$$(-1)^{k+1}p^{k-1-\tau}\varkappa_k\equiv(-1)^{k+1}p^{k-1-\tau}\frac{1}{k'} \pmod{p^{n-1}},$$

т. е.

$$a_k\equiv(-1)^{k+1}\frac{p^{k-1}}{k} \pmod{p^{n-1}}.$$

Очевидно, $a_1=1$.

Обозначим

$$f(u)=F_n(1+pu)=u+a_2u^2+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}.$$

Если $p\neq 2$, то коэффициенты $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ наверное делятся на p $(k-1-\tau\geqslant 1)$. Поэтому

$$F_n(1+p)\equiv 1 \pmod{p}$$

и, следовательно,

$$F_n(1+p)\not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда вытекает, что сравнение

$$\frac{\operatorname{ind}_g(1+p)}{p-1}\equiv\Lambda F_n(1+p) \pmod{p^{n-1}}$$

разрешимо. Корень этого сравнения обозначим тоже буквой Λ. Так как

$$F_n(1+p)\not\equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{ind}_g(1+p)}{p-1}\not\equiv 0 \pmod p,$$

то $(\Lambda, p)=1$. При $s=0,\ldots, p^{n-1}$ имеем:

$$s\,\frac{\operatorname{ind}_g(1+p)}{p-1}\equiv \Lambda s F_n(1+p) \pmod{p^{n-1}}$$

или, в силу мультипликативных свойств обеих частей,

$$\frac{\operatorname{ind}_g((1+p)^s)}{p-1}\equiv \Lambda F_n((1+p)^s) \pmod{p^{n-1}}.$$

Но $(1+p)^s$ пробегает всю подгруппу $\mathfrak{p}''_\mu$. Поэтому при любом u

$$\frac{\operatorname{ind}_g(1+pu)}{p-1}\equiv \Lambda f(u) \pmod{p^{n-1}},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Пусть* $1\leqslant a\leqslant p-1$, a' — *корень сравнения* $a'a\equiv 1 \pmod{p^n}$. *Тогда при ограничениях, принятых в лемме* 1, *при любом целом* u

$$\operatorname{ind}_g(a+pu)\equiv \operatorname{ind}_g a+\Lambda(p-1)f(a'u) \pmod{p^{n-1}(p-1)}.$$

Действительно,

$$\operatorname{ind}_g(a+pu)\equiv \operatorname{ind}_g a+\operatorname{ind}_g(1+pa'u) \pmod{p^{n-1}(p-1)}.$$

Применив лемму 1 и умножив обе части сравнения леммы 1 на $p-1$, получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\chi(k)$ — *характер по модулю* p^n *степени, не меньшей* p^{n-1}, *и пусть* $n\neq \alpha p^f-\nu$, $f=1, 2, \ldots, 0\leqslant\nu\leqslant f-1$, $(\alpha, p)=1$. *Тогда*

$$\Big|\sum_{k=1}^{l}\chi(k)\Big|\leqslant[8(n-2)]^{0,5(n-2)\ln\frac{12(n-2)(n-1)}{\tau}}\, p^{\frac{1}{3\frac{1}{\tau}(n-1)^2\ln\frac{12}{\tau}(n-2)(n-1)}}\cdot$$

$$\cdot\, l^{1-\frac{1}{3\frac{1}{\tau}(n-2)^2\ln\frac{12}{\tau}(n-2)(n-1)}},$$

где τ *определяется из условий:*

$$\tau=1, \quad \textit{если} \quad p^{1+\frac{1}{n-2}}\leqslant l\leqslant p^2,$$

$$p=\left(\frac{l}{p}\right)^{\tau}, \quad \textit{если} \quad p^2\leqslant l.$$

Доказательство. Как известно,

$$\chi(k)=e^{2\pi i m\frac{\operatorname{ind}_g k}{(p-1)p^{n-1}}},$$

где g — некоторый первообразный корень и $(m, p)=1$.

Далее,

$$\Big|\sum_{k=1}^{l}\chi(k)\Big|\leqslant\sum_{a=1}^{p}\Big|\sum_{u=0}^{l_p}\chi(a+up)\Big|=\sum_{a=1}^{p}\Big|\sum_{u=0}^{l_p}e^{2\pi i\Lambda\frac{f(a'u)}{p^{n-1}}m}\Big|,$$

где $\frac{l}{p} \leqslant l_p < \frac{l}{p} + 1$. Старший член полинома $\Lambda \frac{f(a'u)}{p^{n-1}} m$, в силу $(\Lambda, p) = 1$, $(a', p) = 1$, $(m, p) = 1$, $(\varkappa_{n-1}, p) = 1$, имеет вид $\frac{r}{p} u^{n-1}$, где $(r, p) = 1$ (r зависит, конечно, от a, но это не имеет значения). Применяя к каждой внутренней сумме оценку И. М. Виноградова [см. ([3]), стр. 289] и согласовывая обозначения, получим:

$$\left|\sum_{k=1}^{l} \chi(k)\right| \leqslant p\,[8(n-2)]^{0,5(n-2)\ln\frac{12(n-2)(n-1)}{\tau}} \left(\frac{l}{p}\right)^{1-\frac{\tau}{3(n-2)^2\ln\frac{12}{\tau}(n-2)(n-1)}}.\text{*}$$

Это как раз мы и доказываем.

Замечание 1. Ограничение $n \neq \alpha p^j - \nu$ несущественно. Если оно не выполняется, то многочлен будет не степени $n-1$, а степени $n+\nu$ (причем членов со степенями $n, n+1, \ldots, n+\nu-1$ не будет). Мы применяем в этом случае оценку И. М. Виноградова снова по коэффициенту при u^{n-1}:

$$\left|\sum_{k=1}^{l} \chi(k)\right| \leqslant [8(n+\nu-1)]^{0,5(n+\nu-1)\ln\frac{12(n+\nu-1)(n+\nu)}{\tau}} p^{\frac{1}{3\frac{1}{\tau}(n+\nu-1)^2\ln\frac{12}{\tau}(n+\nu-1)(n+\nu)}} \cdot$$

$$\cdot\, l^{1-\frac{1}{3\frac{1}{\tau}(n+\nu-1)^2\ln\frac{12}{\tau}(n+\nu-1)(n+\nu)}}$$

(условия на τ — прежние). Поскольку $\nu < n$, то всегда справедлива оценка:

$$\left|\sum_{k=1}^{l} \chi(k)\right| \leqslant e^{c_0 n(\ln n)^2} p^{\frac{c_1}{\frac{1}{\tau}n^2\ln n}} l^{1-\frac{c_1}{\frac{1}{\tau}n^2\ln n}}.$$

Замечание 2. Так как самое малое значение для τ при $l \geqslant p^{1+\frac{1}{n-2}}$ равно $\frac{1}{n-1}$ и так как коэффициент многочлена, по которому ведется оценка, не меняет своего характера при сдвиге аргумента, то имеем оценку:

$$\left|\sum_{k=N}^{N+l} \chi(k)\right| \leqslant e^{c_1 n(\ln n)^2} p^{\frac{c_1}{n^3\ln n}} l^{1-\frac{c_1}{n^3\ln n}}.$$

Эту оценку можно приложить к выводу нижеследующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $D = p^n$, *где* $n = [(\ln D)^{\frac{1}{10}}]$ *и, значит,* $p = e^{\lambda(\ln D)^{\frac{9}{10}}}$, $1 \leqslant \lambda < 2$, $L(s, \chi)$ — *L-ряд по модулю* p^n *с характером степени, не меньшей* p^{n-1}, C *и* A_1 — *величины, не зависящие от* D. $L(s, \chi)$ *не имеет нулей в области* $|t| \leqslant C$, $\sigma > 1 - \frac{A_1}{(\ln D)^{\frac{9}{10}} \ln\ln D}$.

Доказательство. Обозначим $D_1 = p^A$, где A — достаточно боль-

---

* В работе ([3]) есть опечатка: нужно не ε, а τ.

шая постоянная и $\gamma = \frac{1}{(\ln D)^{\frac{9}{10}}}$. Очевидно,

$$L(s,\chi) = \sum_{k \leqslant 2D_1 - 1} \frac{\chi(k)}{k^s} + s \int_{2D_1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{D_1 \leqslant k \leqslant u} \chi(k)}{u^{s+1}} du - \frac{\sum\limits_{D_1 \leqslant k \leqslant 2D_1 - 1} \chi(k)}{(2D_1)^s}.$$

Пусть $2 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \gamma$, $|t| \leqslant 2C + 1$. Находим:

$$|L(s,\chi)| \leqslant \sum_{k \leqslant 2D_1 - 1} \frac{1}{k^{1-\gamma}} + |s| \int_{2D_1}^{\infty} \frac{e^{c_0 n (\ln n)^2} p^{\frac{c_1}{n^3 \ln n}} u^{1 - \frac{c_1}{n^3 \ln n}}}{u^{2-\gamma}} du +$$

$$+ \frac{\left|\sum\limits_{D_1 \leqslant k \leqslant 2D_1 - 1} \chi(k)\right|}{(2D_1)^{\sigma}} \leqslant \frac{D_1^{\gamma}}{\gamma} + e^{c_0 n (\ln n)^2} e^{\ln p \frac{c_1}{n^3 \ln n}} \int_{2D_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1-\gamma+\frac{c_1}{n^3 \ln n}}} +$$

$$+ \frac{e^{c_0 n (\ln n)^2} p^{\frac{c_1}{n^3 \ln n}} D_1^{1 - \frac{c_1}{n^3 \ln n}}}{D_1^{1-\gamma}}.$$

В силу наложенных на n ограничений

$$1 - \gamma + \frac{c_1}{n^3 \ln n} > 1 + \frac{c_1}{2n^3 \ln n},$$

имеем:

$$|L(s,\chi)| \leqslant \frac{D_1^{\gamma}}{\gamma} + e^{c_0 n (\ln n)^2} e^{\ln p \frac{c_1}{n^3 \ln n}} D_1^{-\frac{c_1}{2n^3 \ln n}} n^3 \ln n.$$

Выражая D_1, p, n, γ через D, получим (при достаточно большом A):

$$|L(s, \chi)| \leqslant (\ln D)^{\frac{9}{10}}.$$

Общей теореме [см. (4), стр. 62], устанавливающей отсутствие нулей $\zeta(s)$ по оценке ее модуля, обычным образом соответствует аналогичный факт для функции $L(s, \chi)$.

Положив

$$\varphi(D) = \frac{95}{100} \ln \ln D \text{ и } \theta(D) = \frac{1}{(\ln D)^{\frac{9}{10}}},$$

получим утверждение теоремы 2.

В теореме 2 можно брать другие параметры и более тщательно производить оценки.

Я благодарен Ю. В. Линнику за помощь и внимание, оказанные им мне при написании настоящей работы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
3.XI.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хассе Г., Лекции по теории чисел, М., ИЛ, 1953.
[2] Hasse H., Zahlentheorie, Berlin, 1949.
[3] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952.
[4] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ, 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 17—32

Т. И. АМАНОВ

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССОВ $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе строятся примеры граничных функций классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$ и доказывается, что теорема С. М. Никольского, обобщающая теорему С. Л. Соболева о вложении этих классов, является точной, не допускающей улучшения.

1. Классы функций многих переменных $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$ ($r_i > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) подробно изучались С. М. Никольским ([1]), ([2]). Они представляют собой обобщения соответствующих классов, рассмотренных в работах С. Н. Бернштейна ([3]), ([4]), А. Зигмунда ([5]) и Н. И. Ахиезера ([6]). Эти классы определяются следующим образом. Условимся впредь понимать производную в следующем обобщенном смысле. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на n-мерном вещественном евклидовом пространстве R_n, имеет на оси x_k при заданных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ несмешанную частную производную $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ порядка s, если после возможного видоизменения ее на множестве n-мерной меры нуль она имеет производную $\frac{\partial^{s-1} f}{\partial x_k^{s-1}}$, абсолютно непрерывную по x_k на любом конечном отрезке этой оси. Таким образом, $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ существует почти всюду на оси x_k и $\frac{\partial^{s-1} f}{\partial x_k^{s-1}}$ является ее неопределенным интегралом (при $s = 1$ функция f абсолютно непрерывна по x_k). Так определенная производная $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ в точности совпадает с обобщенной несмешанной производной $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ в смысле С. Л. Соболева ([7]). Введем в рассмотрение следующие разности:

$$\Delta_{x_k}(\Phi;\ h) = \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_k + h,\ x_{k+1}, \ldots, x_n) - \\ - \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$\Delta_{x_k}^{(2)}(\Phi;\ h) = \Delta_{x_k}(\Phi;\ h) - \Delta_{x_k}(\Phi;\ -h).$$

Пусть $M_i > 0$, $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i > 0$, где $\bar{r}_i$ — целое, $0 < \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Будем говорить, что функция f переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит

к классу $H_{px_i}^{(r_i)}(M_i)$, если

а) $\| f \|_p^{(n)} < \infty$;

б) она (после возможного видоизменения на множестве n-мерной меры нуль) имеет почти для всех $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ несмешанную частную производную $f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}$ порядка $\bar{r}_i$ с $\| f_{x_i}^{(\bar{r}_i)} \|_p^{(n)} < \infty$, удовлетворяющую для любых h условию:

$$\| \Delta_{x_i} (f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}; h) \|_p^{(n)} \leqslant M_i |h|^{\alpha_i} \quad \text{при} \quad \alpha_i < 1$$

и

$$\| \Delta_{x_i}^{(2)} (f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}; h) \|_p^{(n)} \leqslant M_i |h| \quad \text{при} \quad \alpha_i = 1,$$

где

$$\| \Phi \|_p^{(n)} \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^p \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| \Phi \|_\infty^{(n)} \equiv \underset{(x_1, \ldots, x_n)}{\text{vrai} \ \max} | \Phi(x_1, \ldots, x_n) |.$$

Далее, будем говорить, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу

$$H_{px_1 \ldots x_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n) = H_{px_1 \ldots x_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} = H_p^{(r_1, \ldots, r_n)},$$

если она одновременно принадлежит ко всем классам $H_{px_i}^{(r_i)}(M_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Аналогично определяются классы $H_{px_1 \ldots x_n}^{*(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ периодических, периода 2π по каждой из переменных x_k, функций $F(x_1, \ldots, x_n)$; в этом случае норма функции F определяется равенством

$$\| F \|_p^{*(n)} \equiv \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |F|^p \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| F \|_\infty^{*(n)} \equiv \underset{x_k \in (0, 2\pi)}{\text{vrai} \max} | (x_1, \ldots, x_n) |.$$

В дальнейшем всюду предполагается, что выполнены следующие условия:

1) n и m — целые числа, удовлетворяющие условию $1 \leqslant m \leqslant n$.

2) $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$,

3) p, q и p', q' — положительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Введем еще следующие обозначения:

а) $L_p^{(n)}$ — пространство функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\| f \|_p^{(n)} < \infty$.

б) $L_p^{*(n)}$ — пространство периодических, периода 2π по каждой из переменных x_k, функций $F(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\| F \|_p^{*(n)} < \infty$.

в) χ_m и $\rho_j^{(m)}$ определяются при помощи равенств (1) и (2) (см. ниже).

2. В настоящей работе рассматриваются граничные функции классов $H_{px_1 \ldots x_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ и $H_{px_1 \ldots x_n}^{*(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$.

Граничной функцией класса $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}(M_1,\ldots,M_n)$ мы называем всякую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, принадлежащую к этому классу, но ни при каких константах M_i не принадлежащую к классу $H^{(r'_1,\ldots,r'_n)}_{px_1\ldots x_n}$, где

$$\sum_{k=1}^{n}(r'_k-r_k)>0,\quad r'_k-r_k\geqslant 0.$$

Граничная функция класса $H^{*(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}(M_1,\ldots,M_n)$ определяется совершенно аналогично.

Отдельные примеры граничных функций были известны и ранее. Например, известная непрерывная, нигде не дифференцируемая функция Вейерштрасса является граничной в классе $H^{*(1)}_{\infty}$ [см. (5)]. Граничные функции привлекли наше внимание в связи с решением следующей задачи: возможно или невозможно улучшить теорему вложения С. М. Никольского (2) (являющуюся обобщением соответствующих теорем С. Л. Соболева), которая утверждает:

I. *Пусть*

$$\left.\begin{aligned} &1\leqslant p\leqslant p'\leqslant\infty,\quad r_i>0\quad (i=1,\ldots,n),\quad 1\leqslant m\leqslant n,\\ &\chi_m=1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)\sum_{1}^{m}\frac{1}{r_i}-\frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_i}>0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

и $f\in H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$. *Тогда функция* f *(после возможного видоизменения ее на множестве n-мерной меры нуль), рассматриваемая как функция переменных* $(x_1,\ldots,x_m)$ *при любых фиксированных* $(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n)$, *будет принадлежать к классу* $H^{(\rho_1^{(m)},\ldots,\rho_m^{(m)})}_{p'x_1,\ldots,x_m}$, *где*

$$\rho_j^{(m)}=r_j\chi_m\quad (j=1,\ldots,m),\tag{2}$$

и для нее выполняется равенство

$$\sum_{m+1}^{n}\lim_{|x_k-x_k^0|\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)-\right.$$
$$\left.-f(x_1,\ldots,x_m,x^0_{m+1},\ldots,x^0_n)|^{p'}dx_1\ldots dx_m\right)^{\frac{1}{p'}}=0\tag{3}$$

при любых $(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n)$.

II. *Если выполнено неравенство*

$$1-\frac{1}{p}\sum_{1}^{n}\frac{1}{r_i}>0,\quad p>1,\tag{4}$$

то для любых p' *и* m, *удовлетворяющих условиям первой части теоремы, можно указать функцию* $f\in H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$, *являющуюся граничной в классе* $f\in H^{(\rho_1^{(m)},\ldots,\rho_n^{(m)})}_{p'x_1\ldots x_m}$

Эта теорема полностью справедлива также для классов $H^{*(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$.

С. М. Никольский (²) построил пример граничной функции класса $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$ $(p>1)$, накладывая на $p, r_1, \ldots, r_n$ ограничения, выраженные неравенствами (4). Нам удалось показать, что это ограничение излишне. Отсюда следует, что теорема вложения С. М. Никольского не может быть улучшена в смысле увеличения чисел $\rho_j^{(m)}$ для любых p, p', r_i, n, m, удовлетворяющих только одному условию (1).

Мы здесь доказываем следующие теоремы [см. (¹⁰)].

ТЕОРЕМА 1. *Функция*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}}, \tag{5}$$

где сходимость ряда понимается в смысле $L_p^{(n)}$ и

$$F_N(x) = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}Nx}{x}\right), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

является граничной в классе $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$, если только $a>0$ достаточно велико.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty, \quad \chi_m > 0. \tag{6}$$

Тогда функция (5), *принадлежащая, по теореме* 1, *к классу $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$ и, по теореме вложения,— к классу $H^{(\rho_1^{(m)},\ldots,\rho_m^{(m)})}_{p'x_1\ldots x_m}$, при $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$ является граничной в классе $H^{(\rho_1^{(m)},\ldots,\rho_m^{(m)})}_{p'x_1\ldots x_m}$, если только $a>0$ достаточно велико.*

Чтобы получить соответствующие теоремы в периодическом случае, достаточно только заменить $F_{N_j}(x)$ при $N_j = a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}$ на

$$F^*_{N_j}(x) = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}[N_j]\,x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2,$$

где $[N_j]$ — целая часть N_j.

Отметим, что при $1<p\leqslant\infty$ граничная функция имеет более простой вид как в непериодическом, так и в периодическом случае, а именно: в примере (5) ядро $F_{N_j}(x)$ при $N_j = a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}$ соответственно [см. работу (²)] заменяется ядрами вида:

$$D_{N_j}(x) = \frac{\sin N_j x}{x} \quad \text{и} \quad D^*_{N_j}(x) = \frac{\sin\left([N_j]+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

3. Для дальнейшего нам потребуются некоторые сведения из теории приближения целыми функциями конечной степени. Следуя С. Н. Берн-

штейну, целую функцию $g_{\nu_1\dots\nu_n}(z_1, \dots, z_n)$ от n комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k\,(k = 1, \dots, n)$ экспоненциального типа порядка ν_k относительно z_k мы будем называть *целой функцией степени ν_k соответственно по z_k*.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие целые функции $g_{\nu_1\dots\nu_n}(z_1, \dots, z_n)$ конечной степени, которые для вещественных $z_k = x_k$ принадлежат к $L_p^{(n)}$ (т. е. $\| g_{\nu_1\dots\nu_n}(x_1, \dots, x_n)\|_p^{(n)} < \infty$).

Обобщенное неравенство С. Н. Бернштейна. Если функция $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}$ почти для всех точек $(x_2, \dots, x_n)$ есть по x_1 целая степени ν, то частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ принадлежит к $L_p^{(n)}$ и удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|_p^{(n)} \leqslant \nu \|\varphi\|_p^{(n)}. \tag{7}$$

Неравенство (7) представляет собой обобщение известного неравенства С. Н. Бернштейна [см. ([8]), ([9])]. Мы будем называть его обобщенным неравенством С. Н. Бернштейна. В таком обобщенном виде оно получено С. М. Никольским [см. ([1]), ([2])].

Необходимое и достаточное условие того, что функция принадлежит к $H_{px_1}^{(r_1)}$ дается следующей теоремой [см. ([1])], представляющей собой обобщение соответствующего результата С. Н. Бернштейна ([9]):

Для того чтобы $f(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}$ принадлежала к $H_{px_1}^{(r_1)}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность целых функций $g_{\nu_1}(x_1, \dots, x_n)$ степени ν_1 по x_1 для почти всех $(x_2, \dots, x_n)$ таких, что

$$\|f - g_{\nu_1}\|_p^{(n)} < \frac{c}{\nu_1^{r_1}} \tag{8}$$

для всех $\nu_1 \geqslant 1$ или для всех ν_1, пробегающих возрастающую геометрическую прогрессию $\nu_1 = a^k\,(a > 1,\ k = 0, 1, \dots$, константа $c > 0$ не зависит от $\nu_1)$.

4. Доказательство теоремы 2. С точностью до постоянного множителя

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} F_{a^{\frac{r_1\dots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\dots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum_1^n \frac{1}{r_i} - 2\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}}.$$

Отсюда, полагая

$$a^{\frac{r_{m+1}\dots r_n}{\chi_m^{m-1}}} = b$$

и пользуясь тождеством

$$r_{m+1}\dots r_n\left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right)\sum_1^n \frac{1}{r_i} - 2\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\} = \chi_m\left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q'}\right)\sum_1^m \frac{1}{\rho^{(m)}}\right\},$$

получим:

$$f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} F_{b^{\frac{\rho_1^{(m)} \ldots \rho_m^{(m)}}{\rho_j^{(m)}}\nu}}(x_j)}{b^{\rho_1^{(m)} \ldots \rho_m^{(m)} \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q'}\right) \sum\limits_{1}^{m} \frac{1}{\rho_i^{(m)}}\right\}\nu}},$$

откуда, в силу теоремы 1, следует, что функция $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ — граничная в классе $H_{p' x_1 \ldots x_m}^{(\rho_1^{(m)}, \ldots, \rho_m^{(m)})}$.

Теорема 2 показывает, что первая часть теоремы вложения не может быть улучшена в смысле увеличения чисел $\rho_i^{(m)}$ при каких угодно p, p', r_i, n, m, удовлетворяющих условиям

$$1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad r_i > 0, \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \chi_m > 0.$$

5. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $\varphi(t)$ имеет на $(0, x)$ абсолютно непрерывную $(k-1)$-ю производную (а следовательно, суммируемую k-ю производную) и $\varphi(0) = 0$. Если*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \varphi(t)\, dt, \tag{9}$$

то справедлива формула

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x t^{k-1} \{(k+1)t - kx\} \varphi^{(k)}(t)\, dt. \tag{10}$$

Формула (10) верна для $k = 1$ и ее доказательство легко проводится методом индукции.

Если функция $\varphi(t)$ имеет k-ю абсолютно непрерывную производную, то из (10), интегрируя по частям, получим:

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x t^k (x - t) \varphi^{(k+1)}(t)\, dt. \tag{11}$$

Если $\varphi^{(k+1)}(t)$ непрерывна в точке $t = 0$, то из (11), применяя правило Лопиталя, находим:

$$f^k(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)(k+2)}. \tag{12}$$

ЛЕММА 2. а) *Функция*

$$F_N(x) = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} Nx}{x}\right)^2 \tag{13}$$

обладает следующими свойствами:

$$|F'_N(x+h)| > |F'_N(x)| > \frac{N^4}{12\pi} x \quad \left(0 < Nx < N(x+h) \leqslant \frac{\pi}{2};\ N \geqslant 1\right), \tag{14}$$

$$\|F_N(x)\|_p^{(1)} = K_p N^{2 - \frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1, \tag{15}$$

где

$$K_p = 2^{\frac{1}{p}-2} \left\| \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \right\|_p^{(1)} < \infty \quad (p > 1),$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2} \quad [\text{см. } (^6), \text{ стр. } 126].$$

б) *При любых* $a > 1$ *и* $r_i > 0$ *функция* (5) *принадлежит к классу* $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{px_1\ldots x_n}$, $p \geqslant 1$.

Доказательство. Представим $F_N(x)$ в виде

$$F_N(x) = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)}{x^2} \int_0^x \sin Nt\, dt\,.$$

Отсюда, применяя формулу (11), получим:

$$F'_N(x) = -\frac{N^3}{2x^3} \int_0^x t\,(x-t) \sin Nt\, dt, \qquad (*)$$

$$F''_N(x) = -\frac{N^4}{2x^4} \int_0^x t^2\,(x-t) \cos Nt\, dt. \qquad (**)$$

Из (*) следует, что $F'_N(x) < 0$ при $0 < Nx \leqslant \pi$. Из (**) следует, что при $0 < Nx \leqslant \frac{\pi}{2}$ отрицательная функция $F'_N(x)$ убывает, и первое из неравенств (14) доказано.

Далее, в пределах $0 < \frac{N}{2} x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$|F'_N(x)| \geqslant \frac{N^3}{2x^3} \int_0^x t\,(x-t)\,\frac{2}{\pi}\,Nt\,pt = \frac{N^4}{12\pi} x,$$

что совпадает со вторым из неравенств (14). Формула (15) очевидна.

Докажем теперь вторую часть леммы. Функция $F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)$ — целая, степени $a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}$ по x_j. Поэтому сумма

$$\sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}}$$

представляет собой целую функцию степеней $a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\mu}$ соответственно по x_j, принадлежащую к $L_p^{(n)}$, и

$$\left\| f - \sum_{1}^{-1} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right\|_p^{(n)} \leqslant \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left\| F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j) \right\|_p^{(1)}}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}}\,.$$

Но, в силу (15), правая часть этого соотношения равна

$$K_p^n \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a^{-r_1\ldots r_n\nu} < \frac{c}{\left(a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\mu}\right)^{r_j}},$$

где c — константа, не зависящая от μ. Отсюда и следует, на основании (8), что $f \in H_{px_1\ldots x_n}^{(r_1,\ldots r_n)}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad r_i < 1 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

тогда функция (5) *при достаточно большом* $a > 0$ *является граничной функцией класса* $H_{px_1\ldots x_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$.

Доказательство. То, что $f \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$, следует из предыдущей леммы. Наша лемма будет доказана, если будет построена последовательность положительных $h \to 0$, для которых

$$\| \Delta_{x_j}(f; h) \|_p^{(n)} > M h^{r_j} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

где M — положительная константа, не зависящая от h. Ради удобства будем считать, что $j = 1$. Зададим натуральное число μ и положим

$$h = h(\mu) = a^{-r_1\ldots r_n(\mu-1)}, \quad \delta_j = \pi h^{\frac{r_1}{r_j}} \quad (j = 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Тогда

$$\sigma(h) = \left\| \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{\{F_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1+h) - F_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1)\} \prod\limits_{j=2}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right\|_p^{(n)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \| F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j) \|_p^{(1)}}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} = \frac{2K_p^n}{a^{r_1\ldots r_n}-1} h^{r_1},$$

в силу (15) и (17), и

$$s(h) = \left\| \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{\left\{F_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1+h) - F_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1)\right\} \prod\limits_{j=2}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right\|_p^{(n)} =$$

$$= h \left\| \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{F'_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1+\theta h) \prod\limits_{j=2}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right\|_p^{(n)} >$$

$$> h \left(\int_0^h dx_1 \int_0^{\delta_2} dx_2 \ldots \int_0^{\delta_n} \left| \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{F'_{a^{r_1\ldots r_n\nu}}(x_1+\theta h) \prod\limits_{j=2}^{n} F_{a^{\frac{r_1\ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1\ldots r_n\left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right|^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим, что правая часть написанного неравенства будет

$$\geqslant \frac{h^{1-\frac{1}{q}}}{\left(\prod\limits_{j=2}^{n} \delta_j\right)^{\frac{1}{q}}} \left(\int\limits_0^h dx_1 \int\limits_0^{\delta_2} dx_2 \ldots \int\limits_0^{\delta_n} \left| \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{F'_{a^{r_1 \ldots r_n \nu}}(x_1+\theta h) \prod\limits_{j=2}^{n} F_{a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1 \ldots r_n \left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_1^n \frac{1}{r_i}\right\}\nu}} \right| dx_n \right)$$

$$(0<\theta<1).$$

При $0<x_j<\delta_j$ и $\nu=1, \ldots, \mu-1$ $(j=2, \ldots, n)$ имеем:

$$\frac{1}{2} a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}\nu} x_j \leqslant \frac{1}{2} a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}(\mu-1)} \delta_j = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому, применяя неравенство $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим:

$$F_{a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j) \geqslant \frac{1}{\pi^2} a^{2\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}\nu} \qquad (j=2, \ldots, n;\ \nu=1, \ldots, \mu-1). \tag{18}$$

Кроме того, при $0<x_1<h$ и $\nu=1, \ldots, \mu-1$ имеем:

$$a^{r_1 \ldots r_n \nu}(x_1+h) \leqslant a^{r_1 \ldots r_n (\mu-1)} 2h = 1. \tag{19}$$

Вследствие выполнения (19) и (18), мы находимся в условиях применимости леммы 2. Поэтому все слагаемые, стоящие под знаком $\sum\limits_{\nu=1}^{\mu-1}$, имеют отрицательный знак; ограничиваясь последним слагаемым и применяя первое из неравенств (14), будем иметь:

$$s(h) \geqslant \frac{h^{1-\frac{1}{q}} \left(\prod\limits_{j=2}^{n} \delta_j\right)^{-\frac{1}{q}}}{a^{r_1 \ldots r_n \left\{1+\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_1^n \frac{1}{r_i}\right\}(\mu-1)}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^h \left| F'_{a^{r_1 \ldots r_n (\mu-1)}}(x_1) \right| dx_1 \right) \prod_{j=2}^{n} \int\limits_0^{\delta_j} F_{a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}(\mu-1)}}(x_j)\, dx_j.$$

Применяя неравенство (18) и второе из неравенств (14) и выражая степени a через h, мы найдем, что правая часть написанного соотношения будет

$$\geqslant \frac{h^{r_1}}{24\pi^{n+\frac{1}{q}(n-1)}}.$$

Очевидно,

$$\| \Delta_{x_1}(f; h) \|_p^{(n)} \geqslant s(h) - \sigma(h) \geqslant \left(\frac{1}{24\pi^{n+\frac{1}{q}(n-1)}} - \frac{2K_p^n}{a^{r_1 \cdots r_n} - 1} \right) h^{r_1}.$$

Но при достаточно большом $a > 0$ константа

$$M = \frac{1}{24\pi^{n+\frac{1}{q}(n-1)}} - \frac{2K_p^n}{a^{r_1 \cdots r_n} - 1} > 0,$$

а следовательно, выполняется неравенство (16).

Лемма доказана.

Примечание. При доказательстве неравенства

$$\| \Delta_{x_1}(f; h) \|_p^{(n)} > Mh^{r_1}$$

на числа $r_2, \ldots, r_n$ никаких ограничений (кроме их положительности) мы не накладывали. Отсюда следует, что это неравенство имеет место при любых положительных $r_2, \ldots, r_n$, лишь бы было $r_1 < 1$. Этим фактом мы воспользуемся при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 4. *Функция*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_{a^\nu}(x)}{a^{\nu\left(r+1+\frac{1}{q}\right)}},$$

где сходимость ряда понимается в смысле $L_p^{(1)}$, $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *является граничной функцией в классе* $H_{px}^{(r)}$, *если только* $a > 0$ *достаточно велико.*

Доказательство. То, что $f \in H_{px}^{(r)}$, следует из леммы 2. Если $1 - \frac{1}{pr} < 0$, то $r < \frac{1}{p} \leqslant 1$, и лемма 4 следует из леммы 3. Если $1 - \frac{1}{pr} = 0$, то при $p > 1$ имеем $r < 1$, и наша лемма следует из предыдущей леммы. При $p = 1$ функция $f(x)$ примет вид:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_{a^\nu}(x)}{a^{2\nu}}.$$

Допустим, что $f \in H_1^{(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\chi = 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty}\right) \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0,$$

следовательно, по теореме вложения, f принадлежит к классу $H_\infty^{(\varepsilon)}$ и должна быть непрерывной, но это не так, ибо она не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Действительно, пусть задано достаточно малое $x > 0$. Подберем к нему натуральное μ так, чтобы выполнялось условие

$$a^{-(\mu+1)} < x \leqslant a^{-\mu}.$$

Тогда

$$f(x) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{F_{a^\nu}(x)}{a^{2\nu}}$$

для любого x. Так как при $\nu = 1, \ldots, \mu$ имеем

$$\frac{F_{a^\nu}(x)}{a^{2\nu}} \geqslant \frac{1}{a^{2\nu}}\left(\frac{a^\nu}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2},$$

то $f(x) \geqslant \frac{\mu}{\pi^2} \to \infty$, когда $x \to 0$. Этим доказательство леммы для случая $1 - \frac{1}{pr} \leqslant 0$ завершается.

Докажем теперь лемму 4 для случая, когда $1 - \frac{1}{pr} > 0$. Здесь $\chi = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}\right)\frac{1}{r} > 0$, и, по теореме вложения,

$$f \in H_\infty^{(\rho)}, \text{ где } \rho = \chi r = r - \frac{1}{p}.$$

Покажем, что f является граничной в классе $H_\infty^{(\rho)}$, откуда, в силу теоремы вложения, будет следовать, что она является граничной также в классе $H_p^{(r)}$. Для этой цели представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_{a^\nu}(x)}{a^{\nu\left(r+1+\frac{1}{q}\right)}} = \frac{1}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{a^\nu}{2}\int_0^x \sin a^\nu t\, dt}{a^{\nu\left(r+1+\frac{1}{q}\right)}} = \frac{1}{2x^2}\int_0^x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin a^\nu t}{a^{\nu(\rho+1)}}\, dt$$

или, с точностью до постоянного множителя,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \varphi(t)\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin a^\nu t}{a^{\nu(\rho+1)}}.$$

Применяя (8), легко показать, что $\varphi \in H_\infty^{(\rho+1)}$. Пусть $\rho = k + \alpha$, где k — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$. Так как $\varphi \in H_\infty^{(k+1+\alpha)}$ и $\varphi(0) = 0$, то к функции f применимы формулы (11) и (12). Поэтому

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x t^k (x-t)\, \varphi^{(k+1)}(t)\, dt,$$

$$f^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)(k+2)}.$$

Пусть k — четное число. Тогда с точностью до знака

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos a^\nu t}{a^{\alpha\nu}}.$$

Зададим достаточно малое $t > 0$ и подберем к нему такое натуральное μ, чтобы выполнялось условие

$$a^{-(\mu+1)} < t \leqslant a^{-\mu}.$$

Тогда

$$\varphi^{(k+1)}(0)-\varphi^{(k+1)}(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\cos a^{\nu}t}{a^{\alpha\nu}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\sin^{2}\frac{1}{2}a^{\nu}t}{a^{\alpha\nu}}>$$

$$>\frac{2\sin^{2}\frac{1}{2}a^{\mu}t}{a^{\alpha\mu}}\geqslant\frac{2}{\pi^{2}}t^{2}a^{(2-\alpha)\mu}>\frac{2}{\pi^{2}}t^{2}\frac{1}{a^{2-\alpha}t^{2-\alpha}}=c_1t^{\alpha}, \tag{20}$$

где

$$c_1=2\pi^{-2}a^{\alpha-2}.$$

Так как при k четном $f^{(k)}(x)$ — четная функция, то, принимая во внимание, что

$$\frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}=\int_0^x t^k(x-t)\,dt,$$

имеем следующее неравенство, справедливое для достаточно малых $x>0$:

$$|f^{(k)}(x)-2f^{(k)}(0)+f^{(k)}(-x)|=2\,|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)|=$$

$$=2\left|\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x t^k(x-t)\varphi^{(k+1)}(t)\,dt-\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)(k+2)}\right|=$$

$$=2\left|\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x t^k(x-t)\{\varphi^{(k+1)}(0)-\varphi^{(k+1)}(t)\}\,dt\right|,$$

что, в силу (20), будет

$$>\frac{2}{x^{k+2}}\int_0^x t^k(x-t)c_1t^2\,dt=c_2x^{\alpha}\quad\left(c_2=\frac{2c_1}{(k+1+\alpha)(k+2+\alpha)}\right). \tag{21}$$

Из (21) следует, что f не может принадлежать к классу $H_{\infty}^{(k+\alpha+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$. При $\alpha<1$ это очевидно.

Пусть $\alpha=1$. Допустим, что $f\in H_{\infty}^{(k+1+\varepsilon)}$, $0<\varepsilon<1$; тогда $f(x)$ должна иметь $(k+1)$-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица степени ε. Применяя формулу Лагранжа, найдем:

$$|f^{(k)}(x)-2f^{(k)}(0)+f^{(k)}(-x)|=$$
$$=|xf^{(k+1)}(\theta x)-f^{(k+1)}(-\theta x)|\leqslant c_3x^{1+\varepsilon},$$

что противоречит (21) при $\alpha=1$.

Пусть теперь k — нечетное число. Тогда с точностью до знака

$$\varphi^{(k)}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos a^{\nu}x}{a^{\nu(1+\alpha)}},$$

и, рассуждая, как и выше при получении (21), получим неравенство

$$|f^{(k-1)}(0)-f^{(k-1)}(x)|>c_4x^{1+\alpha}\quad(c_4>0), \tag{22}$$

справедливое для всех достаточно малых $x>0$. Из (22) при $\alpha<1$ следует, что $f\bar{\in}H_{\infty}^{(\rho+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$.

Действительно, допустим, что $f\in H_{\infty}^{(\rho+\varepsilon)}$, $\alpha+\varepsilon<1$; тогда f должна иметь k-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица степени

$\alpha+\varepsilon$. Но ввиду того что

$$f^{(k)}(0)=\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)(k+2)}=0,$$

имеем:

$$|f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0)|=x|f^{(k)}(\theta x)|=x|f^{(k)}(\theta x)-f^{(k)}(0)|\leqslant c_5x^{1+\alpha+\varepsilon},$$

что противоречит (22). Если же $\alpha=1$, то с точностью до знака

$$\varphi^{(k+1)}(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin a^{\nu}t}{a^{\nu}}.$$

Положим $x=a^{-\mu}$; тогда

$$\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\frac{1}{x^{k+3}}\int_0^x t^k(x-t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin a^{\nu}t}{a^{\nu}}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{x^{k+3}}\left\{\int_0^x t^k(x-t)\sum_{\nu=1}^{\mu}\frac{\sin a^{\nu}t}{a^{\nu}}\,dt-\int_0^x t^k(x-t)\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{a^{\nu}}\,dt\right\}\geqslant$$

$$\geqslant c_6\mu-O(1)\to\infty,\ \mu\to\infty.$$

Следовательно, функция $f^{(k)}(x)$ в точке $x=0$ не имеет производной, а потому $f(x)$ заведомо не принадлежит к классу $H_{\infty}^{(k+1+\varepsilon)}$. Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. Если все разности $1-\frac{1}{pr_i}<0$, то все $r_i<1$, и теорема верна в силу леммы 3.

Если все разности $1-\frac{1}{pr_i}=0$, то $r_1=\ldots=r_n=\frac{1}{p}$. При $p>1$ все $r_i<1$, и теорема верна в силу той же леммы 3. При $p=1$ все $r_i=1$, и наша функция примет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}F_{a^{\nu}}(x_j)}{a^{(n+1)\nu}}.$$

Оценим снизу для малых h интеграл

$$\|\Delta_{x_1}(f'_{x_1};h)\|_1^{(n)}\equiv$$

$$\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f'_{x_1}(x_0+h,x_2,\ldots,x_n)-f'_{x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\,dx_1\ldots dx_n\geqslant$$

$$\geqslant\left|\int_{-h}^{h}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\{f'_{x_1}(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-f'_{x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\,dx_2\ldots dx_n\right|=$$

$$=\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a^{(n+1)\nu}}\left(\int_{-h}^{h}[F'_{a^{\nu}}(x_1+h)-F'_{a^{\nu}}(x_1)]\,dx_1\right)\prod_{j=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}F_{a^{\nu}}(x_j)\,dx_j\right|.$$

Так как

$$\int_{-h}^{h} [F'_{a^\nu}(x_1+h) - F_{a^\nu}(x_1)]\, dx_1 = F_{a^\nu}(2h) - F_{a^\nu}(0) \leqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{a^\nu}(x_j)\, dx_j = \frac{\pi}{2} a^\nu \qquad \text{(см. формулу (15))},$$

то

$$\| \Delta_{x_1}(f'_{x_1}; h) \|_1^{(n)} > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_{a^\nu}(0) - F_{a^\nu}(2h)}{a^{2\nu}} > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{F_{a^\mu}(0) - F_{a^\mu}(2h)}{a^{2\mu}}.$$

Подберем μ так, чтобы выполнялось условие $a^{-(\mu+1)} < h \leqslant a^{-\mu}$, тогда

$$\frac{F_{a^\mu}(0) - F_{a^\mu}(2h)}{a^{2\mu}} = \frac{(a^\mu h + \sin a^\mu h)(a^\mu h - \sin a^\mu h)}{4a^{2\mu} h^2} \geqslant \frac{\left(a^\mu h + \frac{2}{\pi} a^\mu h\right) c_7 (a^\mu h)^3}{4(a^\mu h)^2} =$$

$$= \frac{c_7\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)}{4} (a^\mu h)^2 > \frac{c_7\left(1+\frac{2}{\pi}\right)}{4a^2} = c_8 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} > 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $h > 0$ имеем оценку:

$$\| \Delta_{x_1}(f'_{x_1}; h \|_1^{(n)} > c_9, \tag{23}$$

где константа $c_9 > 0$ не зависит от h.

Если допустить, что $f \in H^{(1+\varepsilon, 1, \ldots, 1)}_{1 x_1 \ldots x_n}$ $(0 < \varepsilon < 1)$, то должно иметь место неравенство

$$\| \Delta_{x_1}(f'_{x_1}; h) \|_1^{(n)} \leqslant M \mid h \mid^\varepsilon,$$

справедливое для любых h. Но это противоречит оценке (23). Аналогично доказывается, что $f \,\overline{\in}\, H^{(1+\varepsilon)}_{1x_j}$, $\varepsilon > 0$, $j = 2, \ldots, n$.

Пусть

$$r_i - \frac{1}{p} < 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad r_i - \frac{1}{p} = 0 \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Если $p > 1$, то все $r_i < 1$, и f — граничная в классе $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ в силу леммы 3.

Если $p = 1$, то $r_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, и, в силу примечания к лемме 3,

$$f \,\overline{\in}\, H^{(1+\varepsilon)}_{1x_i}, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Рассуждая так же, как и при получении (23), для малых $h > 0$ получим оценку:

$$\| \Delta_{x_i}(f'_{x_i}; h) \|_1^{(n)} > c_{10}, \tag{24}$$

где $i = m+1, \ldots, n$, а константа $c_{10} > 0$ не зависит от h. Из (24) следует, что $f \,\overline{\in}\, H^{(1+\varepsilon)}_{1x_i}$, $\varepsilon > 0$, $i = m+1, \ldots, n$.

Рассмотрим случай, когда одна из разностей $1 - \frac{1}{pr_i}$ положительна. В этом случае будем доказывать теорему методом индукции. Как показывает лемма 4, теорема верна для $n = 1$. Допустим, что она верна для

$n = m-1$. Докажем ее справедливость для $n = m$. Для удобства будем считать, что $1 - \frac{1}{pr_m} > 0$. Тогда

$$\chi = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\right) \sum_{1}^{m-1} \frac{1}{r_i} - \frac{1}{pr_m} > 0,$$

и, по теореме вложения, при любом фиксированном x_m функция

$$f \in H_{px_1 \ldots x_{m-1}}^{(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})}, \text{ где } \rho_i = \chi r_i \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

С другой стороны, с точностью до постоянного множителя

$$f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} F_{a^{\frac{r_1 \ldots r_n}{r_j}\nu}}(x_j)}{a^{r_1 \ldots r_m \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_i} - \frac{2}{r_m}\right\}\nu}}.$$

Полагая здесь $a^{r_m/\chi^{m-2}} = b$ и используя тождество

$$r_m \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_i} - \frac{2}{r_m}\right\} = \chi \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \sum_{1}^{m-1} \frac{1}{\rho_i}\right\},$$

получим

$$f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} F_{b^{\frac{\rho_1 \ldots \rho_{m-1}}{\rho_j}\nu}}(x_j)}{b^{\rho_1 \ldots \rho_{m-1} \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \sum_{1}^{m-1} \frac{1}{\rho_i}\right\}\nu}},$$

откуда, по допущению, заключаем, что $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$ есть граничная функция класса $H_{px_1 \ldots x_{m-1}}^{(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})}$, а следовательно, по теореме вложения, функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ — граничная в классе $H_{px_1 \ldots x_m}^{(r_1, \ldots, r_m)}$.

Теорема 1 доказана полностью.

Поступило
22.IX. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных и их применение, Доклады Ак. наук СССР, 76 (1951), 785—788.

[2] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 88 (1951), 244—278.

[3] Бернштейн С. Н., О свойствах однородных функциональных классов, Доклады Ак. наук СССР, 57 (1947), 111—114.

[4] Бернштейн С. Н., Вторая заметка об однородных функциональных классах, Доклады Ак. Наук СССР, 59 (1948), 1379—1384.

[5] Zygmund A., Smooth functions, Duke Math. J., 12 (1945), 47—77.

[6] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации функций, М.—Л., 1947.

[7] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. Гос. Университета, 1950.

[8] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Соч., т. I (1952), 11—96.

[9] Бернштейн С. Н., Об одном свойстве целых функций, Соч., т. I (1952), 269—270.

[10] Аманов Т. И., К теореме вложения для дифференцируемых функций многих переменных, Доклады Ак. наук СССР, 88 (1953), 5—8.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 33—58

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. II

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе уточняются результаты работы ([3]) и, в частности, снимается предположение, что спектр оператора снизу ограничен.

Введение

В настоящей работе изучаются те же вопросы, что и в работе ([3]). Однако нам удалось несколько усовершенствовать наши методы, благодаря чему многие теоремы работы ([3]) получили значительное уточнение.

Основное достижение настоящей работы состоит в том, что мы избавились от предположения, что спектр дифференциального оператора снизу ограничен. Таким образом теорема о равной сходимости разложения в обобщенный интеграл Фурье и обычный интеграл Фурье получена нами при минимальном требовании на коэффициент $q(x)$ — суммируемости в каждом конечном интервале. Приведем полную формулировку этой теоремы:

обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ *решение уравнения*

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{0.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \tag{0.2}$$

Функция $q(x)$, *а также число* h *предполагаются действительными. Предполагается также, что коэффициент* $q(x)$ *суммируем в каждом конечном интервале. Обозначим через* $\theta(x, s, \lambda)$ *спектральную функцию задачи* (0.1) — (0.2) [см. ([3])] *и пусть* $f(x) \in L_2(0, \infty)$. *Положим*

$$\lambda = \mu^2 \quad (\lambda > 0), \quad \theta_1(x, s, \mu) = \theta(x, s, \lambda),$$

$$\theta_1^*(x, s, \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos \nu x \cdot \cos \nu s \, d\nu, \quad S_1(x, \mu) = \int_0^\infty f(s)\, \theta_1(x, s; \mu)\, ds,$$

$$S_1^*(x, \mu) = \int_0^\infty f(s)\, \theta_1^*(x, s; \mu)\, ds.$$

Тогда равномерно в каждом конечном интервале (включая точку $x = 0$)

$$\lim_{\mu\to\infty} [S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu)] = \int_0^\infty f(s)\,\theta(x, s; -\infty)\,ds,$$

т. е. разность между разложением функции $f(x)$ *в обобщенный интеграл Фурье и разложением в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Кроме этой теоремы, получен ряд асимптотических формул для спектральной функции уравнения (0.1), более точных, чем в работах ([1]) и ([3]).

§ 1. Доказательство вспомогательной теоремы

В этом параграфе мы доказываем вспомогательную теорему, в некотором отношении дополняющую теорему 3.1 работы ([1]).

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть функция* $\sigma(\mu)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\sup_{\mu} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\nu)\} < \infty.$

b) *При каждом фиксированном* ν

$$\lim_{\mu\to\infty} \{\sigma(\mu+\nu) - \sigma(\mu)\} = 0.$$

c) *В некотором интервале* $(-\Lambda, \Lambda)$ $(\Lambda > 0)$ *преобразование Бохнера-Стильтьеса функции* $\sigma(\mu)$ *2-эквивалентно нулю (т. е. есть линейная функция).*

Выберем постоянную C_0 *так, чтобы преобразование Бохнера функции* $\sigma(\mu) + C_0$ *в интервале* $(-\Lambda, \Lambda)$ *было 2-эквивалентно нулю. Тогда*

$$\lim_{\mu\to\infty} \{\sigma(\mu) + C_0\} = 0. \tag{1.1}$$

Если функция $\sigma(\mu)$ *нечетна, то* $C_0 = 0$ *и, следовательно,*

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma(\mu) = 0. \tag{1.1'}$$

Доказательство. Как показано в работе ([2]), во всех точках непрерывности функции $\sigma(\mu)$ имеет место равенство

$$\sigma(\mu) + C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g_\Lambda(\nu)\, d_\nu \sigma(\mu+\nu), \tag{1.2}$$

где

$$g_\Lambda(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Lambda \psi_\Lambda(\lambda) \sin\lambda\nu\, d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_\Lambda^\infty \frac{\sin\lambda\nu}{\lambda}\, d\lambda$$

и функция $\psi_\Lambda(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \psi_\Lambda(-\lambda) = -\psi_\Lambda(\lambda), \\ 2)\ \psi_\Lambda(0) = \psi'_\Lambda(0) = 0; \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

3) $\psi_\Lambda(\lambda)$ в интервале $(0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda)$ трижды дифференцируема;

$$4)\ \psi_\Lambda(\Lambda) = \frac{1}{\Lambda}, \quad \psi'_\Lambda(\Lambda) = -\frac{1}{\Lambda^2}, \quad \psi''_\Lambda(\Lambda) = \frac{2}{\Lambda^3}. \tag{1.4}$$

Покажем, что при выполнении этих условий для $\nu \geqslant 0$ существует ограниченная производная $g'_\Lambda(\nu)$, причем для больших ν справедлива оценка

$$g'_\Lambda(\nu) = O\left(\frac{1}{\nu^3}\right). \tag{1.5}$$

В самом деле, заменяя $\lambda\nu$ на λ, мы получим:

$$\int_\Lambda^\infty \frac{\sin \lambda\nu}{\lambda} d\lambda = \int_{\Lambda\nu}^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g_\Lambda(\nu) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\Lambda \psi_\Lambda(\lambda)\sin\lambda\nu\, d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_{\Lambda\nu}^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda} d\lambda, \\ g'_\Lambda(\nu) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\Lambda \lambda\psi_\Lambda(\lambda)\cos\lambda\nu\, d\lambda - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\Lambda\nu}{\nu}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что $g'_\Lambda(\nu)$ при $\nu \geqslant 0$ ограничена.

Интегрируя трижды по частям и учитывая равенства (1.3) и (1.4), мы получим:

$$g'_\Lambda(\nu) = \frac{1}{\pi\nu^3}\int_0^\Lambda \{\lambda\psi_\Lambda(\lambda)\}''' \sin\lambda\nu\, d\lambda.$$

Этим оценка (1.5) доказана.

Пусть μ есть точка непрерывности функции $\sigma(\mu)$. Тогда из формулы (1.2) следует:

$$\sigma(\mu) + C_0 = \int_{-\infty}^{-0} g_\Lambda(\nu)\, d_\nu\sigma(\mu+\nu) + \int_{+0}^\infty g_\Lambda(\nu)\, d_\nu\sigma(\mu+\nu).$$

В силу оценки (1.5) и условия а), интегралы справа можно интегрировать по частям. Мы получим:

$$\sigma(\mu) + C_0 = g_\Lambda(-0)[\sigma(\mu-0) - \sigma(\mu)] - \int_{-\infty}^{-0} g'_\Lambda(\nu)[\sigma(\mu+\nu) - \sigma(\mu)]\, d\nu -$$

$$- g_\Lambda(+0)[\sigma(\mu+0) - \sigma(\mu)] - \int_{+0}^\infty g'_\Lambda(\nu)[\sigma(\mu+\nu) - \sigma(\mu)]\, d\nu.$$

Так как функция $g'_\Lambda(\nu)$ четная, то

$$\int_{-\infty}^{-0} g'_\Lambda(\nu)[\sigma(\mu+\nu) - \sigma(\mu)]\, d\nu = \int_{+0}^\infty g'_\Lambda(\nu)[\sigma(\mu-\nu) - \sigma(\mu)]\, d\nu.$$

Далее, в силу того что точка μ есть точка непрерывности функции $\sigma(\mu)$, имеем:

$$\sigma(\mu-0) - \sigma(\mu) = 0, \quad \sigma(\mu+0) - \sigma(\mu) = 0,$$

и, значит, проинтегрированные члены пропадают. Поэтому

$$\sigma(\mu) + C_0 = -\int_0^\infty g'_\Lambda(\nu)[\sigma(\mu+\nu) + \sigma(\mu-\nu) - 2\sigma(\mu)]\, d\nu.$$

Выберем произвольное положительное число N и положим

$$\sigma(\mu)+C_0=-\int_0^N g'_\Lambda(\nu)\,[\sigma(\mu+\nu)+\sigma(\mu-\nu)-2\sigma(\mu)]\,d\nu+$$
$$+\int_N^\infty g'_\Lambda(\nu)\,[\sigma(\mu+\nu)+\sigma(\mu-\nu)-2\sigma(\mu)]\,d\nu=I_1+I_2.$$

При фиксированном N из условия b) и известной теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} I_1=0. \tag{1.7}$$

Далее, из условия a) имеем:

$$|\sigma(\mu+\nu)+\sigma(\mu-\nu)-2\sigma(\mu)|<C|\nu|.$$

Поэтому

$$|I_2|=C\int_N^\infty \frac{d\nu}{\nu^2}=\frac{C}{N}. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) следует (1.1).

Если функция $\sigma(\mu)$ нечетна, то, как показано в работе [2] § 3, $C_0=0$ и, следовательно, имеет место равенство (1.1′).

Замечание. Условие b) выполняется, если при каждом ν

$$\lim_{\mu\to\infty}\overset{\mu+\nu}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\sigma(t)\}=0.$$

Действительно,

$$|\sigma(\mu+\nu)-\sigma(\mu)|\leqslant\overset{\mu+\nu}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\sigma(t)\}.$$

§ 2. Вывод вспомогательных формул

1. Мы будем изучать уравнение

$$y''+\{\lambda-q(x)\}\,y=0, \tag{2.1}$$

заданное на всей числовой прямой. Относительно функции $q(x)$ мы будем предполагать, что она действительна и суммируема в каждом конечном интервале. Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \varphi'(0,\lambda)=0, \tag{2.2}$$

и через $\psi(x,\lambda)$ — решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0,\lambda)=0,\quad \psi'(0,\lambda)=1. \tag{2.2′}$$

Наряду с уравнением (2.1) будем рассматривать уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.3}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Обозначим через $u(x,t;f)$ решение уравнения (2.3), удовлетворяющее началь-

ным условиям

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Из метода Римана легко следует, что

$$u(x, t; f) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, s; t) f(s)\, ds. \qquad (2.4)$$

Как показано в § 1 работы ([3]), если в окрестности некоторой точки x_0 функция $q(x)$ удовлетворяет оценке

$$\int_{x_0-s}^{x_0+s} |q(z)|\, dz < Cs^{\alpha}, \qquad (2.5)$$

где C и α — постоянные, не зависящие от s, то для достаточно малых t справедлива оценка

$$|w(x, s; t)| < C_1 t^{\alpha}. \qquad (2.6)$$

Приравнивая в формуле (2.4) $f(x)$ последовательно $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$, мы получим равенства:

$$\varphi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)] + \\ + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\, ds, \qquad (2.7)$$

$$\psi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\psi(x+t, \lambda) + \psi(x-t, \lambda)] + \\ + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\psi(s, \lambda)\, ds. \qquad (2.7')$$

2. Обозначим через $g_{\varepsilon}(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $g_{\varepsilon}(-t) = g_{\varepsilon}(t)$,
2) $g_{\varepsilon}(t) = 0$, если $t \geqslant \varepsilon$,
3) $g_{\varepsilon}(t)$ имеет непрерывную вторую производную.

Далее, положим

$$\psi_{\varepsilon}(\mu) = \int_0^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t)\cos\mu t\, dt.$$

Помножим обе части равенства (2.7) на $g_{\varepsilon}(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ε. Мы получим [см. ([3])]:

$$\varphi(x, \lambda)\psi_{\varepsilon}(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g_{\varepsilon}(x-s)\varphi(s, \lambda)\, ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi(s, \lambda)\chi_{\varepsilon}(x, s)\, ds, \qquad (2.8)$$

где

$$\chi_{\varepsilon}(x, s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x, s; t) g_{\varepsilon}(t)\, dt.$$

Точно так же из формулы (2.7′) следует:

$$\psi(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g_\varepsilon(x-s)\,\psi(s, \lambda)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s, \lambda)\,\chi_\varepsilon(x, s)\,ds. \quad (2.8')$$

Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Обозначим через $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ преобразования Фурье функции $f(s)$ (по функциям $\varphi(s, \lambda)$ и $\psi(s, \lambda)$). Из равенств (2.8) и (2.8′), а также из равенства Парсеваля следует [см. ([3])]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})\,d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\,f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x, s)\,ds, \quad (2.9)$$

где $\theta(x, s; \lambda)$ есть спектральная функция уравнения (2.1).

Так как функция $f(s)$ была выбрана произвольно, то из равенства (2.9) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})\,d_\lambda \theta(x, s; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} g_\varepsilon(x-s) + \frac{1}{2}\chi_\varepsilon(x, s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \quad (2.10)$$

Равенства (2.9) и (2.10) рассматривались уже нами в работе ([3]).

3. Обозначим через a произвольное действительное число и положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at.$$

Так как функция $g_\varepsilon(t, a)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $g_\varepsilon(t)$, то в формулах (2.9) и (2.10) можно $g_\varepsilon(t)$ заменить на $g_\varepsilon(t, a)$. В результате мы получим формулы:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\,f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s, a)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x, s; a)\,ds, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda \theta(x, s; \lambda) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} g_\varepsilon(x-s, a) + \frac{1}{2}\chi_\varepsilon(x, s; a), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geqslant \varepsilon, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s; a) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x, s; t)\,g_\varepsilon(t, a)\,dt. \quad (2.13)$$

Формулы (2.11) и (2.12) можно записать в виде:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} [\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\,f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s; a)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x, s; a)\,ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} [\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\,f(x)\,ds, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty [\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda\theta(x, s; \lambda)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}g_\varepsilon(x-s, a)+\frac{1}{2}\chi_\varepsilon(x, s; a)-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda\theta(x, s; \lambda), \\ \hfill |x-s|\leqslant\varepsilon, \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d_\lambda\theta(x, s; \lambda), \qquad |x-s|\geqslant\varepsilon.\end{cases} \tag{2.15}$$

Положим для $\lambda>0$

$$\lambda=\mu^2, \quad \theta(x, s; \lambda)=\theta(x, s; \mu^2)=\theta_1(x, s; \mu)$$

и продолжим $\theta_1(x, s; \mu)$ на отрицательные μ нечетно. Далее, положим

$$S_1(x, \mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta_1(x, s; \mu)\,f(s)\,ds.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2}[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]=\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt,$$

мы можем формулам (2.14) и (2.15) придать вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu S_1(x, \mu)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\,g_\varepsilon(x-s, a)\,ds+$$

$$+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\,\chi_\varepsilon(x, s; a)\,ds-2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right]d_\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x, s; \lambda)\,f(s)\,ds, \tag{2.16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x, s; \mu)=$$

$$=\begin{cases}g_\varepsilon(x-s; a)+\chi_\varepsilon(x, s; a)-2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right]d_\lambda\theta(x, s; \lambda), \\ \hfill |x-s|\leqslant\varepsilon, \\ -2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right]d_\lambda\theta(x, s; \lambda), \qquad |x-s|\geqslant s.\end{cases} \tag{2.17}$$

При $q(x)=0$ $w(x, t, s)=0$, и формулы (2.16) и (2.17) принимают вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu S^*(x, \mu)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\,g_\varepsilon(x-s, a)\,ds, \tag{2.16'}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\theta_1^*(x, s; \mu)=\begin{cases}g_\varepsilon(x-s, a), & |x-s|\leqslant\varepsilon, \\ 0 \quad , & |x-s|\geqslant\varepsilon,\end{cases} \tag{2.17'}$$

где

$$\theta_1^*(x, s; \mu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\mu(x-s)}{x-s},$$

$$S_1^*(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1^*(x, s; \mu)\, f(s)\, ds.$$

Вычитая из равенства (2.16) равенство (2.16′) и полагая

$$R(x, \mu) = S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu),$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R(x, \mu) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds -$$
$$- 2\int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\, f(s)\, ds. \qquad (2.18)$$

Вычитая из равенства (2.17) равенство (2.17′) и полагая

$$\Phi(x, s; \mu) = \theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu),$$

найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi(x, s; \mu) =$$

$$= \begin{cases} \chi_\varepsilon(x, s; a) - 2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda \theta(x, s; \lambda), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ -2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda \theta(x, s; \lambda), & |x-s| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Формулы (2.18) и (2.19) играют в дальнейшем фундаментальную роль.

§ 3. Асимптотическое поведение спектральной функции. Случай всей прямой

Формула (2.19) позволяет провести изучение асимптотического поведения спектральной функции $\theta_1(x, s; \mu)$. Предварительно мы займемся дальнейшим преобразованием правой части формулы (2.19). Вначале рассмотрим член

$$\chi_\varepsilon(x, s; a) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x, t; s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt.$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$; положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{|x-s|}^{1} w(x, t, s) \cos \nu t\, dt.$$

Мы имеем:

$$\frac{1}{2}\left[\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\right] = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a) \cos \mu t\, dt.$$

Из равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье следует:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty [\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)]\,\alpha(x,s;\mu)\,d\mu =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x,s;t)\,g_\varepsilon(t,a)\,dt = \dfrac{\pi}{2}\chi_\varepsilon(x,s;a), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|\geqslant\varepsilon. \end{cases}$$

Пользуясь четностью функции $\alpha(x,s;\mu)$, последнюю формулу можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,\alpha(x,s;\mu)\,d\mu = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\chi_\varepsilon(x,s;a), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|\geqslant\varepsilon. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Рассмотрим член, соответствующий отрицательному спектру. Мы имеем (меняя порядок интегрирования):

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right]d_\lambda\theta(x,s;\lambda) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a)\,h(x,s;t)\,dt,$$

где

$$h(x,s;t) = \int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}\,t\,d_\lambda\theta(x,s;\lambda).$$

Положим

$$\beta(x,s;\mu) = \int_0^1 h(x,s;t)\cos\mu t\,dt.$$

Из равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье следует (см. вывод формулы (3.1)):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,\beta(x,s;\mu)\,d\mu = \frac{\pi}{2}\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a)\,h(x,s;t)\,dt. \qquad (3.2)$$

Из равенств (2.19), (3.1) и (3.2) вытекает важное равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\Phi^*(x,s;\mu) = 0 \quad (0<\varepsilon\leqslant 1), \qquad (3.3)$$

где

$$\Phi^*(x,s;\mu) = \Phi(x,s;\mu) - \frac{1}{\pi}\int_0^\mu \alpha(x,s;\nu)\,d\nu + \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \beta(x,s;\nu)\,d\nu. \qquad (3.4)$$

В работе ([3]) показано, что существует константа C, зависящая от интервала изменения переменных x и s такая, что

$$\mathop{V}_{\mu}^{\mu+1}\{\Phi(x,s;\nu)\} < C. \qquad (3.5)$$

В работе (4) показано, что при фиксированных x, s и ν

$$\lim_{\mu\to\infty}[\Phi(x, s; \mu+\nu) - \Phi(x, s; \mu) = 0. \tag{3.6}$$

Оценки (3.5) и (3.6) переносятся на функцию $\Phi^*(x, s; \mu)$, что следует из равенств $(\mu\to\infty)$

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\left\{\int_0^\mu \alpha(x, s; \nu)\,d\nu\right\} = \int_\mu^{\mu+1} |\alpha(x, s; \nu)|\,d\nu = o(1),$$

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\left\{\int_0^\mu \beta(x, s; \nu)\,d\nu\right\} = \int_\mu^{\mu+1} |\beta(x, s; \nu)|\,d\nu = o(1).$$

Как показано в работе (1), из равенства (3.3) следует, что преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\Phi^*(x, s; \mu)$ (x, s — фиксированы) в интервале $(-1, 1)$ 2-эквивалентно нулю. Поэтому к $\Phi^*(x, s; \mu)$ применима теорема 1.1, т. е. при $\mu\to\infty$

$$\Phi^*(x, s; \mu) = o(1). \tag{3.7}$$

Равенство (3.7) имеет место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s. Из равенства (3.7) нетрудно получить асимптотическое поведение спектральной функции $\theta_1(x, s; \mu)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *При каждых фиксированных x и s*

$$\lim_{\mu\to\infty}\left[\theta_1(x, s; \mu) - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu(x-s)}{x-s}\right] = \theta(x, s; -\infty). \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) *имеет место равномерно в каждой конечной области изменения* (x, s).

Доказательство. В силу асимптотической формулы (3.7) и формулы (3.4), для доказательства равенства (3.8) следует показать, что при $\mu\to\infty$

$$\int_0^\mu \alpha(x, s; \nu)\,d\nu = o(1), \tag{3.9}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\mu \beta(x, s; \nu)\,d\nu = -\theta(x, s; -\infty) + o(1), \tag{3.10}$$

и притом равномерно в каждой конечной области.

Докажем вначале равенство (3.9). Мы имеем:

$$\int_0^\mu \alpha(x, s; \nu)\,d\nu = \int_{|x-s|}^1 w(x, s; t)\,\frac{\sin\mu t}{t}\,ds.$$

Обозначим через η произвольное положительное число, не превосходящее единицы, и положим

$$\int_{|x-s|}^1 w(x, s; t)\,\frac{\sin\mu t}{t}\,dt = \int_{|x-s|}^\eta w(x, s; t)\,\frac{\sin\mu t}{t}\,dt + \int_\eta^1 w(x, s; t)\,\frac{\sin\mu t}{t}\,dt = I_1 + I_2.$$

В силу оценки (2.5),

$$|I_1| \leqslant C \int_0^{\eta} t^{\alpha-1} dt = C_1 \eta^{\alpha}.$$

Поэтому, каково бы ни было положительное число ζ, можно выбрать η настолько малым, что для всех μ будет выполняться неравенство

$$|I_1| < \frac{\zeta}{2}. \tag{3.11}$$

Далее, из леммы Римана следует, что при фиксированном η можно взять μ_0 настолько большим, чтобы для $\mu > \mu_0$ имело место неравенство

$$|I_2| < \frac{\zeta}{2}. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что для $\mu > \mu_0$

$$\left| \int_{|x-s|}^{1} w(x, s; t) \frac{\sin \mu t}{t} \right| dt < \zeta,$$

что доказывает равенство (3.9), в силу произвольности числа ζ. Равномерность равенства (3.9) следует из равномерной непрерывности функции $w(x, s; t)$.

Докажем равенство (3.10). Мы имеем:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, s; \nu) \, d\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{1} h(x, s; t) \frac{\sin \mu t}{t} \, dt.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{0} \cos \sqrt{\lambda} t \, |d_{\lambda} \theta(x, s; \lambda)| < \infty,$$

то функция $h(x, s; t)$ по t есть целая аналитическая функция, и, значит, в частности, в окрестности точки $t = 0$ дифференцируема. Поэтому из известной теоремы следует (при $\mu \to \infty$)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, s; \nu) \, d\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{1} h(x, s; t) \frac{\sin \mu t}{t} \, dt =$$
$$= h(x, s; 0) + o(1) = -\theta(x, s; -\infty) + o(1),$$

что и требовалось доказать. Равномерность равенства (3.10) следует из ограниченности функций $h(x, s; t)$ и $\frac{\partial h}{\partial t}$.

§ 4. Асимптотическое поведение спектральной функции. Случай полупрямой

1. Пусть уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \tag{4.1}$$

задано на полупрямой $(0, \infty)$. Функцию $q(x)$ мы будем считать суммируемой в каждом конечном интервале. Присоединим к уравнению (4.1)

граничное условие в точке $x=0$:

$$y'(0)-hy(0)=0, \tag{4.2}$$

где $h \neq \infty$ — действительное число. Случай $h=\infty$ мы рассмотрим отдельно в следующем параграфе.

Обозначим через $\omega_h(x,\lambda)$ решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\omega_h(0,\lambda)=1, \quad \omega_h'(0,\lambda)=h.$$

Далее, обозначим через $\theta_h(x,s;\lambda)$ спектральную функцию задачи (4.1)—(4.2) и через $\theta_h^*(x,s;\lambda)$ — спектральную функцию той же задачи при $q(x)=0$. Положим при $\lambda>0$

$$\lambda=\mu^2, \quad \theta_h(x,s;\mu)=\theta_h(x,s;\mu^2)=\theta_{h,1}(x,s;\mu),$$

$$\theta_h^*(x,s;\lambda)=\theta_{h,1}^*(x,s,\mu), \quad \Phi\ (x,s,\mu)=\theta_{h,1}(x,s;\mu)-\theta_{h,1}^*(x,s;\mu).$$

Предположим сначала, что $h>0$. В этом случае уравнение

$$y''+\lambda y=0 \tag{4.3}$$

не имеет отрицательного спектра. Повторяя выводы предыдущего параграфа, мы получим асимптотическую формулу:

$$\theta_{h,1}(x,s;\mu)-\theta_{h,1}^*(x,s;\mu)=\theta_h(x,s;-\infty)+o(1). \tag{4.4}$$

Выделим из функции $\theta_{h,1}^*(x,s;\mu)$ главный член. Как известно [см. ([5]), гл. IV],

$$\theta_{h,1}^*(x,s;\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu \left(\cos\nu x+\frac{h}{\nu}\sin\nu x\right)\left(\cos\nu s+\frac{h}{\nu}\sin\nu s\right)\frac{\nu^2}{\nu^2+h^2}\,d\nu=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos\nu x\cos\nu s\,\frac{\nu^2}{\nu^2+h^2}\,d\nu+\frac{2h}{\pi}\int_0^\mu \frac{\sin(x+s)}{\nu}\,\frac{\nu^2}{\nu^2+h^2}\,d\nu+$$

$$+\frac{2}{\pi}h^2\int_0^\mu \frac{\sin\nu x\sin\nu s}{\nu^2+h^2}\,d\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos\nu x\cdot\cos\nu s\,d\nu-$$

$$-\frac{2}{\pi}h^2\int_0^\mu \frac{\cos\nu x\cdot\cos\nu s}{\nu^2+h^2}\,d\nu+\frac{2}{\pi}h^2\int_0^\mu \frac{\sin\nu x\cdot\sin\nu s}{\nu^2+h^2}\,d\nu+$$

$$+\frac{2h}{\pi}\int_0^\mu \frac{\sin\nu(x+s)}{\nu^2+h^2}\,\nu\,d\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos\nu x\cdot\cos\nu s\,d\nu+ \tag{4.5}$$

$$+\frac{2h}{\pi}\int_0^\mu \frac{\sin\nu(x+s)}{\nu^2+h^2}\,\nu\,d\nu-\frac{2}{\pi}h^2\int_0^\mu \frac{\cos\nu(x-s)}{\nu^2+h^2}\,d\nu=$$

$$=\theta_1^*(x,s;\mu)+\frac{2h}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\nu(x+s)}{\nu^2+h^2}\,\nu\,d\nu-\frac{2}{\pi}h^2\int_0^\infty \frac{\cos\nu(x-s)}{\nu^2+h^2}\,d\nu+o(1),$$

причем

$$\theta_1^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu} \cos \nu x \cos \nu s \, d\nu$$

есть спектральная функция задачи (4.1) — (4.2) при $q(x)=0$ и $h=0$.

Из (4.4) и (4.5) следует

ТЕОРЕМА 4.1. *При каждых фиксированных x и s*

$$\lim_{\mu\to\infty}[\theta_{h,1}(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] = \theta_h(x, s; -\infty) +$$

$$+\frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \nu(x+s)}{\nu^2+h^2}\nu \, d\nu - \frac{2}{\pi}h^2\int_0^{\infty}\frac{\cos \nu(x-s)}{\nu^2+h^2}d\nu. \tag{4.6}$$

Равенство (4.6) *имеет место равномерно в каждой конечной области.*

В частности, при $x=s=0$ мы получаем из равенства (4.6):

$$\lim_{\mu\to\infty}\left[\rho(\mu) - \frac{2}{\pi}\mu\right] = \rho(-\infty) - h. \tag{4.7}$$

2. Рассмотрим случай $h<0$. В этом случае уравнение (4.3) имеет одно отрицательное собственное значение $\lambda_0=-h^2$. Действительно, собственные функции, соответствующие отрицательным собственным значениям, имеют интегрируемый квадрат. Для $\lambda<0$ решения уравнения (4.3) имеют вид:

$$\omega_h^*(x, \lambda) = \cos h\sqrt{|\lambda|}x + h\frac{\sin h\sqrt{|\lambda|}x}{\sqrt{|\lambda|}} =$$

$$= e^{-\sqrt{|\lambda|}x}\left(1-\frac{h}{\sqrt{|\lambda|}}\right) + e^{\sqrt{|\lambda|}x}\left(1+\frac{h}{\sqrt{|\lambda|}}\right).$$

Поэтому, если $\omega_h^*(x, \lambda)\in L_2(0, \infty)$, то $1+\dfrac{h}{\sqrt{|\lambda|}}=0$, т. е. $\lambda=\lambda_0=-h^2$. Соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $|h|e^{hx}$.

Таким образом, при сравнении спектральной функции $\theta_h(x, s; \lambda)$ со спектральной функцией $\theta_h^*(x, s; \lambda)$ появится дополнительный член $h^2e^{h(x+s)}$, соответствующий отрицательному собственному значению задачи (4.3) — (4.2).

Следовательно, вместо формулы (4.6) мы получим формулу:

$$\lim_{\mu\to\infty}[\theta_{h,1}(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] =$$

$$= \theta_h(x, s; -\infty) + \frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin \nu(x+s)}{\nu^2+h^2}\nu \, d\nu -$$

$$-\frac{2}{\pi}h^2\int_0^{\infty}\frac{\cos \nu(x-s)}{\nu^2+h^2}d\nu + h^2e^{h(x+s)}. \tag{4.8}$$

Полагая $x=s=0$, получим из формулы (4.8):

$$\lim_{\mu\to\infty}\left[\rho_h(\mu) - \frac{2}{\pi}\mu\right] = \rho(-\infty) - |h| + h^2. \tag{4.9}$$

Формулы (4.7) и (4.9) уточняют основную асимптотическую формулу работы ([1]).

§ 5. Асимптотическое поведение спектральной функции. Случай $h = \infty$

1. При $h = \infty$ граничное условие (4.2) принимает вид

$$y(0) = 0. \tag{5.1}$$

В случае граничного условия (5.1) спектральную функцию уравнения (4.1) следует сравнивать со спектральной функцией задачи (4.3) — (5.1), т. е. с функцией

$$\theta_1^*(x, s; \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu} \sin \nu x \sin \nu s \, d\nu.$$

В результате мы получим асимптотическую формулу:

$$\lim\,[\theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu)] = \theta(x, s; -\infty). \tag{5.2}$$

Здесь $\theta(x, s; \lambda)$ есть спектральная функция задачи (4.1) — (5.1), т. е.

$$\theta(x, s; \lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\lambda} \psi(x, \lambda)\psi(s, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda > 0, \\ \displaystyle -\int_0^{\lambda} \psi(x, \lambda)\psi(s, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Из формулы (5.2) невозможно получить асимптотическое поведение функции $\rho_1(\mu)$, ибо если мы положим в этой формуле $x = s = 0$, то все члены формулы обратятся в нуль.

Чтобы получить асимптотическое поведение функции $\rho_1(\mu)$, необходимо провести дальнейшее исследование.

Продолжим функцию $q(x)$ на отрицательную полуось четно и пусть функция $w(x, s; t)$ строится по функции $q(x)$ (продолженной на всю ось). Дифференцируя равенство (2.7′) по x, мы получим:

$$\psi'(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}\,[\psi'(x + t; \lambda) + \psi'(x - t; \lambda)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,[w(x, x + t; t)\,\psi(x + t; \lambda) - w(x, x - t; t)\,\psi(x - t; \lambda)] + \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w}{\partial x}\,\psi(s, \lambda)\,ds.$$

Из определения функции $w(x, s; t)$ через функцию Римана следует, что

$$w(x, x \pm t; t) = 0.$$

Поэтому

$$\psi'(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}\,[\psi'_x(x + t; \lambda) + \psi'_x(x - t; \lambda)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w}{\partial x}\,\psi(s, \lambda)\,ds. \tag{5.3}$$

Пусть $g_\varepsilon(t)$ имеет то же значение, что и прежде. Помножим обе части равенства (5.3) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t. Мы получим:

$$\psi'(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \psi'_t(x + t; \lambda)\,g_\varepsilon(t)\,dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \psi'_t(x - t; \lambda) g_\varepsilon(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)\left[\int_{x-t}^{x-t} \frac{\partial w}{\partial x}\,\psi(s, \lambda)\,ds\right]dt. \tag{5.4}$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$\int_0^\varepsilon \psi_t'(x+t;\lambda)\,g_\varepsilon(t)\,dt = -\psi(x;\lambda)\,g_\varepsilon(0) - \int_0^\varepsilon \psi(x+t;\lambda)g_\varepsilon'(t)\,dt,$$

$$\int_0^\varepsilon \psi_t'(x-t;\lambda)\,g_\varepsilon(t)\,dt = -\psi(x;\lambda)\,g_\varepsilon(0) - \int_0^\varepsilon \psi(x-t;\lambda)g_\varepsilon'(t)\,dt.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \psi_t'(x+t;\lambda)\,g_\varepsilon(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \psi_t'(x-t;\lambda)\,g_\varepsilon(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \psi(x+t;\lambda)\,g_t'(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \psi(x-t;\lambda)g_\varepsilon'(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_x^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x)\,ds - \frac{1}{2}\int_x^{x-\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(x-s)\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\int_x^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x)\,ds + \int_{x-\varepsilon}^{x} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x)\,ds\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x)\,ds.$$

Таким образом, из формулы (5.4) следует:

$$\psi'(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}) = -\frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,\chi_\varepsilon(x,s)\,ds, \quad (5.5)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x,s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x}\,g_\varepsilon(t)\,dt.$$

Заменяя в формуле (5.5) $g_\varepsilon(t)$ на $g_\varepsilon(t,a)$, получим:

$$\frac{1}{2}\psi'(x,\lambda)\,[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,g_\varepsilon'(s-x;a)\,ls + \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \psi(s,\lambda)\,\chi_\varepsilon(x,s;a)\,ds. \quad (5.6)$$

Пользуясь формулами (5.5) и (5.6), докажем две важные леммы.

ЛЕММА 5.1. *Обозначим через* x_0 *и* t_0 *произвольные положительные числа. Существует константа* $C = C(x_0, t_0)$ *такая, что если* $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant x \leqslant s_0$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, *то*

$$\int_{-\infty}^{0} |\psi'(x,\lambda)\,\psi'(s,\lambda)| \cos h\sqrt{|\lambda|}\,t\,d\rho(\lambda) < C.$$

Доказательство. Пользуясь равенством Парсеваля, получим из равенства (5.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi'(x,\lambda)]^2\psi_\varepsilon^2(\sqrt{\lambda})\,d\rho(\lambda)=\frac{1}{4}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[-g_\varepsilon'(s-x)+\chi_\varepsilon(x,s)]^2\,ds.$$

В дальнейшем доказательство проводится так же, как и в случае леммы 3.1 работы ([3]).

ЛЕММА 5.2. *Обозначим через x_0 произвольное положительное число. Существует константа $C=C(x_0)$ такая, что если $0\leqslant x\leqslant x_0$, то*

$$\int_{a}^{a+1}[\psi'(x,\mu^2)]^2\,d\rho_1(\mu)<Ca^2.$$

Доказательство. Применяя к равенству (5.6) равенство Парсеваля, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]^2[\psi'(x,\lambda)]^2\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[-g_\varepsilon'(s-x;a)+\chi_\varepsilon(x,s;a)]^2\,ds.$$

Правая часть последнего равенства есть $O(a^2)$. Доказательство заканчивается так же, как и в случае леммы 3.2 работы ([3]).

2. Пусть $f(s)\in L_2(0,\infty)$. Обозначим через $F(\lambda)$ преобразование Фурье функции $f(s)$. На основании равенства Парсеваля, из (5.6) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,\psi'(x,\lambda)\,d\rho(\lambda)=$$

$$=-\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\,g_\varepsilon'(s-x,a)\,ds+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\,\chi_\varepsilon(x,s;a)\,ds.$$

В силу произвольности функции $f(s)$, из последнего равенства выводим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(x,\lambda)\,\psi(s,\lambda)\,[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)]\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\begin{cases}-g_\varepsilon'(s-x;a)+\chi_\varepsilon(x,s;a), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

Пусть $s>x$. Дифференцируя по s, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(x,\lambda)\,\psi'(s,\lambda)\,[\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\,d\rho(\lambda)=$$

$$=\begin{cases}-g_\varepsilon''(s-x,a)-K(x,s)\,g_\varepsilon(s-x;a)+\displaystyle\int_{s-x}^{\varepsilon}L(x,s;t)\,g_\varepsilon(t,a)\,dt, & s-x\leqslant\varepsilon,\\ 0, & s-x\geqslant\varepsilon,\end{cases}\tag{5.7}$$

где

$$K(x, s) = \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{t=s-x}, \qquad L(x, s; t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}.$$

Формуле (5.7) можно придать вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \left[\frac{\partial^2 \theta_1(x, s; \mu)}{\partial x\, \partial s}\right] =$$

$$= \begin{cases} -g''(s-x; a) - K(x, s)\, g_\varepsilon(s-x, a) + \int\limits_{s-x}^{\varepsilon} L(x, s; t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt - \\ -2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda\left[\frac{\partial^2\theta(x, s; \lambda)}{\partial x \partial s}\right], & s - x \leqslant \varepsilon, \\ -2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda\left[\frac{\partial^2\theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s}\right], & s - x \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{5.8}$$

Если $q(x) = 0$, то

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}}, \quad \psi'(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x,$$

отрицательный спектр отсутствует и формула (5.8) принимает вид:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\cos\mu x\cos\mu s\, \mu^2\, d\mu = \begin{cases} -g_\varepsilon''(s-x; a), & s - x \leqslant \varepsilon, \\ 0, & s - x \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{5.9}$$

Вычитая из равенства (5.8) равенство (5.9), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu\, \Phi(x, s; \mu) =$$

$$= \begin{cases} -K(x, s)\, g(s-x, a) + \int\limits_{s-x}^{\varepsilon} L(x, s; t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt - \\ -2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda\left[\frac{\partial^2\theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s}\right], & s - x \leqslant \varepsilon, \\ -2\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda\left[\frac{\partial^2\theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s}\right], & s - x \geqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{5.10}$$

где

$$\Phi(x, s; \mu) = \frac{\partial^2\theta_1(x, s; \mu)}{\partial x\, \partial s} - \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \mu^2 \cos\mu x\cos\mu s\, d\mu.$$

Далее, в силу формулы обращения Фурье, имеем:

$$g_\varepsilon(s-x; a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)]\cos\mu(s-x)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\cos\mu(s-x)\, d\mu.$$

Поэтому из равенства (5.10) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi^*(x, s; \mu) =$$

$$= \begin{cases} \int_{s-x}^{\varepsilon} L(x, s; t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt - 2 \int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right] d_\lambda \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s} \right], & s - x \leqslant \varepsilon, \\ -2 \int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right] d_\lambda \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s} \right], & s - x \geqslant \varepsilon, \end{cases} \quad (5.11)$$

где

$$\Phi^*(x, s; \mu) = \Phi(x, s; \mu) + \frac{1}{\pi} K(x, s) \frac{\sin \mu (s - x)}{s - x}.$$

Дальнейшее преобразование формулы (5.11) проводится так же, как и в § 3. Положим

$$\alpha(x, s; \mu) = \int_{s-x}^{1} L(x, s; t) \cos \mu t\, dt,$$

$$\beta(x, s; \mu) = \int_0^1 h(x, s; t) \cos \mu t\, dt,$$

причем

$$h(x, s; t) = \int_{-\infty}^{0} \cos \sqrt{\lambda}\, t\, d_\lambda \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s; \lambda)}{\partial x\, \partial s} \right].$$

Формулу (5.11) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi^{**}(x, s; \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \quad (5.12)$$

где

$$\Phi^{**}(x, s; \mu) = \begin{cases} \Phi^*(x, s; \mu) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \alpha(x, s; \nu)\, d\nu + \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, s; \nu)\, d\nu, & s - x \leqslant \varepsilon, \\ \Phi^*(x, s; \mu) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, s; \nu)\, d\nu, & s - x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Из равенства (5.12) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\Phi^{**}(x, s; \mu)$ в интервале $(-1, 1)$ 4-эквивалентно нулю. Поэтому из теоремы 1.3.1 работы [2] следует, что

$$\Phi^{**}(x, s; \mu) = O(\mu^2). \quad (5.13)$$

Из оценки (5.33) легко получить оценку

$$\Phi(x, s; \mu) = O(\mu^2).$$

В частности, при $x = s = 0$ имеем:

$$\rho_1(\mu) - \frac{2}{3\pi}\mu^3 = O(\mu^2). \tag{5.14}$$

Асимптотическая формула для функции $\rho_1(\mu)$ в случае $h = \infty$ изучалась нами в работе (1). По существу там приведена формула (5.14). Однако вывод этой формулы в работе (1) содержит ошибку.

§ 6. Суммирование по Риссу спектральной функции

Результаты, полученные в § 3, позволяют изучить асимптотическое поведение средних по Риссу спектральной функции. Мы рассмотрим случай всей прямой. Случай полупрямой, а также случай конечного интервала изучаются аналогично.

В силу равенства (3.5), преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\Phi^*(x, s; \mu)$, определенной по равенству (3.4), в интервале $(-1,1)$ 2-эквивалентно нулю.

Поэтому из теоремы 1.4.2 работы (2) следуют оценки:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_\nu\, \Phi^*(x, s; \nu)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{\mu^2}, & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \dfrac{C}{\mu}, & \text{если } \quad \lambda \geqslant 1, \end{cases} \tag{6.1}$$

причем константа C зависит от области изменения точки (x, s).

Пользуясь оценкой (6.1), нетрудно получить асимптотическое поведение при $\mu \to \infty$ интеграла

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\nu d_\nu\, \Phi_1(x, s; \nu).$$

В самом деле, в силу формулы (3.4), имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_\nu\, \Phi^*(x, s; \nu) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_\nu\, \theta_1(x, s; \nu) -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \cos\nu(x-s)\,d\nu - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \alpha(x, s; \nu)\,d\nu +$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \beta(x, s; \nu)\,d\nu = I_1 - I_2 + I_3.$$

В силу известной формулы [см. (6), стр. 234],

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \cos\nu t\,d\nu = \sqrt{\pi}\,\mu 2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}. \tag{6.2}$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \cos\nu(x-s)\,d\nu =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mu 2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}[\mu(x-s)]}{[\mu(x-s)]^{\lambda+\frac{1}{2}}}, \tag{6.3}$$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda} \alpha(x, s; \nu)\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{|x-s|}^{1} w(x, t, s) \left[\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda} \cos \nu t\, d\nu\right] dt =$$

$$= \mu \frac{2^{\lambda - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{|x-s|}^{1} w(x, t, s) \frac{I_{\lambda - \frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt.$$

Из оценки (2.5) следует:

$$|I_1| \leqslant C\mu \int_0^1 t^{\alpha} \frac{\left|I_{\lambda + \frac{1}{2}}(\mu t)\right|}{(\mu t)^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt = \frac{C}{\mu^{\alpha}} \int_0^{\mu} t^{\alpha} \frac{\left|I_{\lambda + \frac{1}{2}}(t)\right|}{t^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\mu^2} \left[\int_0^1 dt + \int_1^{\mu} \frac{dt}{t^{\lambda + 1 - \alpha}}\right] \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{\mu^{\gamma}}, & \gamma = \min(\alpha, \lambda), \quad \alpha \neq \lambda, \\ \dfrac{C \ln \mu}{\mu^{\alpha}}, & \alpha = \lambda. \end{cases} \tag{6.4}$$

Далее, имеем:

$$I_3 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda} \beta(x, s; \nu)\, d\nu =$$

$$= \frac{2^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mu \int_0^1 h(x, s; t) \frac{I_{\lambda + \frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt =$$

$$= \frac{2^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mu \theta(x, s; -\infty) \int_0^{\mu} \frac{I_{\lambda + \frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt + \int_0^1 O(t) \frac{I_{\lambda + \frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt =$$

$$= -\frac{2^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \theta(x, s; -\infty) \int_0^{\infty} \frac{I_{\lambda + \frac{1}{2}}(t)}{t^{\lambda + \frac{1}{2}}}\, dt + o(1). \tag{6.5}$$

Из формул (6.2), (6.3), (6.4) и (6.5) следует:

$$\lim_{\mu \to \infty} \left[\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda} d_{\nu} \theta_1(x, s; \nu) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \frac{I_{\lambda + \frac{1}{2}}[\mu(x-s)]}{[\mu(x-s)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \theta(x, s; -\infty). \tag{6.6}$$

Нетрудно также оценить остаток в формуле (6.6).

§ 7. Разложение по собственным функциям

1. Формула (2.18) и теорема 1.1 позволяют дать более простой и более полный вывод теоремы о равной сходимости разложения в обобщенный интеграл Фурье и разложения в обычный интеграл Фурье.

Рассмотрим случай всей прямой. Случай полупрямой и случай конечного интервала изучаются аналогично.

Займемся сначала преобразованием правой части формулы (2.18). Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x, t: s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt\right] ds =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t,a)\left[\int_{x-t}^{x+t} w(x,\ t;\ s)\, f(s)\, ds\right] dt.$$

Положим

$$h(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} w(x, t; s)\, f(s)\, ds,$$

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^1 h(x, t)\cos\mu t\, dt.$$

Из равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье следует:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\,\alpha(x, \mu)\, d\mu = \frac{\pi}{2}\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, h(x, t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)\left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon} w(x, t; s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt\right] ds. \tag{7.1}$$

Далее, имеем (в результате перемены порядка интегрирования):

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right] d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\, f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, k(x, t)\, dt,$$

где

$$k(x, t) = \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, s; \lambda)\, f(s)\, ds.$$

Положим

$$\beta(x, \mu) = \int_0^1 k(x, t)\cos\mu t\, dt.$$

Из равенства Парсеваля следует:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\,\beta(x, \mu)\, d\mu = \frac{\pi}{2}\int_0^{\varepsilon} k(x, t)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt. \tag{7.2}$$

Из (2.18), (7.1) и (7.2) выводим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R^*(x, \mu) = 0 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \tag{7.3}$$

где

$$R^*(x, \mu) = R(x, \mu) - \frac{1}{\pi}\int_0^\mu \alpha(x, \nu)\, d\nu + \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \beta(x, \nu)\, d\nu. \tag{7.4}$$

ЛЕММА 7.1. *При каждых фиксированных x и ν*

$$\lim_{\mu\to\infty} [R^*(x, \mu + \nu) - R^*(x, \mu)] = 0. \tag{7.5}$$

При фиксированном ν равенство (7.5) *имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x.*

Доказательство. Достаточно доказать равенство, аналогичное равенству (7.5), для каждого слагаемого правой части равенства (7.4) в отдельности. Мы имеем:

$$R(x, \mu) = S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu).$$

На основании неравенства Коши — Буняковского и равенства Парсеваля, находим:

$$|S_1(x; \mu + \nu) - S_1(x; \mu)| =$$
$$= \Big| \int_\mu^{\mu+\nu} \{E(t)\varphi(x, t^2)\, d\xi(t) + [E(t)\psi(x, t^2) + F(t)\varphi(x, t^2)]\, d\eta(t) +$$
$$+ \psi(x, t^2) F(t)\, d\zeta(t)\} \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int_\mu^{\mu+\nu} E^2(t)\, d\xi(t) + 2E(t)F(t)\, d\eta(t) + F^2(t)\, d\zeta(t) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \{\theta(x, x; \mu + \nu) - \theta(x, x; \mu)\}^{\frac{1}{2}} = o(1),$$

и аналогично для $S_1^*(x, \mu)$. Далее, имеем:

$$\Big| \int_0^{\mu+\nu} \alpha(x, t)\, dt - \int_0^\mu \alpha(x, t)\, dt \Big| = \Big| \int_\mu^{\mu+} \alpha(x, t)\, dt \Big| = o(1)$$

и аналогично для интеграла с $\beta(x, \nu)$. Таким образом, лемма полностью доказана. Из доказанной леммы и теоремы 1.1 непосредственно следует

ЛЕММА 7.2. *При каждом фиксированном x*

$$\lim_{\mu\to\infty} R^*(x, \mu) = 0. \tag{7.6}$$

Равенство (7.6) *имеет место равномерно в каждом конечном интервале изменения x.*

2. Чтобы доказать теорему о равной сходимости, остается исследовать поведение функций

$$\int_0^\mu \alpha(x, \nu)\, d\nu, \quad \int_0^\mu \beta(x, \nu)\, d\nu$$

при $\mu \to \infty$.

ЛЕММА 7.3. *Пусть коэффициент $q(x)$ суммируем в каждом конечном интервале. При каждом фиксированном x*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\alpha(x,\nu)\,d\nu = 0. \tag{7.7}$$

Равенство (7.7) *имеет место равномерно в каждом конечном интервале.*

Доказательство. Мы имеем:

$$\int_0^{\mu}\alpha(x,\nu)\,d\nu = \int_0^1 h(x,t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt.$$

Далее, из оценки [см. ([3])] $|w(x,t;s)|\leqslant C$ следует:

$$h(x,t)\leqslant \int_{x-t}^{x+t}|w(x,t;s)|\,|f(s)|\,ds\leqslant C\int_{x-t}^{x+t}|f(s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x-t}^{x+t}ds\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ct^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8}$$

Обозначим через η произвольное положительное число и положим

$$I=\int_0^1 h(x,t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt=\int_0^{\eta} h(x,t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt+\int_{\eta}^1 h(x,t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt = I'+I''.$$

В силу оценки (7.8),

$$|I'|\leqslant C\int_0^{\eta}\frac{dt}{\sqrt{t}} = C\eta^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, каково бы ни было число $\zeta>0$, можно подобрать число η столь малым, что для всех μ будет выполняться неравенство

$$|I'|<\frac{\zeta}{2}. \tag{7.9}$$

Выбрав η, возьмем затем число μ_0 настолько большим, чтобы для всех $\mu>\mu_0$ выполнялось неравенство *

$$|I''|<\frac{\zeta}{2}, \tag{7.10}$$

что возможно на основании леммы Римана. Из оценок (7.9) и (7.10) и произвольности числа ζ следует равенство (7.7).

ЛЕММА 7.4. *При каждом фиксированном x*

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\beta(x,\nu)\,d\nu = -S(x;-\infty). \tag{7.11}$$

Равенство (7.11) *имеет место равномерно в каждом конечном интервале.*

Доказательство. Функция $k(x,t)$ по t аналитична (в частности дифференцируема). Поэтому из известной теоремы теории рядов Фурье

* Из доказательства леммы Римана следует, что оценка (7.10) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\beta(x, \nu)\,d\nu=\lim_{\mu\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{1}k(x, t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt=$$
$$=k(x, 0)=-S(x; -\infty),$$

что и требовалось доказать *.

Из лемм 7.2, 7.3 и 7.4 следует

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ есть суммируемая функция в каждом конечном интервале и $f(x)\in L_2(-\infty, \infty)$. Равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\theta_1(x, s; \mu)\,ds-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\frac{\sin\mu(x-s)}{x-s}\,ds\right]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\theta(x, s; -\infty)\,ds,$$

т. е. разность между разложением в обобщенный интеграл Фурье и разложением в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

§ 8. Суммирование по Риссу разложения по собственным функциям

Результаты предыдущего параграфа позволяют также изучить более просто и более полно, чем это сделано в работе ([3]), суммирование по Риссу разложения в обобщенный интеграл Фурье.

Из теоремы 1. 4. 2 работы ([2]) следует, что

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda}d_{\nu}R^{*}(x, \nu)\right|<\frac{C}{\mu^{\lambda}}\qquad(0<\lambda\leqslant 1),$$

где константа C зависит от интервала изменения x и от μ не зависит. Поэтому, чтобы оценить

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda}d_{\nu}\,R(x, \nu),$$

мы должны оценить интегралы

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda}\alpha(x, \nu)\,d\nu,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\lambda}\beta(x, \nu)\,d\nu.$$

---

* То, что равенство (7.11) имеет место равномерно в каждом конечном интервале, следует из ограниченности функции $\frac{\partial k(x, t)}{\partial t}$.

Начнем с первого интеграла. Мы имеем:

$$I = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \alpha(x, \nu)\, d\nu =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \int_0^1 h(x, t) \frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt.$$

Предположим, что выполняется оценка (2.5). Тогда

$$|h(x, t)| \leqslant Ct^\alpha \int_{x-t}^{x+t} |f(s)|\, ds < Ct^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$|I| \leqslant \frac{C}{\mu^{\alpha+\frac{1}{2}}} \int_0^\mu t^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{|I_{\lambda+\frac{1}{2}}(t)|}{t^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\mu^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left[\int_0^1 dt + \int_1^\mu \frac{dt}{t^{\lambda-\alpha+\frac{1}{2}}}\right] \leqslant \frac{C_1}{\mu^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{C_2}{\mu^\lambda}. \qquad (8.1)$$

Далее, имеем:

$$k(x, t) = k(x, 0) + O(t) = -S(x, -\infty) + O(t).$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda \beta(x, \nu)\, d\nu =$$

$$= \frac{2^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mu \int_0^1 k(x, t) \frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt + \int_2^1 O(t) \frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}(\mu t)}{(\mu t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt =$$

$$= -\frac{2^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} S(x; -\infty) \int_0^\infty \frac{I_{\lambda+\frac{1}{2}}(t)}{t^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt + O\left(\frac{1}{\mu^\lambda}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} S(x; -\infty) + O\left(\frac{1}{\mu^\lambda}\right). \qquad (8.2)$$

Из (8.1) и (8.2) следует

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ есть суммируемая функция в каждом конечном интервале и пусть выполняется условие* (2.5). *Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Тогда*

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^\lambda d_\nu R(x, \nu) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} S(x; -\infty) + O\left(\frac{1}{\mu^\tau}\right), \qquad (8.3)$$

где $\tau = \min\left\{\lambda, \alpha + \frac{1}{2}\right\}$. *Равенство* (8.3) *имеет место равномерно в каждом конечном интервале.*

Поступило
30.X.1953.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., т. 16 (1952), 325—352.

[2] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Мат. сборник, т. 35 (77): 2 (1954), 267—316.

[3] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., т. 17 (1953), 331—364.

[4] Левитан Б. М., О спектральной функции уравнения $y'' + \{\lambda - q(x)\} = 0$, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., т. 17 (1953), 473—484.

[5] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М. — Л., 1950.

[6] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 59—68

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и В. И. СОБОЛЕВ

УСЛОВИЯ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе найдены необходимые и достаточные условия сепарабельности пространств Орлича. В частности, показано, что пространства Орлича всегда несепарабельны, если они определены при помощи функций, растущих быстрее любой степенной.

§ 1

1. Вещественную непрерывную выпуклую функцию $M(u)$ вещественного переменного $u \in (-\infty, \infty)$ называют [см. [1] — [3]] N'-функцией, если выполняются условия:

1°. $M(0)=0,\ M(-u)=M(u)>0$ при $u \neq 0$;

2°. $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$;

3°. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$.

Каждая N'-функция однозначно представима в виде

$$M(u)=\int_0^{|u|} p(t)\,dt, \tag{1}$$

где $p(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция, удовлетворяющая условиям:

а) $p(+0)=0,\quad p(t)>0$ при $t>0$,

б) $p(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Пусть $q(s)$ — функция, определенная равенством

$$q(s)=\sup_{p(t)\leqslant s} t.$$

В случае, когда $p(t)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то

$$q(s)=p^{(-1)}(s),\quad q[p(t)]=t,$$

где через $p^{(-1)}(s)$ обозначена функция, обратная к $p(t)$.

Легко видеть, что функция $q(s)$ удовлетворяет условиям а) и б) и что функция

$$N(v)=\int_0^{|v|} q(s)\,ds$$

есть также N'-функция. Эту N'-функцию называют дополнительной к $M(u)$.

Справедливо так называемое неравенство Юнга [см., например, ([2])]

$$uv \leqslant M(u) + N(v),$$

которое переходит в точное равенство, когда

$$v = p(|u|) \operatorname{sign} u.$$

2. Говорят, что N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших u, если существует такая постоянная $k > 0$, что

$$M(2u) \leqslant kM(u) \quad (u \geqslant 1). \tag{2}$$

Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, начиная с единицы, то легко убедиться, что она удовлетворяет Δ_2-условию, начиная с любого u_0 (может быть, с другой постоянной k).

Будем также говорить, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при малых u, если можно указать такое $k > 0$, что неравенство (2) выполняется при $u \leqslant 1$.

Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших и при малых u, то будем говорить, что она удовлетворяет Δ_2-условию всюду.

Отметим, что требование выполнения Δ_2-условия является существенным ограничением, так как функция $M(u)$, удовлетворяющая Δ_2-условию при больших u, растет медленнее некоторой степенной функции [см. ([3])]:

$$M(u) \leqslant kM(1)\,|u|^{\ln_2 k} \quad (u \geqslant 1).$$

Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при малых u, то выполняется неравенство

$$M(u) \geqslant \frac{M(1)}{k}\,|u|^{\ln_2 k} \quad (u \leqslant 1).$$

Действительно, если $2^{r-1} \leqslant \frac{1}{|u|} \leqslant 2^r$, то, в силу (2),

$$M(1) \leqslant M(2^r u) \leqslant k^r M(u) \leqslant (2^{r-1})^{\ln_2 k} kM(u) \leqslant \frac{kM(u)}{|u|^{\ln_2 k}}.$$

3. Примерами N'-функций могут служить функции:

$$M_1(u) = \frac{|u|^p}{p} \quad (p > 1), \quad M_2(u) = |u|^p \ln(|u| + 1) \quad (p > 1),$$

$$M_3(u) = e^{|u|} - |u| - 1, \quad M_4(u) = e^{u^2} - 1.$$

Функциями, дополнительными к $M_1(u)$ и $M_3(u)$, соответственно, будут

$$N_1(u) = \frac{|u|^q}{q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \quad N_3(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|.$$

Для функций $N_2(u)$ и $N_4(u)$ явное выражение найти не удается. Можно доказать, что функции $M_1(u)$ и $N_1(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию всюду, функции $M_2(u)$, $N_2(u)$, $N_3(u)$, $N_4(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию при больших u, а функции $M_3(u)$, $M_4(u)$ Δ_2-условию при больших u не удовлетворяют.

4. Пусть G — замкнутое множество конечной или бесконечной меры конечномерного эвклидова пространства. Через $L_M(G)$ обозначим класс измеримых на G вещественных функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_G M[u(x)]\,dx < \infty.$$

Класс L_M называют классом Орлича [см. (1), (6), (7)].

Рассмотрим совокупность всех вещественных функций $u(x)$, измеримых на G, для которых

$$\int_G u(x)\,v(x)\,dx < \infty$$

при любой функции $v(x) \in L_N$. Эта совокупность обращается в линейное нормированное полное пространство $\overset{*}{L}_M$ [для случая $\operatorname{mes} G < \infty$ см. (2), (7)], если определить норму функции $u(x) \in \overset{*}{L}_M$ равенством

$$\|u(x)\| = \sup_{\int_G N[v(x)]\,dx \leqslant 1} \int_G u(x)\,v(x)\,dx.$$

При этом функции, отличные друг от друга на множестве меры нуль, считаются неразличимыми. Пространство $\overset{*}{L}_M$ называют пространством Орлича. В силу неравенства Юнга справедливо включение $L_M \subset \overset{*}{L}_M$.

Пространства Орлича, как оказывается [см. (3), (4)], играют существенную роль при исследовании интегральных уравнений с существенно нестепенными (например, экспоненциальными) нелинейностями. Исследование таких уравнений было бы значительно проще, если бы удалось построить в этих пространствах базис или, по крайней мере, доказать, что эти пространства сепарабельны. В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия сепарабельности пространств Орлича.

5. Ниже мы будем рассматривать пространства Орлича функций, заданных либо на конечном отрезке, либо на всей бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$. При этом общность рассмотрений не теряется. Это следует из того, что пространство $\overset{*}{L}_M(G)$ линейно-изометрично пространству

$$\overset{*}{L}_M\left[\left(-\frac{\operatorname{mes} G}{2}, \quad \frac{\operatorname{mes} G}{2}\right)\right],$$

т. е. между элементами пространств

$$\overset{*}{L}_M\left[\left(-\frac{\operatorname{mes} G}{2}, \frac{\operatorname{mes} G}{2}\right)\right] \quad \text{и} \quad \overset{*}{L}_M(G)$$

существует линейное взаимно однозначное соответствие, при котором нормы сохраняются.

Ради простоты изложения мы покажем это здесь для случая, когда G — ограниченное множество, лежащее в плоскости с декартовой системой координат (ξ_1, ξ_2).

Заключим множество G в некоторый квадрат $B_0(|\xi_1| \leqslant b, \ |\xi_2| \leqslant b)$. Рассмотрим последовательность разбиений T_n квадрата B_0 на 4^n квадра-

тов B_n^k $(k=1,2,\ldots,4^n)$ прямыми

$$\xi_1 = \frac{b}{2^{n-1}} i \text{ и } \xi_2 = \frac{b}{2^{n-1}} j \qquad (i,\ j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^{n-1}).$$

При переходе от разбиения T_n к разбиению T_{n+1}, очевидно, каждый квадрат разбиения T_n разбивается на четыре равных квадрата разбиения T_{n+1}.

Построим отображение совокупности квадратов всех разбиений T_n на совокупность некоторых отрезков — частей отрезка $I_0 = \left[-\frac{\operatorname{mes} G}{2}, \frac{\operatorname{mes} G}{2}\right]$, при котором длина отрезка I_n^k — образа квадрата B_n^k — равна $\operatorname{mes}(G \cap B_n^k)$. Пусть квадрату B_0 соответствует весь отрезок I_0. Пусть некоторому квадрату B_n^k разбиения T_n соответствует отрезок $[\alpha, \beta] \subset I_0$. Перенумеруем четыре квадрата разбиения T_{n+1}, из которых состоит B_n^k, так, как нумеруются квадранты в аналитической геометрии, и обозначим их через B^{I}, B^{II}, B^{III}, B^{IV}. Отрезок $[\alpha, \beta]$ разобьем точками $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, где $\alpha \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \leqslant \gamma_3 \leqslant \beta$, на четыре части так, что

$$\gamma_1 - \alpha = \operatorname{mes}(G \cap B^{\mathrm{I}}), \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \operatorname{mes}(G \cap B^{\mathrm{II}}),$$
$$\gamma_3 - \gamma_2 = \operatorname{mes}(G \cap B^{\mathrm{III}}), \quad \beta - \gamma_3 = \operatorname{mes}(G \cap B^{\mathrm{IV}}).$$

Квадратам B^{I}, B^{II}, B^{III} и B^{IV} отнесем, соответственно, отрезки $[\alpha, \gamma_1]$, $[\gamma_1, \gamma_2]$, $[\gamma_2, \gamma_3]$ и $[\gamma_3, \beta]$.

Всякому множеству $P \subset G$ отнесем множество $Q \subset I_0$, состоящее из точек, определяемых системами стягивающихся отрезков, которые соответствуют системам квадратов (разбиений T_n), стягивающихся к точкам множества P. При этом отображении мера множеств сохраняется (это становится ясным, если заметить, что образ совокупности сторон квадратов всех разбиений T_n имеет меру нуль). Если через G_1 обозначить множество точек $x \in G$, любая окрестность которых содержит часть множества G положительной меры и которые не лежат на сторонах квадратов разбиений T_n, то

$$\operatorname{mes} G_1 = \operatorname{mes} G,$$

и построенное выше отображение $\varkappa$ множества G на отрезок I_0 будет взаимно однозначным на G_1. Образ множества G_1 будем обозначать через Q_1.

Так как функции, принадлежащие пространству Орлича, определяются с точностью до множества меры нуль, то можно считать, что все они равны нулю на $G \setminus G_1$. Поставим в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in L_M^*(G)$ функцию $\tilde{\varphi}(t)$ $(t \in I_0)$, определяемую равенством

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad t = \varkappa(x) \in Q_1, \\ 0 & \text{при} \quad t \bar{\in} Q_1. \end{cases}$$

Это соответствие, очевидно, линейно. Так как при отображении $\varkappa$ мера множеств сохраняется, то функции из $L_M^*(G)$ переходят с сохранением нормы в функции из пространства $L_M^*\left[\left(-\frac{\operatorname{mes} G}{2}, \frac{\operatorname{mes} G}{2}\right)\right]$.

§ 2

1. В этом параграфе будем рассматривать пространство L_M^* функций, заданных на отрезке $[0,1]$.

Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших u, то

$L_M^* = L_M$ и сходимость по норме в L_M^* последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u_0(x)$ эквивалентна [см. (7)] сходимости в среднем с функцией $M(u)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 M[u_n(x)-u_0(x)]\,dx = 0.$$

Так как сепарабельность L_M в смысле сходимости в среднем с функцией $M(u)$ очевидна, то пространство L_M^* сепарабельно, если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших u.

2. ТЕОРЕМА 1. *Если функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию при больших u, то пространство Орлича L_M^* несепарабельно.*

Для доказательства этой теоремы будет сконструировано континуальное множество функций $\varphi_\alpha(x)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, принадлежащих пространству L_M^*, таких, что при $\alpha \neq \beta$

$$\|\varphi_\alpha(x)-\varphi_\beta(x)\| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Эта конструкция использует некоторые идеи статьи (3).

Так как функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то найдется такая последовательность положительных чисел

$$u_1<u_2<\cdots<u_n<\cdots\to+\infty,$$

что

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Построим на [0,1] последовательность непересекающихся отрезков δ_n, расположенных в порядке возрастания номеров слева направо, длины которых определяются равенством

$$\operatorname{mes}\delta_n = \frac{M(u_1)}{2^n M(u_n)} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Такое построение возможно, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{mes}\delta_n < 1.$$

Пусть, кроме того, единица есть предельная точка для $\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_n$.

Определим на [0,1] функцию $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 2u_n & \text{при } x\in\delta_n \quad (n=1,2,\ldots),\\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_n. \end{cases}$$

Функция $u(x)$ принадлежит L_M^*, так как $\frac{1}{2}u(x)\in L_M$:

$$\int_0^1 M\left[\frac{1}{2}u(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\delta_n} M(u_n)\,dx = M(u_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty.$$

Пусть для всех $0<\alpha\leqslant 1$ функции $\varphi_\alpha(x)$ определены равенством

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} u(x+1-\alpha) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ u(x-\alpha) & \text{при} \quad \alpha < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Все функции принадлежат $\overset{\bullet}{L}_M$.

Рассмотрим две функции $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$, где $\alpha < \beta$.

Функция $\varphi_\beta(x)$ на отрезке $[0, \alpha]$ ограничена по построению. Пусть

$$|\varphi_\beta(x)| = \varphi_\beta(x) \leqslant A \quad (0 \leqslant x \leqslant \alpha).$$

Тогда можно указать такое положительное число $\eta < \alpha$, что

$$\|\varphi_\beta(x) \cdot \varkappa_\eta(x)\| < \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где $\varkappa_\eta(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha - \eta, \alpha]$. Действительно, так как норма характеристической функции любого множества P равна

$$\operatorname{mes} P \cdot N^{(-1)}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} P}\right),$$

то

$$\|\varphi_\beta(x)\varkappa_\eta(x)\| \leqslant A\|\varkappa_\eta(x)\| = A\eta N^{(-1)}\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

При этом, в силу свойства 3° N'-функции $N(u)$,

$$\lim_{\eta\to 0}\|\varphi_\beta(x)\varkappa_\eta(x)\| \leqslant A \lim_{\eta\to 0}\left[\eta N^{(-1)}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right] = A \lim_{\zeta\to 0}\frac{\zeta}{N(\zeta)} = 0.$$

Оценим снизу норму функции $\varphi_\alpha(x)\varkappa_\eta(x)$. Очевидно, эта норма равна норме функции $u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)$, где $\hat{\varkappa}_\eta(x)$ — характеристическая функция отрезка $[1-\eta, 1]$.

Введем в рассмотрение множества

$$F_n = [1-\eta, 1] \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i\right).$$

Характеристические функции этих множеств будем обозначать через $\varkappa_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. На каждом из множеств F_n функция $u(x)$ ограничена, так что функции $v_n(x) = p[u(x)\varkappa_n(x)]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тоже ограничены и, тем более, принадлежат классу L_N. Так как для произведения $u(x)v_n(x)$ при $x \in F_n$ неравенство Юнга переходит в равенство, то

$$\int_0^1 u(x)v_n(x)\,dx = \int_{F_n} M[u(x)]\,dx + \int_0^1 N[v_n(x)]\,dx. \tag{5}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[v_n(x)]\,dx > 1. \tag{6}$$

Действительно, если бы при всех $n = 1, 2, \ldots$ было справедливо неравенство

$$\int_0^1 N[v_n(x)\,dx \leqslant 1,$$

то функция $u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)$ принадлежала бы L_M, так как

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)]\,dx \leqslant \sup_{n=1,2,\dots}\left\{\int_{F_n} M[u(x)]\,dx + \int_{F_n} N[v_n(x)]\,dx\right\} =$$

$$= \sup_{n=1,2,\dots}\int_0^1 u(x)\,v_n(x)\,dx \leqslant \sup_{\int_0^1 N[v(x)]dx\leqslant 1}\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx = \|u\| < \infty,$$

что является противоречием, ибо

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)]\,dx = \int_0^1 M[u(x)]\,dx - \int_0^{1-\eta} M[u(x)]\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(2u_n)\cdot M(1)}{2^n M(u_n)} - \sup_{x\leqslant 1-\eta} M[u(x)] = \infty.$$

В силу (6), найдется такое n_0, что

$$\int_0^1 N[v_{n_0}(x)]\,dx = \rho > 1.$$

Тогда из неравенства Иенсена [см. ([5]), ([7])] вытекает, что

$$\int_0^1 N\left[\frac{v_{n_0}(x)}{\rho}\right]dx \leqslant 1.$$

Таким образом, для $\|u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)\|$ справедлива оценка:

$$\|u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)\| = \sup_{\int_0^1 N[v(x)]\,dx\leqslant 1}\int_0^1 u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)\,v(x)\,dx \geqslant \int_0^1 u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)\frac{v_{n_0}(x)}{\rho}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{\int_{F_{n_0}} M[u(x)]\,dx + \int_0^1 N[v_{n_0}(x)]\,dx\right\} > 1. \qquad (7)$$

Перейдем к доказательству (3). В силу (4) и (7),

$$\|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x)\| \geqslant \|\varphi_\alpha(x)\varkappa_\eta(x)\| - \|\varphi_\beta(x)\varkappa_\eta(x)\| =$$
$$= \|u(x)\hat{\varkappa}_\eta(x)\| - \|\varphi_\beta(x)\varkappa_\eta(x)\| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

§ 3

В этом параграфе мы будем рассматривать пространство L_M^* функций, заданных на $(-\infty, \infty)$.

1. Пространство L_M^* {[0, 1]} можно рассматривать как подпространство пространства L_M^* [$(-\infty, \infty)$], если каждую функцию $\tilde{u}(x)$ из L_M^* {[0,1]} отождествлять с функцией $u(x)$ из L_M^* [$(-\infty, \infty)$],

равной $u(x)$ на $[0, 1]$ и равной нулю при $x \overline{\in} [0, 1]$. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что и пространство $L_M^*[(-\infty, \infty)]$ несепарабельно в случае, когда N'-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию при больших u.

Таким образом, остается исследовать только тот случай, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших u.

Пусть N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию всюду. Тогда пространство Орлича $L_M^* = L_M^*[(-\infty, \infty)]$ сепарабельно.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству сепарабельности $L_M^*\{[0, 1]\}$ в случае, когда N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших u.

2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть N'-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию при малых u. Тогда пространство $L_M^* = L_M^*[(-\infty, \infty)]$ несепарабельно.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, сконструируем семейство функций $\varphi_\alpha(x) \in L_M^*$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ таких, что

$$\|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x)\| \geqslant 1 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{8}$$

Так как $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию при малых u, то найдется такая последовательность

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots \to 0,$$

что

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Построим последовательность таких непересекающихся отрезков $I_n^0 = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $a_1 = 0$,

$$\delta_n = b_n - a_n = \frac{1}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

и

$$a_{n+1} - b_n = \frac{n}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Определим на $(-\infty, \infty)$ функции $\varphi_\alpha(x)$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ равенством:

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 2u_n & \text{при } x \in I_n^\alpha = [a_n + n\alpha\delta_n, b_n + n\alpha\delta_n], \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\alpha. \end{cases}$$

В силу (10),

$$I_n^\alpha \subset [a_n, a_{n+1}] \quad (0 \leqslant \alpha < 1, \quad n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что $u(x) = \varphi_0(x) \in L_M^*$, а следовательно, и все $\varphi_\alpha(x) \in L_M^*$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Рассмотрим две функции $\varphi_\alpha(x)$, $\varphi_\beta(x)$, где $\alpha < \beta$. Если $n_0 > \frac{1}{\beta - \alpha}$, то при $n \geqslant n_0$ отрезки I_n^α не пересекаются ни с одним из отрезков I_k^β $(k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, в силу (11), отрезок I_n^α может иметь общие точки только с отрезком I_n^β. Но при $n > n_0$ пересечение $I_n^\alpha \cap I_n^\beta$ пусто,

так как правый конец $b_n + \alpha n\delta_n$ отрезка I_n^α лежит левее левого конца $a_n + \beta n\delta_n$ отрезка I_n^β, ибо, в силу (9),

$$a_n + \beta n\delta_n - (b_n + \alpha n\delta_n) = n(\beta - \alpha)\delta_n - (b_n - a_n) > 0.$$

Через F_k обозначим $\bigcup_{i=n_0}^{n_0+k} I_i^\alpha$. Характеристическую функцию множества F_k будем обозначать через $\varkappa_k(x)$. Пусть

$$v_k(x) = p\,[\varphi_\alpha(x)\cdot\varkappa_k(x)].$$

Функции $v_k(x) \in L_N$, так как они ограничены и отличны от нуля только на ограниченном множестве.

Имеет место неравенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N[v_k(x)]\,dx > 1, \tag{12}$$

которое доказывается так же, как неравенство (6). Из (12) вытекает, что найдется такое k_0, что

$$\int_{F_{k_0}} N[v_{k_0}(x)]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} N[v_{k_0}(x)]\,dx = \rho > 1,$$

откуда, в силу неравенства Иенсена,

$$\int_{-\infty}^{\infty} N\left[\frac{v_{k_0}(x)}{\rho}\right] dx \leqslant 1.$$

Переходим к доказательству неравенства (8):

$$\| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x) \| = \sup_{\int_{-\infty}^{\infty} N[v(x)]\,dx \leqslant 1} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x)]\, v(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x)]\, \frac{v_{k_0}(x)}{\rho}\,dx = \frac{1}{\rho} \int_{F_{k_0}} \varphi_\alpha(x)\, v_{k_0}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{F_{k_0}} M[\varphi_\alpha(x)]\,dx + \int_{F_{k_0}} N[v_{k_0}(x)]\,dx \right\} > 1.$$

Теорема доказана.

Поступило
15. X. 1953.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939.

[3] Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., К теории пространств Орлича, Доклады Ак. наук СССР, 81, № 4 (1951), 497—500.

[4] Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича, Доклады Ак. наук СССР, 89, № 4 (1953), 601—604.

[5] Birnbaum Z. W., Orlicz W., Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Stud. Math., III (1931), 1—67.

[6] Orlicz W., Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B, Bull. international de l'Acad. Pol., sér. A, Cracovie, 1932.

[7] Jensen J. Z. W. V., Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,Acta Math., 30 (1906), 175—193.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 69—80

Р. Д. БАЧЕЛИС

О РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком* С. Л Соболевым)

В статье доказывается существование решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами, имеющего порядок роста в бесконечности не выше многочлена от координат узлов.

Разностным оператором мы будем называть оператор L, переводящий функцию $f(y_1, \ldots, y_k)$, заданную на k-мерной сетке, в функцию $Lf(y_1, \ldots, y_k)$, определяемую равенством:

$$Lf(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} f(y_1 - r_1; \ldots; y_k - r_k). \tag{1}$$

Разностным уравнением назовем уравнение вида:

$$Lf(y_1, \ldots, y_k) = \psi(y_1, \ldots, y_k), \tag{2}$$

где $\psi(y_1, \ldots, y_k)$ — заданная функция. Особый интерес представляет частный случай уравнения (2), когда

$$\psi(y_1, \ldots, y_k) = \begin{cases} 0 & (y_1^2 + \cdots + y_k^2 > 0), \\ 1 & (y_1^2 + \cdots + y_k^2 = 0). \end{cases} \tag{3}$$

Мы будем обращаться также к однородному уравнению

$$Lf(y_1, \ldots, y_k) = 0. \tag{4}$$

В работе Альфреда Штöра * дается метод нахождения частного решения уравнения (3), причем это решение имеет наименьший порядок роста в бесконечности по сравнению с другими решениями (3). Но этот метод применим не ко всякому оператору L, так как Штöр накладывает на L ряд ограничений.

В настоящей работе дан метод решения уравнения (3) для всех без-исключения операторов L, причем полученное решение возрастает в бесконечности не быстрее, чем некоторый многочлен от $y_1, \ldots, y_k$.

* См. Stöhr A., Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, Math. Nachr., Berlin, 1950, H. 4 (стр. 208—242), H. 5 (стр. 295—315), H. 6 (стр. 330—357).

Введем обозначение:

$$P(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k} \tag{5}$$

и составим формально

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\sum_{j=1}^{k} y_j u_j i} \, du_1 \ldots du_k}{P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})}. \tag{6}$$

Если интеграл (6) сходится, то, произведя подстановку, убедимся, что $\Phi(y_1, \ldots, y_k)$ является решением уравнения (3):

$$L\Phi(y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{-\sum_{j=1}^{k} (y_j - r_j) u_j i}}{\sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} e^{\sum_{j=1}^{k} r_j u_j i}} \, du_1 \ldots du_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{-\sum_{j=1}^{k} y_j u_j i} \, du_1 \ldots du_k = \begin{cases} 0 & (y_1^2 + \cdots + y_k^2 > 0), \\ 1 & (y_1^2 + \cdots + y_k^2 = 0). \end{cases}$$

Если интеграл (6) расходится, мы его «подправим». Предварительно докажем одну лемму.

ЛЕММА. *Пусть произвольно заданы:* 1) *оператор* L, *которому соответствует многочлен* (5); 2) *точка* $(x_1, \ldots, x_k) = (e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})$; 3) *целое положительное число* q; 4) *из* k *переменных* $u_1, \ldots, u_k$ *выбраны* k_1 $(1 \leqslant k_1 \leqslant k)$, *которые мы для простоты записи будем считать первыми из исходных* k *переменных. Вводя обозначение*

$$U_1 = u_1 + \Delta u_1; \ldots; \ U_{k_1} = u_{k_1} + \Delta u_{k_1},$$

можно представить $e^{-\sum_{j=1}^{k_1} y_j U_j i - \sum_{j=k_1+1}^{k} y_j u_j i}$ *в виде:*

$$e^{-\sum_{j=1}^{k_1} y_j U_j i - \sum_{j=k_1+1}^{k} y_j u_j i} = e^{-\sum_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot e^{-\sum_{j=1}^{k_1} y_j \Delta u_j i} =$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot P(e^{U_1 i} \ldots e^{U_{k_1} i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots e^{u_k i}) \, F(\Delta u_1; \ldots; \Delta u_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_1}) +$$

$$+ e^{-\sum_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot \sum_{0 < m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q} \cdots \sum G_{m_1 \ldots m_{k_1}}(y_1 \ldots y_{k_1}) \, \Delta u_1^{m_1} \ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}} +$$

$$+ o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} \Delta u_j^2}^{\,q+1}\right) \sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} y_j^2}^{\,q+1}; \tag{7}$$

где $F(\Delta u_1, \ldots, \Delta u_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_1})$ — *некоторый многочлен, а*

$$e^{-\sum\limits_{j=1} y_j u_j i} G_{m_1 \ldots m_{k_1}}(y_1, \ldots, y_{k_1})$$

является решением уравнения (4).

Доказательство. Представим неизвестный пока многочлен

$$F(\Delta u_1, \ldots, \Delta u_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_1})$$

в виде

$$F(\Delta u_1, \ldots, \Delta u_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_1}) = \sum_{0 \leqslant m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q} \cdots \sum F_{m_1 \ldots m_{k_1}} \Delta u_1^{m_1} \ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}},$$

где $F_{m_1 \ldots m_{k_1}}$ — многочлены от $y_1, \ldots, y_{k_1}$, отнесенные в коэффициенты. Разложим

$$P(e^{U_1 i} \ldots e^{U_{k_1} i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots e^{u_k i}) = P(e^{(u_1 + \Delta u_1) i} \ldots e^{(u_{k_1} + \Delta u_{k_1}) i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots e^{u_k i})$$

по формуле Тейлора до членов порядка q включительно (остаточный член для упрощения записи не выписываем):

$$P(e^{(u_1 + \Delta u_1)} \ldots e^{(u_{k_1} + \Delta u_{k_1}) i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots e^{u_k i_1}) =$$
$$= \sum_{0 \leqslant m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q} \cdots \sum \frac{1}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_{k_1}} P}{\partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_{k_1}^{m_{k_1}}} \Delta u_1^{m_1} \ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}}. \qquad (8)$$

Введем обозначение:

$$\frac{1}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_{k_1}} P}{\partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_{k_1}^{m_{k_1}}} =$$
$$= \frac{1}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} (r_1 i)^{m_1} \ldots (r_{k_1} i)^{m_{k_1}} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} = \beta_{m_1 \ldots m_{k_1}}. \qquad (9)$$

Тогда разложение (8) принимает вид:

$$P(e^{(u_1 + \Delta u_1) i} \ldots e^{(u_{k_1} + \Delta u_{k_1}) i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots e^{u_k i}) =$$
$$= \sum_{0 \leqslant m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q} \cdots \sum \beta_{m_1 \ldots m_{k_1}} \Delta u_1^{m_1} \ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}},$$

а произведение $e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot PF$, в котором мы берем только члены до порядка q включительно, выражается в форме

$$e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot PF = e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot$$
$$\cdot \sum_{0 \leqslant m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q} \cdots \sum \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} F_{m_1 - t_1, \ldots, m_{k_1} - t_{k_1}} \Delta u_1^{m_1} \ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}} +$$
$$+ o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta u_j^2}^{\,q+1}\right). \qquad (10)$$

Разложим в доказываемом равенстве (7) $e^{-\sum\limits_{j=1}^{k_1} y_j \Delta u_j i}$ по формуле Тейлора

и подставим туда выражение (10):

$$e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot \sum_{0<m_1+\cdots+m_{k_1}<q} \cdots \sum \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1!\ldots m_{k_1}!} y_1^{m_1}\ldots y_{k_1}^{m_{k_1}} \Delta u_1^{m_1}\ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}} =$$

$$= e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{0<m_1+\cdots+m_{k_1}<q} \cdots \sum \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1\ldots t_{k_1}} F_{m_1-t_1;\ldots;m_{k_1}-t_{k_1}} \Delta u_1^{m_1}\ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}} +$$

$$+ e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{0\leqslant m_1+\cdots+m_{k_1}<q} \cdots \sum G_{m_1\ldots m_{k_1}} \Delta u_1^{m_1}\ldots \Delta u_{k_1}^{m_{k_1}} + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} \Delta u_j^2}^{\,q+1}\right). \tag{11}$$

Следовательно, многочлен $G_{m_1\ldots m_{k_1}}(y_1,\ldots,y_{k_1})$ должен удовлетворять соотношению:

$$G_{m_1\ldots m_{k_1}}(y_1,\ldots,y_{k_1}) =$$
$$= \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1!\ldots m_{k_1}!} y_1^{m_1}\ldots y_{k_1}^{m_{k_1}} - \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1\ldots t_{k_1}} F_{m_1-t_1;\ldots;m_{k_1}-t_{k_1}}. \tag{12}$$

Так как $e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} G_{m_1\ldots m_{k_1}}$ является решением (4), то получим:

$$L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} G_{m_1\ldots m_{k_1}}(y_1\ldots y_{k_1})\right) = 0,$$

т. е.

$$L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1!\ldots m_{k_1}!} y_1^{m_1}\ldots y_{k_1}^{m_{k_1}} - \right.$$
$$\left. - e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1\ldots t_{k_1}} F_{m_1-t_1;\ldots;m_{k_1}-t_{k_1}}\right) = 0$$

или

$$L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1!\ldots m_{k_1}!} y_1^{m_1}\ldots y_{k_1}^{m_{k_1}}\right) =$$
$$= L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1\ldots t_{k_1}} F_{m_1-t_1;\ldots m_{k_1}-t_{k_1}}\right). \tag{13}$$

Преобразуем левую часть уравнения (13):

$$L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \cdot \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1!\ldots m_{k_1}!} y_1^{m_1}\ldots y_{k_1}^{m_{k_1}}\right) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i + \sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} \cdot \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \cdot$$

$$\cdot (y_1 - r_1)^{m_1} \ldots (y_{k_1} - r_{k_1})^{m_{k_1}} = e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \cdot \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \frac{(-r_1)^{t_1} \ldots (-r_{k_1})^{t_{k_1}}}{t_1! \ldots t_{k_1}!} \cdot \frac{\partial \left(y_1^{m_1} \ldots y_{k_1}^{m_{k_1}}\right)}{\partial y_1^{t_1} \ldots \partial y_{k_1}^{t_{k_1}}} =$$

$$= e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-i)^{m_1+\cdots+m_{k_1}}}{m_1! \ldots m_{k_1}!} \cdot \frac{(-r_1)^{t_1} \ldots (-r_{k_1})^{t_{k_1}}}{t_1! \ldots t_{k_1}!} \cdot \frac{m_1!}{(m_1 - t_1)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{m_{k_1}!}{(m_{k_1} - t_{k_1})\, i}\, y_1^{m_1 - t_1} \ldots y_{k_1}^{m_{k_1} - t_{k_2}} =$$

$$= e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \frac{1}{t_1! \ldots t_{k_1}!} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} \cdot$$

$$\cdot (r_1 i)^{t_1} \ldots (r_{k_1} i)^{t_{k_1}} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} \cdot \frac{(-y_1 i)^{m_1 - t_1} \ldots (-y_{k_1} i)^{m_{k_1} - t_{k_1}}}{(m_1 - t_1)! \ldots (m_{k_1} - t_{k_1})!} =$$

$$= e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} \frac{(-y_1 i)^{m_1 - t_1} \ldots (-y_{k_1} i)^{m_{k_1} - t_{k_1}}}{(m_1 - t_1)! \ldots (m_{k_1} - t_{k_1})!}. \tag{14}$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$L \left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}} \right) =$$

$$= \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} L\left(e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}} \right) =$$

$$= \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i + \sum\limits_{j=1}^{k} r_j u_j i} \cdot$$

$$\cdot \sum_{s_1=0}^{S_1} \cdots \sum_{s_{k_1}=0}^{S_{k_1}} \frac{(-r_1)^{s_1} \ldots (-r_{k_1})^{s_{k_1}}}{S_1! \ldots S_{k_1}!} \cdot \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_k} F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}}}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_{k_1}^{s_{k_1}}} =$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^{k} v_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} \sum_{s_1=0}^{S_1} \cdots \sum_{s_{k_1}=0}^{S_{k_1}} \sum_{r_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} \cdot$$

$$\cdot e^{\sum_{i=1}^{k} r_j u_j i} \frac{(-r_1)^{s_1} \ldots (-r_{k_1})^{s_{k_1}}}{S_1! \ldots S_{k_1}!} \cdot \frac{\partial^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}}}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_{k_1}^{s_{k_1}}} =$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^{k} v_j u_j i} \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} \sum_{s_1=0}^{S_1} \cdots \sum_{s_{k_1}=0}^{S_{k_1}} \beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} i^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}}}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_{k_1}^{s_{k_1}}}. \tag{15}$$

Через $S_1, \ldots, S_{k_1}$ в равенстве (15) обозначены соответственно степени $F_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}}$ по $y_1, \ldots, y_{k_1}$. Введем обозначение

$$\sum_{s_1=0}^{S_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{S_k} \beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} i^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} \frac{\partial^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} F_{m_1 \ldots m_{k_1}}}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_{k_1}^{s_{k_1}}} = H_{m \ldots m_{k_1}}. \tag{16}$$

Перепишем (13), пользуясь (14), (15) и (16) и сокращая обе части на $e^{-\sum_{j=1}^{k} v_j u_j i}$:

$$\sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} \frac{(-y_1 i)^{m_1 - t_1} \ldots (-y_{k_1} i)^{m_{k_1} - t_{k_1}}}{(m_1 - t_1)! \ldots (m_{k_1} - t_{k_1})!} =$$

$$= \sum_{t_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{t_{k_1}=0}^{m_{k_1}} \beta_{t_1 \ldots t_{k_1}} H_{m_1 - t_1; \ldots; m_{k_1} - t_{k_1}}. \tag{17}$$

Обозначим через p наибольшее число, для которого все $\beta_{t_1 \ldots t_{k_1}}$, удовлетворяющие условию $t_1 + \cdots + t_{k_1} \leqslant p$, обращаются в нуль. Легко видеть, что для выполнения равенства (17) при $m_1 + \cdots + m_{k_1} \leqslant q$ достаточно выполнения равенства

$$H_{m_1 \ldots m_{k_1}} = \frac{(-y_1 i)^{m_1} \ldots (-y_{k_1} i)^{m_{k_1}}}{m_1! \ldots m_{k_1}!}$$

при $m_1 + \cdots + m_k < q - p$. Раскрывая выражение для $H_{m_1 \ldots m_{k_1}}$ согласно (16), получаем:

$$\sum_{s_1=0}^{S_1} \cdots \sum_{s_{k_1}=0}^{S_{k_1}} \beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} i^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} \frac{\partial^{s_1 + \cdots + s_{k_1}} F_{m_1 \ldots m_{k_1}}}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_{k_1}^{s_{k_1}}} =$$

$$= \frac{(-y_1 i)^{m_1} \ldots (-y_{k_1} i)^{m_{k_1}}}{m_1! \ldots m_{k_1}!}. \tag{18}$$

Докажем, что можно подобрать многочлен от $y_1 \ldots y_{k_1}$ степени не выше $m_1 + \cdots + m_{k_1} + p + 1$ (отсюда следует, что его степень будет не выше q), удовлетворяющий уравнению (18). Выпишем в этом многочлене

члены степени $m_1 + \cdots + m_{k_1} + p + 1$ (обозначим ее для краткости через θ) отдельно:

$$F_{m_1 \ldots m_{k_1}}(y_1 \ldots y_{k_1}) =$$
$$= \sum_{n_1+\cdots+n_{k_1}=\theta} \cdots \sum B_{n_1 \ldots n_{k_1}} y_1^{n_1} \ldots y_{k_1}^{n_{k_1}} + \sum_{n_1+\cdots+n_{k_1}<\theta} \cdots \sum B_{n_1 \ldots n_{k_1}} y_1^{n_1} \ldots y_{k_1}^{n_{k_1}}. \qquad (19)$$

Подставим в левую часть (18) вместо $F_{m_1 \ldots m_{k_1}}(y_1 \ldots y_{k_1})$ его выражение (19). Вторая сумма даст члены степени меньше $m_1 + \cdots + m_{k_1}$. Член $B_{n_1 \ldots n_{k_1}} y_1^{n_1} \ldots y_{k_1}^{n_{k_1}}$ из первой суммы при подстановке в (18) даст многочлен

$$B_{n_1 \ldots n_{k_1}} \sum_{s_1+\cdots+s_{k_1}=p+1} \cdots \sum \beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} i^{s_1+\cdots+s_{k_1}} \frac{n_1!}{(n_1-s_1)!} \cdots \frac{n_{k_1}!}{(n_{k_1}-s_{k_1})!} y_1^{n_1-s_1} \ldots y_{k_1}^{n_{k_1}-s_{k_1}} \qquad (20)$$

и члены степени ниже $m_1 + \cdots + m_{k_1}$.

По определению числа p, среди всех комбинаций $s_1, \ldots, s_{k_1}$, удовлетворяющих условию $s_1 + \cdots + s_{k_1} = p + 1$, есть хотя бы одна, для которой $\beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} \neq 0$. Рассмотрим все $\beta_{s_1 \ldots s_{k_1}} \neq 0$ $(s_1 + \cdots + s_{k_1} = p + 1)$. Выделим из них те, которые имеют наименьший первый индекс, из них, в свою очередь, те, которые имеют наименьший второй индекс, и т. д. до предпоследнего (последний определяется из условия $s_{k_1} = p + 1 - - s_1 - \cdots - s_{k_1-1}$). Пусть выделенный элемент будет $\beta_{\bar{s}_1; \ldots; \bar{s}_{k_1}}$.

Подставим в (18) какой-либо член вида

$$B_{m_1+\bar{s}_1; \ldots; m_{k_1}+\bar{s}_{k_1}} y^{m_1+\bar{s}_1} \ldots y^{m_{k_1}+\bar{s}_k}.$$

Согласно (20) при этом получатся однородный многочлен степени $m_1 + \cdots + m_{k_1}$ и низшие члены. Старшие члены по y_1 однородного многочлена будут иметь степень m_1 по y_1, старшие из них по y_2 будут иметь степень m_2 по y_2 и т. д. Беря всевозможные комбинации $m_1 \ldots m_{k_1}$, мы можем получить линейно независимые многочлены. Соответствующая их линейная комбинация даст правую часть равенства (18) и члены низшей степени. Совершенно аналогично можно подобрать члены

$$B_{n_1 \ldots n_{k_1}} y_1^{n_1} \ldots y_{k_1}^{n_{k_1}}$$

степени $\theta - 1$ так, чтобы они при подстановке в (18) взаимно уничтожились с имеющимися там членами степени $m_1 + \cdots + m_{k_1} - 1$ и т. д. Таким образом все $F_{m_1 \ldots m_{k_1}}$ определены. Зная все $F_{m_1 \ldots m_{k_1}}$, определяем $G_{m_1 \ldots m_{k_1}}$ из соотношения (12). Полученные многочлены будут с точностью до членов высшего порядка удовлетворять искомому представлению (7). Разлагая

$$e^{-\sum_{j=1}^{k_1} y_j \Delta u_j i} \quad \text{и} \quad P\left(e^{(u_1+\Delta u_1) i}; \ldots; e^{(u_{k_1}+\Delta u_{k_1}) i}; e^{u_{k_1+1} i} \ldots; e^{u_k i}\right)$$

по формуле Тейлора с остаточным членом и учитывая, что все $F_{m_1 \ldots m_{k_1}}(y_1 \ldots y_{k_1})$ имеют по совокупности $y_1 \ldots y_{k_1}$ степень не выше q, убеждаемся, что все члены высшего порядка должны войти в

$$o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} \Delta u_j^2}^{\,q+1}\right) \sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} y_j^2}^{\,q+1}.$$

Лемма доказана

Замечание. Из метода нахождения коэффициентов $B_{m_1 \ldots m_{k_1}}$ следует, что существует константа $C > 0$ и целая константа γ такая, что

$$|F(\Delta u_1; \ldots; \Delta u_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_1})| \leqslant \frac{C \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k_1} y_j^2}^{\,q}}{|\beta_{\bar{s}_1 \ldots \bar{s}_{k_1}}|^{\gamma}}. \tag{21}$$

Переходим к построению обратного оператора. Мы будем рассматривать $P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})$ в k-мерном кубе (K) $(0 \leqslant u_j \leqslant 2\pi)$. $P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})$ может обращаться в 0 во всевозможных многообразиях, начиная с 0-мерных (точек) и кончая $(k-1)$-мерными.

Разложим $P(x_1 \ldots x_k)$ на неприводимые сомножители и подставим в разложение $x_1 = e^{u_1 i} \ldots x_k = e^{u_k i}$:

$$P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) = P_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})^{l_1} \ldots P_N(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})^{l_N}.$$

Рассмотрим один из этих сомножителей, например P_1. Если в некоторой точке

$$P_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) = 0,$$

то в этой же точке

$$\overline{P_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})} = e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} R_j u_j i} P_1^*(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) = 0,$$

причем многочлен P_1^* получается следующим образом. Пусть

$$P_1 = \sum_{r_1=0}^{R_1} \ldots \sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1 \ldots r_k} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}.$$

Тогда через P_1^* мы обозначаем

$$P_1^* = \sum_{r_1=0}^{R_1} \ldots \sum_{r_k=0}^{R_k} \bar{\alpha}_{r_1 \ldots r_k} x_1^{R_1 - r_1} \ldots x_k^{R_k - r_k}.$$

Могут представиться два случая:

1) многочлены P_1 и P_1^* взаимно простые. Тогда существуют многочлены $Q(x_1, \ldots, x_k)$ и $R(x_1, \ldots, x_k)$ такие, что

$$P_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) Q(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) + P_1^*(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) R(e^{u_1 i} \ldots e^{u_{k-1} i}) = S(e^{u_1 i} \ldots e^{u_{k-1} i}) \tag{22}$$

и многочлены $Q_1(x_1, \ldots, x_k)$ и $R_1(x_1, \ldots, x_k)$ такие, что

$$P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) Q_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) + P_1^*(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) R_1^*(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i}) = S_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_{k-2} i}, e^{u_k i}) \tag{23}$$

(равенства (22) и (23) доказываются так же, как аналогичное свойство многочленов от одной переменной; при этом многочлены от k переменных рассматриваются как многочлены от одной переменной, а от остальных $k-1$ переменных образуются рациональные дроби и относятся в коэффициенты). В этом случае P_1 может обращаться в нуль только на

$(k-2)$-мерном многообразии или же на многообразии меньшего числа измерений, так как при этом $S = S_1 = 0$.

2) Многочлены P_1 и P_1^* не взаимно простые. При этом они оба неприводимы (если бы P_1^* был приводим, то и для P_1 можно было бы построить разложение на множители). Следовательно,

$$P_1 = cP_1^*$$

и

$$\alpha_{R_1-r_1;\ldots;R_k-r_k} = c\,\alpha_{r_1\ldots r_k}. \tag{24}$$

Из (24) следует:

$$c\bar{c} = 1, \quad |c| = 1.$$

Домножив все коэффициенты P_1 на $\sqrt{\bar{c}}$, получим многочлен P_1', коэффициенты которого $\alpha'_{r_1\ldots r_k}$ удовлетворяют условию

$$\frac{\alpha'_{r_1\ldots r_k}}{\sqrt{\bar{c}}} = c\left(\overline{\frac{\alpha'_{R_1-r_1;\ldots;R_k-r_k}}{\sqrt{\bar{c}}}}\right),$$

$$\alpha'_{r_1\ldots r_k} = \sqrt{\bar{c}}\cdot c\,\frac{1}{\sqrt{c}}\,\bar{\alpha}'_{R_1-r_1;\ldots;R_k-r_k} = \bar{\alpha}'_{R_1-r_1;\ldots;R_k-r_k}. \tag{25}$$

Представим P_1' в виде

$$P_1' = e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k} R_j u_j i} \sum_{r_1=0}^{R_1}\cdots\sum_{r_k=0}^{R_k} \alpha_{r_1\ldots r_k} e^{\left(r_1-\frac{R_1}{2}\right)u_1 i}\ldots e^{\left(r_k-\frac{R_k}{2}\right)u_k i}. \tag{26}$$

Из (25) следует, что второй сомножитель в выражении (26) всегда является действительным числом. Следовательно, для обращения P_1' в нуль требуется только одно условие, и P_1' может обращаться в нуль на многообразиях $k-1$ измерения. Мы будем, пользуясь доказанной леммой, исправлять особенности интеграла (6) сначала для $(k-1)$-мерных многообразий, затем для $(k-2)$-мерных и т. д. до точек.

Обозначим через $\tilde{p}$ наибольшее число, для которого все $\frac{\partial^s P}{\partial u_1^s}$ $(0 \leqslant s \leqslant \tilde{p})$, взятые в точках $(k-1)$-мерного многообразия, обращаются в нуль. Если такого $\tilde{p}$ не существует, то

$$P = \frac{\partial P}{\partial u_1} = \frac{\partial^2 P}{\partial u_1^2} = \ldots = 0$$

во всех точках многообразия, и оно представляет собой цилиндр с образующей, параллельной оси u_1, и уравнением

$$P''(e^{u_2 i}\ldots e^{u_k i}) = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим случай, когда $\tilde{p}$ существует. В этом случае существует точка $(u_1^{(0)}\ldots u_k^{(0)})$, для которой

$$\beta_{\tilde{p}+1} = \frac{1}{(\tilde{p}+1)!}\;\frac{\partial^{\tilde{p}+1}P}{\partial u_1^{\tilde{p}+1}} \neq 0.$$

Выделим из P произведение тех его неприводимых сомножителей, которые взаимно просты с $\beta_{\widetilde{p}+1}$. Такие сомножители существуют, иначе не могла бы существовать точка $(u_1^{(0)} \ldots u_k^{(0)})$. Обозначим их произведение через Q. Поскольку Q и $\beta_{\widetilde{p}+1}$ взаимно просты, существуют многочлены $R(x_1 \ldots x_k)$, $S(x_1 \ldots x_k)$ и $T(x_2 \ldots x_k)$ такие, что

$$QR + \beta_{\widetilde{p}+1} S = T.$$

Следовательно, при $Q = 0$

$$|\beta_{\widetilde{p}+1}| \geqslant c\, T(e^{u_2 i} \ldots e^{u_k i}). \tag{28}$$

Обозначим через M максимум $\beta_{\widetilde{p}+2}$. Разложим по формуле Тейлора $P(e^{(u_1+\Delta u_1) i} \ldots e^{u_k i})$ в каждой точке, принадлежащей $(k-1)$-мерному многообразию и одновременно удовлетворяющей уравнению $Q = 0$:

$$P = \beta_{\widetilde{p}+1} \Delta u_1^{\widetilde{p}+1} + \beta_{\widetilde{p}+2} (e^{(u_1+\theta\Delta u_1) i} \ldots e^{u_k i}) \Delta u_1^{\widetilde{p}+2} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1). \tag{29}$$

Построим для каждой из этих точек отрезок прямой

$$u_1 - \delta \leqslant U_1 \leqslant u_1 + \delta;\ U_2 = u_2; \ldots;\ U_k = u_k$$

и подберем δ для каждой точки так, чтобы интеграл (6), взятый внутри области (K_1), образованной совокупностью отрезков, можно было при помощи леммы сделать сходящимся. При $|\Delta u_1| \leqslant \frac{c\,|T|}{2M}$ из (27) и (28) будем иметь

$$|P| \geqslant c_1 T(e^{u_2 i} \ldots e^{u_k i}) \Delta u_1^{\widetilde{p}+1}. \tag{30}$$

Положим $q = \widetilde{p}$, $k_1 = 1$ и представим числитель подинтегрального выражения (6) по лемме:

$$e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i - y_1 \Delta u_1 i} = e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} PF +$$
$$+ e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{m=0}^{\widetilde{p}} G_m(y_1) \Delta u_1^{m_1} + o(\Delta u_1^{\widetilde{p}+1}) y_1^{\widetilde{p}+1}.$$

Положим

$$\delta = c_2 \cdot |T|^{\max(\gamma, 1)} \tag{31}$$

[см. (21)], причем подберем c_2 так, чтобы соблюдалось условие

$$\delta < \frac{c\,|T|}{2M}.$$

Заменим внутри области (K_1) числитель подинтегрального выражения на

$$e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} - e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum_{m=0}^{\widetilde{p}} G_m(y_1) \Delta u_1^{m_1}.$$

Так как $G_m(y_1)$ является решением уравнения (4), то от этой замены $\Phi(y_1, \ldots, y_k)$ не перестанет быть решением уравнения (3). Имеем (обозна-

чая проекцию (K_1) на плоскость $u_1 = 0$ через (K'_1):

$$\int\limits_{(K_1)}\cdots\int \frac{e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i - y_1 \Delta u_1 i} - e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} \sum\limits_{m=0}^{\widetilde{p}} G_m(y_1)\, \Delta u_1^{m_1}}{P\left(e^{(u_1+\Delta u_1)\, i};\ \ldots,\ e^{u_k i}\right)}\, d(\Delta u_1)\, du_2 \ldots du_k =$$

$$= \int\limits_{(K_1)}\cdots\int \left[e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} F + \frac{o\left(\Delta u_1^{\widetilde{p}+1}\right) y_1^{\widetilde{p}+1}}{P}\right] d(\Delta u_1)\, du_2 \ldots du_k =$$

$$= \int\limits_{(K'_1)}\cdots\int du_2 \ldots du_k \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[e^{-\sum\limits_{j=1}^{k} y_j u_j i} F + \frac{o\left(\Delta u_1^{\widetilde{p}+1}\right) y_1^{\widetilde{p}+1}}{P}\right] d(\Delta u_1). \qquad (32)$$

Из (21) и (28) следует, что

$$|F| \leqslant \frac{c_3 y_1^q}{|T|^{\gamma}}. \qquad (33)$$

Из (30), (31) и (33) следует, что интеграл (32) сходится. Легко проверить, что при стремлении y_1 к бесконечности интеграл (32) будет возрастать не быстрее, чем $y_1^{\widetilde{p}+1}$.

Исключим из (K) область (K_1). На границе

$$\Delta u_1 = \pm\delta$$

и потому, как это следует из (30) и (31),

$$|P| \geqslant T'\left(e^{u_2 i} \ldots e^{u_k i}\right), \qquad (34)$$

где $T'(x_1, \ldots, x_k)$ — некоторый многочлен.

Разделим P на Q. Мы получим частное Q', которое также может обращаться в 0 на многообразии $k-1$ измерения. Для этого многообразия проводим совершенно аналогичное построение и поступаем так до тех пор, пока исходное $(k-1)$-мерное многообразие не будет исчерпано.

Рассмотрим, как изменяется P в области, которая останется после выделения из (K) всех областей (K_1). Составим выражение

$$e^{\sum\limits_{j=1}^{k} R_j u_j i} \frac{\partial |P|^2}{\partial u_1} = e^{\sum\limits_{j=1}^{k} R_j u_j i} \frac{\partial}{\partial u_1}(P\overline{P})\ *$$

и обозначим его для краткости через $\widetilde{P}$. Обозначим через $\widetilde{\widetilde{P}}$ частное от деления $\widetilde{P}$ на наибольший общий делитель P и $\widetilde{P}$. Поскольку P и $\widetilde{\widetilde{P}}$ — взаимно простые, существуют многочлены $Q_2(x_1 \ldots x_k)$, $R_2(x_1 \ldots x_k)$ и $S_2(x_1 \ldots x_k)$ такие, что

$$PQ_2 + \widetilde{\widetilde{P}} R_2 = S_2\left(e^{u_2 i} \ldots e^{u_k i}\right). \qquad (35)$$

---

* Множитель $e^{\sum\limits_{j=1}^{k} R_j u_j i}$ введен для того, чтобы $\widetilde{P}$ было целым.

Функция $P(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})$ является периодической и, следовательно, ее модуль может принимать минимальное значение вдоль прямой $u_2 = \text{const}; \ldots$ $\ldots u_k = \text{const}$ только там, где $\widetilde{P} = 0$, или на границе одной из исключенных областей (K_1). В последнем случае имеем оценку (34). Если же $\widetilde{P} = 0$, то или $P = 0$, или $\widetilde{\widetilde{P}} = 0$. Мы будем рассматривать поведение P вне тех точек, где P обращается в 0, и потому будем считать $P \neq 0$. Отсюда, а также из (34) и из (35) следует, что существует многочлен $T_1(e^{u_1 i} \ldots e^{u_k i})$, для которого в исследуемой области

$$|P| \geqslant |T_1|. \tag{36}$$

Описанное построение не применимо к многообразию, определяемому уравнением (27). Проведем такое же построение для переменной u_2, считая при этом области (K_2) исключенными. Тогда получим оценку, аналогичную (36). Продолжая построение по всем переменным, найдем:

$$|P| \geqslant |T_j(e^{u_1 i} \ldots e^{u_{j-1} i}; e^{u_{j+1} i} \ldots e^{u_k i})|. \tag{37}$$

Затем применяем лемму к многообразиям $k-2$ измерений. В этом случае берем $k_1 = 2$ и пользуемся оценкой (37). Далее, получаем оценку, аналогичную (37):

$$|P| \geqslant |T_{lm}(e^{u_1 i} \ldots e^{u_{l-1} j}; e^{u_{l+1} i} \ldots e^{u_{m-1} i}; e^{u_{m+1}} \ldots e^{u_k i})|.$$

Продолжая это рассуждение, исправляем интеграл (6) во всех особенностях. Из метода построения следует, что интеграл (6) возрастает не быстрее, чем некоторый многочлен от $y_1, \ldots, y_k$.

Поступило
17.IX.1953

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 81—96

В. С. КОРОЛЮК

О РАСХОЖДЕНИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Определяются функции распределения односторонних и двусторонних максимальных уклонений между двумя эмпирическими кривыми распределения, построенных по двум независимым выборкам, причем в случае двусторонних уклонений — в предположении кратности чисел наблюдений в выборках. Кроме того, определяется функция распределения для критерия согласия Колмогорова при конечном значении числа наблюдений в выборке.

Работами А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова было положено начало новой главе математической статистики, получившей название «непараметрические задачи статистики». Теоремы, установленные названными авторами, дают, в частности, решение следующих важных задач:

1) Имеются результаты независимых испытаний $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над случайной величиной ξ, имеющей непрерывное распределение вероятностей. Требуется найти критерий согласия теоретического предположения, что распределение ξ равно $F(x)$, с полученными опытными данными, который не зависел бы от частных предположений об аналитическом характере функции $F(x)$.

2) Имеются две последовательности результатов независимых испытаний

$$x_1,\ x_2,\ \ldots.\ x_n \tag{1}$$

и

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m, \tag{2}$$

произведенных над случайными величинами ξ и η. Требуется найти критерий проверки того, что обе величины ξ и η имеют одно и то же непрерывное распределение вероятностей $F(x)$.

В указанных направлениях отметим основные результаты, введя предварительно следующие обозначения.

Пусть $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения для последовательности (1), а $T_m(x)$ — эмпирическая функция распределения для последовательности (2); обозначим

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - F(x)|,$$

$$D_n^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} [S_n(x) - F(x)],$$

$$D^+(n, m) = \sup_{-\infty < x < +\infty} [S_n(x) - T_m(x)],$$

$$D(n, m) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - T_m(x)|.$$

ТЕОРЕМА В. И. ГЛИВЕНКО. *Какова бы ни была функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ, при $n \to \infty$*

$$P\{D_n \to 0\} = 1.$$

ТЕОРЕМА А. Н. КОЛМОГОРОВА. *Какова бы ни была непрерывная функция распределения $F(x)$, при $n \to \infty$*

$$P\{\sqrt{n}\, D_n < z\} \to K(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant 0, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1 Н. В. СМИРНОВА. *Какова бы ни была непрерывная функция распределения $F(x)$, имеют место соотношения:*

$$P\{\sqrt{n}\, D_n^+ < z\} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n - z\sqrt{n} \sum_{k=r+1}^{n-1} \frac{C_n^k (k - z\sqrt{n})^k (n - k + z\sqrt{n})^{n-k-1}}{n^n},$$

где $r = [z\sqrt{n}]$, $0 < z \leqslant \sqrt{n}$,

$$P\{\sqrt{n}\, D_n^+ < z\} = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } z > \sqrt{n}, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\, D_n^+ < z\} = \begin{cases} 1 - e^{-2z^2} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leqslant 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2 Н. В. СМИРНОВА. *Если функция $F(x)$ непрерывна и отношение $\frac{m}{n} = \tau$ остается постоянным $(0 < \tau < +\infty)$, то при $n \to \infty$*

$$1.\ \lim P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, D(n, m) < z\right\} = K(z),$$

$$2.\ \lim P\{\sqrt{n}\, D^+(n, m) < z\} = \begin{cases} 1 - e^{-2z^2} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leqslant 0. \end{cases}$$

Сформулированные теоремы нашли широкое применение в качестве критериев согласия. Однако их использование в практических вопросах не всегда достаточно обосновано, так как все они носят характер предельных соотношений. Возникает задача разыскания точных распределений:

$$\Phi_n^+(z) = P\{\sqrt{n}\, D_n^+ < z\}, \quad \Phi_n(z) = P\{\sqrt{n}\, D_n < z\},$$

$$\Phi_{nm}^+(z) = P\{\sqrt{n}\, D^+(n, m) < z\}, \quad \Phi_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, D(n, m) < z\right\}.$$

Функция $\Phi_n^+(z)$ была найдена еще Н. В. Смирновым ([1]). В частном случае $n=m$ задача разыскания функций $\Phi_{nm}^+(z)$ и $\Phi_{nm}(z)$ была решена в совместной работе автора с Б. В. Гнеденко [см. ([2])].

Настоящая работа посвящена определению функций $\Phi_{nm}^+(z)$ и $\Phi_{nm}(z)$ в предположении, что $m=np$, где p — целое число. Предельный переход $p\to\infty$ дает нам возможность вновь получить найденное Н. В. Смирновым выражение для $\Phi_n^+(z)$ и вычислить $\Phi_n(z)$.

§ 1. Односторонние уклонения

Предположим, что $m=np$.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция распределения $F(x)$ величины ξ непрерывна, то при* $0<z\leqslant\sqrt{\frac{nm}{m+n}}$

$$\Phi_{nm}^+(z)=P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}D^+(n,\ m)<z\right\}=$$

$$=1-\frac{c}{C_N^n}\sum_{k=c}^{N-\left[\frac{c}{p}\right]}\frac{1}{k}C_k^{\frac{k-c}{p+1}}C_{N-k}^{n-\frac{k-c}{p+1}}, \tag{3}$$

$$\Phi_{nm}^+(z)=\begin{cases}0 \text{ при } z\leqslant 0,\\ 1 \text{ при } z>\sqrt{\frac{nm}{n+m}},\end{cases}$$

где

$$c=\left[pz\sqrt{\frac{Nn}{m}}\right],\quad N=n+m,\quad k\equiv c \pmod{(p+1)}.$$

Доказательство. Расположим результаты обеих серий наблюдений в порядке возрастания:

$$z_1<z_2<\ldots<z_N,$$

где каждое из z_i обозначает либо x_j, либо y_k при некоторых j и k. Заметим прежде всего, что любые взаимные расположения наблюдений обеих серий равновероятны. Действительно, так как функции распределения всех величин x_j и y_k одинаковы, то вероятность каждого из $N!$ возможных расположений чисел последовательностей (1) и (2) равна

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{z_1}^{\infty}\cdots\int_{z_{N-1}}^{\infty}dF(z_N)\ \ldots\ dF(z_2)\right]dF(z_1)=\frac{1}{N!}.$$

Рассмотрим последовательность вспомогательных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Каждая величина ξ_k может принимать только одно из двух значений $+1$ или $-p$, согласно правилу:

$$\xi_k=\begin{cases}+1, \text{ если } z_k=y_i,\\ -p, \text{ если } z_k=x_j.\end{cases}$$

Введем обозначение:

$$S_k = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k.$$

Очевидно, что

$$mD^+(n,\ m) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} S_k.$$

Дадим следующую иллюстрацию: частица, находящаяся в момент $t = 0$ в начале координат, подвержена случайным толчкам в моменты $t_u = 1, 2, \ldots, N$, в результате каждого из которых она может сдвигаться или на единицу вправо, или на p единиц влево. В плоскости $(x,\ t)$ путь частицы при каждом толчке изобразится перемещением на единицу вправо или на p единиц влево и на единицу по оси t.

Пусть c — целое положительное число. При данной иллюстрации вероятность $P\{mD^+(n,\ m) < c\}$ представляет собою вероятность того, что движущаяся указанным способом частица во все время движения не пересечет прямой $x = c$. Так как вероятность каждого пути равна $\frac{1}{C_N^n}$ (перемена местами x_i между собой или y_j между собой не меняет вида пути), то для нахождения вероятности $P\{mD^+(n,\ m) \geqslant c\}$ необходимо подсчитать число путей, пересекающих прямую $x = c$. Разделим каждый такой путь на две части точкой первого пересечения с прямой $x = c$. Тогда искомое число путей M определится равенством:

$$M = \sum_{k=c}^{N-\left[\frac{c}{p}\right]} N_k(c)\, C_{N-k}^{n-\frac{k-c}{p+1}}, \tag{4}$$

где $N_k(c)$ есть число путей до первого пересечения с прямой $x = c$, если это пересечение наступило на k-м шагу, суммирование в (4) производится по всем k, удовлетворяющим условию $k \equiv c \pmod{(p+1)}$, и число $\frac{k-c}{p+1}$ есть число шагов влево, совершенных до первого пересечения с прямой $x = c$.

Для чисел $N_k(c)$ имеет место следующая рекуррентная формула:

$$N_k(c) = C_k^{\frac{k-c}{p+1}} - \sum_{(r)} N_r(c)\, C_{k-r}^{\frac{k-r}{p+1}} \qquad \{r \equiv k \pmod{(p+1)}\}. \tag{5}$$

Действительно, число всех возможных путей, пересекающих прямую $x = c$ в момент k, равно $C_k^{\frac{k-c}{p+1}}$. Из этого числа нужно вычесть те пути, которые ранее пересекали прямую $x = c$. Легко понять, что каждый такой путь будет учтен одним и только одним слагаемым суммы (5).

Преобразуем выражение для $N_k(c)$, заметив предварительно, что

$$C_{k-1}^{\frac{k-c}{p+1}-1} = \sum_{(r)} N_r(c) \cdot C_{k-r-1}^{\frac{k-r}{p+1}-1}. \tag{6}$$

Действительно, слева стоит число путей в точку $(c+p,\ k-1)$, которая, как легко видеть, расположена с началом координат по разные стороны от прямой $x=c$. Правая же часть определяет число путей, приводящих в эту же точку $(c+p,\ k-1)$ и пересекающих прямую $x=c$, а значит, также равное $C_{k-1}^{\overline{\frac{k-c}{p+1}}-1}$. Теперь имеем:

$$N_k(c) = C_k^{\overline{\frac{k-c}{p+1}}} - \sum_{(r)} N_r(c)\, C_{k-r}^{\overline{\frac{k-r}{p+1}}} = C_k^{\overline{\frac{k-r}{p+1}}} - (p+1)\sum_{(r)} N_r(c)\, C_{k-r-1}^{\overline{\frac{k-r}{p+1}}}.$$

Использовав (6), находим:

$$N_k(c) = \frac{c}{k}\, C_k^{\overline{\frac{k-c}{p+1}}}. \tag{7}$$

Подставляя выражение для $N_k(c)$ в равенство (4) и учитывая, что

$$P\{mD^+(n,\ m) \geqslant c\} = \frac{M}{C_N^n},$$

получим формулу (3).

Примечание. В общем случае имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если функция распределения $F(x)$ величины ξ непрерывна, то при* $0 < z \leqslant \sqrt{\frac{nm}{N}}$

$$\Phi_{nm}^+(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}}\, D^+(n,\ m) < z\right\} = 1 - \sum_{r=0}^{n-\left[\frac{c}{m}\right]} \frac{A_r C_{N-k_r}^{n-r}}{C_N^n}$$

и

$$\Phi_{nm}^+(z) = \begin{cases} 0 \text{ при } z \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } z > \sqrt{\frac{nm}{N}}, \end{cases}$$

где

$$A_r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 & a_0 \\ b_{1,0} & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & 1 \quad 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & a_{r-1} \\ b_{r,0} & b_{r,1} & & \ldots & b_{r,\,r-1} & a_r \end{vmatrix}, \quad b_{p,\,q} = C_{k_p-k_q}^{p-q},\quad a_p = C_{k_p}^p,\quad k_r = \left[\frac{c-1+rN}{n}\right]+1.$$

Доказательство аналогично предыдущему с незначительными изменениями.

§ 2. Двусторонние уклонения

Предполагая, что $m = np$, определим функцию распределения случайной величины

$$D(n, m) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - T_m(x)|,$$

используя прием, изложенный при доказательстве теоремы 1.

Введем обозначения:

$$c_i = \begin{cases} (-1)^i c & \text{для } i = 1, \nu + 1, \\ (-1)^i 2c & \text{для } i = 2, 3, \ldots, \nu. \end{cases} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_i &= \frac{|c_i|}{k_i} \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \delta_i &= 1 - \frac{p(p+1)}{C_{k_i}^{\frac{k_i + c_i}{p+1}}} \sum_{r_1 + r_2 = k_i - 1} \frac{1}{r_1} C_{r_1}^{\frac{r_1 - p}{p+1}} C_{r_2}^{\frac{r_2 + c}{p+1}} \text{ при } i \text{ четном}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\delta_{\nu+1} = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_i' &= 1 - \frac{p(p+1)}{C_{k_i}^{\frac{k_i - c_i}{p+1}}} \sum_{r_1 + r_2 = k_i - 1} \frac{1}{r_1} C_{r_1}^{\frac{r_1 - p}{p+1}} C_{r_2}^{\frac{r_2 - c_i}{p+1}} \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \delta_i' &= \frac{|c_i|}{k_i} \text{ при } i \text{ четном}, \\ \delta_{\nu+1}' &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 3. *Если функция распределения $F(x)$ величины ξ непрерывна, то при $0 < z \leqslant \sqrt{\frac{nm}{N}}$*

$$\Phi_{nm}(z) = 1 - \frac{1}{C_N^n} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{c}\right]} (-1)^{\nu+1} \sum \left[\prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i C_{k_i}^{\frac{k_i + c_i}{p+1}} + \prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i' C_{k_i}^{\frac{k_i - c_i}{p+1}} \right]$$

и

$$\Phi_{mn}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } z > \sqrt{\frac{mn}{N}}, \end{cases}$$

где

$$c = \left[pz\sqrt{\frac{Nn}{m}}\right], \quad N = n + m,$$

$$k_i \equiv -c_i \pmod{(p+1)} \quad \textit{для первого произведения},$$

$$k_i \equiv c_i \pmod{(p+1)} \quad \textit{для второго произведения},$$

а внутреннее суммирование распространяется на все k_i, для которых $\sum_{i=1}^{\nu+1} k_i = N$.

Доказательство. В ранее принятых обозначениях

$$mD(n, m) = m \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - T_m(x)| = \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} |S_k|.$$

Следовательно, вероятность $P\{mD(n, m) < c\}$ представляет собой вероятность того, что движущаяся частица во все время движения не пересечет прямых $x = c$ и $x = -c$.

Таким образом, для нахождения вероятности $P\{mD(n, m) \geqslant c\}$ нужно найти число путей, пересекающих границу $x = c$ или границу $x = -c$ хотя бы один раз.

Определение 1. Точку на границе $x = c$ назовем точкой выхода некоторого фиксированного пути, если существует такое фиксированное число k, что

$$S_r < c \quad \text{при} \quad 1 \leqslant r < k \quad \text{и} \ S_k = c,$$

или же существует такая пара чисел k и k_1, что

$$S_{k_1} \leqslant -c, \quad S_r < c \ \text{при} \ k_1 \leqslant r < k \ \text{и} \ S_k = c.$$

Определение 2. Точку на границе $x = -c$ назовем *точкой входа* некоторого фиксированного пути, если существует такое число k, что

$$S_r \neq -c \ \text{при} \ 1 \leqslant r < k \ \text{и} \ S_k = -c,$$

или же существует такая пара чисел k и k_1, что

$$S_{k_1} \geqslant c, \quad S_r \neq -c \ \text{при} \ k_1 \leqslant r < k \ \text{и} \ S_k = -c.$$

Точки входа и выхода будем называть узловыми точками пути.

Обозначим через $B_\nu^+(c)$ число таких путей, каждый из которых имеет не менее ν узловых точек, если считать, начиная с первой точки выхода, а через $B_\nu^-(c)$ — число таких путей, каждый из которых имеет не менее ν узловых точек, если считать, начиная с первой точки входа. Тогда число путей M, пересекающих хотя бы один раз границу $x = c$ или $x = -c$, определится равенством:

$$M = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{c}\right]} (-1)^{\nu+1} [B_\nu^+(c) + B_\nu^-(c)]. \tag{11}$$

Действительно, равенство (11) становится очевидным, если учесть, что k-е слагаемое в сумме справа, т. е. $[B_k^+(c) + B_k^-(c)]$ есть число путей, имеющих не менее k узловых точек, причем пути, имеющие $(k+1)$ и более узловых точек, учтены дважды, а искомая вероятность равна

$$P\{mD(n, m) \geqslant c\} = \frac{M}{C_N^n}. \tag{12}$$

Для определения числа $B_\nu^+(c)$ разобьем каждый путь, входящий в это множество, на $(\nu + 1)$ отрезков, каждый из которых есть часть пути между соседними узловыми точками, причем конец начального отрезка определяется первой точкой выхода, а начало последнего отрезка — ν-й узловой точкой ; нумерация ведется от первой точки входа. Введем обозначения:

$a_0^{-c}(k)$ — число отрезков пути, длиною k шагов, до первой точки входа;

$a_0^{c}(k)$ — число отрезков пути, длиною k шагов, до первой точки выхода;

$a_{-c}^{c}(k)$ — число отрезков пути, длиною k шагов, определяемых двумя соседними узловыми точками, причем начало отрезка находится в точке входа, а конец отрезка — в точке выхода;

$a_c^{-c}(k)$ — число отрезков пути, длиною k шагов, определяемых двумя соседними узловыми точками, причем начало отрезка находится в точке выхода, а конец отрезка — в точке входа;

$a_c^0(k)$ — число последних отрезков пути, определяемых точкой выхода;

$a_{-c}^0(k)$ — число последних отрезков пути, определяемых точкой входа.

При помощи введенных чисел $a_\alpha^\beta(k)$ числа $B_\nu^\pm(c)$ могут быть представлены в виде

$$B_\nu^+(c) = \sum a_0^c(k_1)\, a_c^{-c}(k_2) \ldots a^0_{(-1)^{\nu+1}c}(k_{\nu+1}), \tag{13$_1$}$$

$$B_\nu^-(c) = \sum a_0^{-c}(k_1)\, a_{-c}^{c}(k_2) \ldots a^0_{(-1)^{\nu}c}(k_{\nu+1}); \tag{13$_2$}$$

суммирование в обоих случаях распространяется на те k, для которых $\sum_{i=1}^{\nu+1} k_i = N$. Заметим, что пути, не совпадающие хотя бы в одной из ν узловых точек, не могут входить в одно и то же слагаемое суммы (13_1) или (13_2), что следует из определения узловых точек.

Итак, для определения чисел $B_\nu^\pm(c)$ остается вычислить числа $a_\alpha^\beta(k)$. Из определения этих чисел и из формулы (7) следует, что

$$a_0^c(k) = \frac{c}{k}\, C_k^{\overline{\frac{k-c}{p+1}}},$$

$$a_{-c}^c(k) = a_0^{2c}(k) = \frac{2c}{k}\, C_k^{\overline{\frac{k-2c}{p+1}}}.$$

Чтобы найти число $a_0^{-c}(k)$, заметим прежде всего, что достижение точки входа после k шагов означает, что $S_k = -c$. Обозначая через x_k число шагов влево, а через y_k — число шагов вправо, имеем:

$$x_k + y_k = k,$$

$$-px_k + y_k = -c,$$

откуда

$$x_k = \frac{k+c}{p+1}, \quad y_k = \frac{kp-c}{p+1}.$$

Таким образом, для чисел $a_0^{-c}(k)$ имеет место следующее соотношение:

$$a_0^{-c}(k) = C_k^{\overline{\frac{k+c}{p+1}}} - \sum_{(r)} a_0^{-c}(r) \cdot C_{k-r}^{\overline{\frac{k-r}{p+1}}} \qquad \{r \equiv k \,(\mathrm{mod}\,(p+1))\}. \tag{14}$$

Соотношение (14) доказывается аналогично доказательству формулы (5).

В дальнейшем нам понадобится следующее тождество:

$$\sum_{k_1+k_2=T} a_0^{-\alpha}(k_1) C_{k_2}^{\frac{k_2-(\alpha+\beta)}{p+1}} = \sum_{k_1+k_2=T} \frac{\alpha+\beta}{k_2} C_{k_2}^{\frac{k_2-(\alpha+\beta)}{p+1}} C_{k_1}^{\frac{k_1+\alpha}{p+1}}. \qquad (15)$$

Для доказательства этого тождества заметим, что сумма слева определяет число путей из точки $(0, 0)$ в точку (β, T), пересекающих прямую $x = -\alpha$, правая сумма определяет число путей из точки $(0, 0)$ в точку (β, T), пересекающих прямую $x = \alpha + \beta$. В равночисленности этих множеств легко убедиться, если преобразовать координаты по формулам

$$x' = -x + \beta, \quad t' = -t + T.$$

Имеем:

$$\sum_{(r)} a_0^{-c}(r) C_{k-r}^{\frac{k-r}{p+1}} = (p+1) \sum_{(r)} a_0^{-c}(r) C_{k-r-1}^{\frac{k-r-1-p}{p+1}}.$$

Использовав тождество (15), получаем:

$$\sum_{(r)} a_0^{-c}(r) C_{k-r-1}^{\frac{k-r-1-p}{p+1}} = p \sum_{(r)} \frac{1}{k-r-1} C_{k-r-1}^{\frac{k-r-1-p}{p+1}} C_r^{\frac{r+c}{p+1}}.$$

Итак,

$$a_0^{-c}(k) = C_k^{\frac{k+c}{p+1}} - p(p+1) \sum_{r_1+r_2=k-1} \frac{1}{r_1} C_{r_1}^{\frac{r_1-p}{p+1}} \cdot C_{r_2}^{\frac{r_2+c}{p+1}}$$

и, далее,

$$a_{+c}^{-c}(k) = a_0^{-2c}(k) = C_k^{\frac{k+2c}{p+1}} - \sum_{r_1+r_2=k-1} \frac{p(p+1)}{r_1} C_{r_1}^{\frac{r_1-p}{p+1}} \cdot C_{r_2}^{\frac{r_2+2c}{p+1}}.$$

Наконец, число $a_c^0(k)$ или $a_{-c}^0(k)$ есть число всех возможных путей из точки $(0, 0)$ в точку $(-c, k)$ или соответственно в точку (c, k), а поэтому

$$a_c^0(k) = C_k^{\frac{k+c}{p+1}}, \quad a_{-c}^0(k) = C_k^{\frac{k-c}{p+1}}.$$

Подставив найденные значения $a_\alpha^\beta(k)$ в формулы (13_1) и (13_2) и учтя соотношения (8) — (12), получим:

$$P\{mD(n, m) < c\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{C_N^n} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{c}\right]} (-1)^{\nu+1} \sum_{\left(\sum_{i=1}^{\nu+1} k_i = N\right)} \left[\prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i C_{k_i}^{\frac{k_i+c_i}{p+1}} + \prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i' C_{k_i}^{\frac{k_i+c_i}{p+1}}\right]. \qquad (16)$$

Теорема доказана.

§ 3. Уклонения между эмпирической и теоретической кривыми распределения

Целью настоящего параграфа является нахождение функций распределения случайных величин:

$$D_n^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} [S_n(x) - F(x)], \quad D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - F(x)|.$$

По теореме В. И. Гливенко, при $m \to \infty$

$$P\left\{\sup_{-\infty < x < +\infty} |T_m(x) - F(x)| \to 0\right\} = 1.$$

Следовательно, считая n фиксированным, имеем:

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to\infty} P\{\sqrt{n}\, D^+(n, m) < z\} = P\{\sqrt{n}\, D_n^+ < z\}, \\ &\lim_{p\to\infty} P\{\sqrt{n}\, D(n, m) < z\} = P\{\sqrt{n}\, D_n < z\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, для получения функции распределения случайных величин D_n^+ и D_n нужно в равенствах (3) и (16) перейти к пределу при $p \to \infty$ и фиксированном n.

1. Мы имели:

$$P\{\sqrt{n}\, D^+(n, m) < z\} = 1 - \frac{c}{C_N^n} \sum_{k=c}^{N-\left[\frac{c}{p}\right]} \frac{1}{k} C_k^{\frac{k-c}{p+1}} \cdot C_{N-k}^{n-\frac{k-c}{p+1}}, \tag{18}$$

где

$$c = [pz\sqrt{n}], \quad 0 < z \leqslant \sqrt{n}, \quad N = n + m, \quad m = pn.$$

Полагая $\frac{k-c}{p+1} = r$, найдем предел r-го слагаемого в сумме (18):

$$A_r = \frac{c \cdot C_k^r \cdot C_{N-k}^{n-r}}{kC_N^n} = \frac{c \cdot k!\,(N-k)\,n!\,m!}{k \cdot r!\,(k-r)!\,(n-r)!\,(m-k+r)!\,N!}.$$

По формуле Стирлинга,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \cdot e^{\theta(n)},$$

где $\theta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Так как при $p \to \infty$ и фиксированных n и r числа k, $N-k$, $k-r$, $m-k+r$, m и N стремятся к бесконечности, то

$$A_r = \frac{c \cdot C_n^r \cdot k^k (N-k)^{N-k} m^m}{k \cdot (k-r)^{k-r} (m-k+r)^{m-k+r} N^N} \sqrt{\frac{k(N-k)\,m}{(k-r)(m-k+r)\,N}}\, e^{\theta(p)},$$

где $\theta(p) \to 0$ при $p \to \infty$.

Далее,

$$A_r = \frac{c \cdot C_n^r \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \left(1 + \frac{n-r}{m-k+r}\right)^{m-k+r}}{k \cdot \left(\frac{N}{k} - 1\right)^r \left(1 - \frac{r}{k}\right)^k \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(1 + \frac{r}{k-r}\right)\left(1 + \frac{n-r}{m-k+r}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\, e^{\theta(p)},$$

где с ростом p до бесконечности

$$\frac{c}{k}=\frac{[pz\sqrt{n}]}{[pz\sqrt{n}]+r(p+1)}\to\frac{z\sqrt{n}}{z\sqrt{n}+r},$$

$$1-\frac{k}{N}=1-\frac{[pz\sqrt{n}]+r(p+1)}{n(p+1)}\to 1-\frac{z\sqrt{n}+r}{n},$$

$$\frac{N}{k}-1=\frac{n(p+1)}{[pz\sqrt{n}]+r(p+1)}-1\to\frac{n}{z\sqrt{n}+r}-1,$$

$$\frac{\left(1+\frac{n-r}{m-k+r}\right)^{m-k+r}}{\left(1-\frac{z}{k}\right)^{k}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{m}}\to 1,$$

$$e^{\theta(p)}\sqrt{1+\frac{r}{k-r}\left(1+\frac{n-r}{m-k+r}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right)}\to 1.$$

Таким образом, находим:

$$\lim_{p\to\infty} A_r=\frac{z\sqrt{n}\,C_n^r(n-r+z\sqrt{n})^{n-r}(r+z\sqrt{n})^{r-1}}{n^n}. \qquad (19)$$

Если $r=n-\left[\frac{c}{p}\right]=n-[z\sqrt{n}]$, то $k=N-[z\sqrt{n}]$, $k-r=m$,

$$A_r=\frac{[z\sqrt{n}](N-[z\sqrt{n}])!\,n!}{\left(n-\frac{[z\sqrt{n}]}{p+1}\right)r!\,N!}\leqslant B\,\frac{1}{N(N-1)\cdots(N-[z\sqrt{n}]+1)},$$

где B — некоторая константа. Следовательно,

$$\lim_{p\to\infty} A_r=0.$$

Если $r=0$, то $k=c$; применяя формулу Стирлинга, получим:

$$A_0=\frac{C_{N-c}^n}{C_N^n}=\frac{(N-c)^{N-c}m^m}{(m-c)^{m-c}N^N}\sqrt{\frac{(N-c)\,m}{(m-c)\,N}}\,e^{\theta(p)},$$

т. е.

$$A_0=\left(1-\frac{c}{N}\right)^n\frac{\left(1+\frac{n}{m-c}\right)^{m-c}}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^m}\sqrt{\frac{(N-c)\,m}{(m-c)\,N}}\,e^{\theta(p)}.$$

Так как

$$\frac{c}{N}=\frac{[pz\sqrt{n}]}{n(p+1)}\to\frac{z}{\sqrt{n}},$$

а все остальные множители дают в пределе единицу, то

$$\lim_{p\to\infty} A_0=\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad (20)$$

и окончательно имеем, учитывая (17), (18), (19) и (20):

$$P\{\sqrt{n}\,D_n^+<z\}=1-\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n-$$

$$-z\sqrt{n}\sum_{r=1}^{n-[z\sqrt{n}]-1}\frac{C_n^r(n-r-z\sqrt{n})^{n-r}(r+z\sqrt{n})^{r-1}}{n^n}. \qquad (21)$$

Эта формула была установлена Н. В. Смирновым.

2. Мы имели [см. (16)]:

$$P\{mD(n, m) < c\} = = 1 - \frac{1}{C_N^n} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{c}\right]} (-1)^{\nu+1} \sum \left[\prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i\, C_{k_i}^{\frac{k_i+c}{p+1}} + \prod_{i=1}^{\nu+1} \delta_i' C_{k_i}^{\frac{k_i-c_i}{p+1}} \right].$$

Введем обозначения:

$$\delta_i^0 = \lim_{p\to\infty} \delta_i, \quad \delta_i'^0 = \lim_{p\to\infty} \delta_i', \quad c_i^0 = \lim_{p\to\infty} \frac{c_i}{p}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если функция распределения* $F(x)$ *величины* ξ *непрерывна, то при* $0 < z \leqslant \sqrt{n}$

$$\Phi_n(z) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\sqrt{n}}{z}\right]} (-1)^{\nu+1} \sum \left[\prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!\, n^n} \delta_i^0 (m_i - c_i^0)^{m_i} + \right.$$
$$\left. + \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!\, n^n} \delta_i'^0 (m_i + c_i^0)^{m_i} \right],$$

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} 0 \text{ при } z \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } z > \sqrt{n}. \end{cases}$$

Внутреннее суммирование распространяется на все m_i, *для которых* $\sum_{i=1}^{\nu+1} m_i = n$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{m}{c} = \frac{\sqrt{n}}{z}$, то и в данном случае можно переходить к пределу при $p \to \infty$ почленно. Обозначим

$$\frac{k_i + c_i}{p+1} = m_i, \quad \frac{k_i - c_i}{p+1} = \mu_i. \tag{22}$$

Нетрудно проверить, что $\sum_{i=1}^{\nu+1} c_i = 0$, а так как $\sum_{i=1}^{\nu+1} k_i = N$, то

$$\sum_{i=1}^{\nu+1} m_i = n, \quad \sum_{i=1}^{\nu+1} \mu_i = n. \tag{23}$$

Зафиксировав числа m_i и μ_i, найдем пределы δ_i и δ_i' при $p \to \infty$, учитывая, что $c = [pz\sqrt{n}]$.

При i нечетном

$$\lim_{p\to\infty} \delta_i = \lim_{p\to\infty} \frac{|c_i|}{k_i} = \frac{|c_i^0|}{m_i - c_i^0},$$

где $c_i^0 = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{c_i}{p}$, т. е.

$$c_i^0 = \begin{cases} (-1)^i z\sqrt{n} & \text{при } i = 1 \text{ или } \nu + 1, \\ (-1)^i 2z\sqrt{n} & \text{при } i \neq 1 \text{ и } \nu + 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\delta_i^0 = \lim_{p\to\infty} \delta_i = \begin{cases} \dfrac{z\sqrt{n}}{m_i + z\sqrt{n}} & \text{при } i = 1 \text{ или } \nu + 1, \\ \dfrac{2z\sqrt{n}}{m_i + 2z\sqrt{n}} & \text{при } i \neq 1 \text{ и } \nu + 1. \end{cases}$$

Аналогично находим предел δ_i' при $p \to \infty$ в случае четного i:

$$\delta_i'^0 = \lim_{p\to\infty} \delta_i' = \begin{cases} \dfrac{z\sqrt{n}}{\mu_i + z\sqrt{n}} & \text{при } i = \nu + 1, \\ \dfrac{2z\sqrt{n}}{\mu_i + 2z\sqrt{n}} & \text{при } i \neq \nu + 1. \end{cases} \tag{24}$$

Определим предел δ_i при i четном. Сначала найдем предел при $p \to \infty$ выражения

$$\Delta_p(c) = \frac{p(p+1)}{C_k^{\overline{\frac{k+c}{p+1}}}} \sum_{r_1+r_2=k-1} \frac{1}{r_1} C_{r_1}^{\overline{\frac{r_1-p}{p+1}}} \cdot C_{r_2}^{\overline{\frac{r_2+c}{p+1}}}.$$

Положим

$$\frac{k+c}{p+1} = m, \quad \frac{r_1+1}{p+1} = a_1, \quad \frac{r_2+c}{p+1} = a_2;$$

тогда имеем:

$$\Delta_p(c) = \frac{p(p+1)}{C_k^m} \sum_{a_1+a_2=m} \frac{1}{r_1} C_{r_1}^{a_1-1} \cdot C_{r_2}^{a_2} = \frac{1}{C_k^m} \sum_{a_1+a_2=m} \frac{p}{r_1} C_{r_1+1}^{a_1} \cdot C_{r_2}^{a_2}. \tag{25}$$

Как и при выводе формулы (21), найдем предел отдельного слагаемого в сумме (25) с фиксированными a_1 и a_2 в предположении, что $a_2 > [z\sqrt{n}]$:

$$B_r = \frac{p \cdot C_{r+1}^{a_1} \cdot C_{r_2}^{a_2}}{r_1 C_k^m} = \frac{p\, C_m^{a_1} (r_1+1)!\, r_2!\, (k-m)!}{r_1 (r_1+1-a_1)!\, (r_2-a_2)!\, k!}.$$

Так как при $p \to \infty$ величины r_1, r_2, k, (r_1+1-a_1), $(k-m)$ и (r_1-a_2) стремятся к бесконечности, то, применяя формулу Стирлинга, получим:

$$B_r = \frac{p C_m^{a_1} (r_1+1)^{r_1+1}\, r_2^{r_2} (k-m)^{k-m}}{r_1 (r_1+1-a_1)^{r_1+1-a_1} (r_2-a_2)^{r_2-a_2} k^k} \sqrt{\frac{(r_1+1)\, r_2 (k-m)}{(r_1+1-a)\,(r_2-a_2)k}}\, e^{\theta(p)},$$

где $\theta(p) \to 0$ при $p \to \infty$.

Далее,

$$B_r = \frac{p \cdot C_m^{a_1} \left(\frac{r_1+1}{k}\right)^{a_1} \left(\frac{r_2}{k}\right)^{a_2} e^{\theta(p)}}{r_1 \left(1 + \frac{m}{k-m}\right)^{k-m}} \left(1 + \frac{a_2}{r_2-a_2}\right)^{r_2-a_2} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{a_1}{r_1+1-a_1}\right)^{r_1+1-a_1} \sqrt{\frac{(r_1+1)\, r_2 (k-m)}{(r_1+1-a_1)(r_2-a_2)\, k}},$$

где при $p \to \infty$

$$\frac{p}{r_1} = \frac{p}{a_1(p+1)-1} \to \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{r_1+1}{k} = \frac{a_1(p+1)}{m(p+1)-c} \to \frac{a_1}{m - z\sqrt{n}},$$

$$\frac{r_2}{k} = \frac{a_2(p+1)-c}{m(p+1)-c} \to \frac{a_2 - z\sqrt{n}}{m - z\sqrt{n}},$$

$$\frac{\left(1+\frac{a_2}{r_2-a_2}\right)^{r_2-a_2}\left(1+\frac{a_1}{r_1+1-a_1}\right)^{r_1+1-a_1}}{\left(1+\frac{m}{k-m}\right)^{k-m}} \sqrt{\frac{(r_1+1)\,r_2\,(k-m)}{(r_1+1-a_1)(r_2-a_2)\,k}}\, e^{\theta(p)} \to 1.$$

Итак,

$$\lim_{p\to\infty} B_r = C_m^{a_1} \frac{a_1^{a_1-1}(a_2 - z\sqrt{n})^{a_2}}{(m - z\sqrt{n})^m}.$$

Если $a_2 = [z\sqrt{n}]$, то $r_2 = [z\sqrt{n}]$ и

$$B_{r_0} = \frac{p \cdot C_{k-[z\sqrt{n}]}^{m-[z\sqrt{n}]}}{(k - [z\sqrt{n}] - 1)\, C_k^m}.$$

Таким образом,

$$B_{r_0} = B \frac{1}{k(k-1)\ldots(k-[z\sqrt{n}]+1)},$$

т. е.

$$\lim_{p\to\infty} B_{r_0} = 0.$$

Итак,

$$\lim_{p\to\infty} \Delta_p(c) = \Delta(c) = \sum_{r=[z\sqrt{n}]+1}^{m-1} \frac{C_m^r (m-r)^{m-r-1}(r - z\sqrt{n})^r}{(m - z\sqrt{n})^m},$$

и, значит,

$$\delta_i^0 = 1 - \sum_{r=[2z\sqrt{n}]+1}^{m_i-1} \frac{C_{m_i}^r (m_i - r)^{m_i-r-1}(r - 2z\sqrt{n})^r}{(m_i - 2z\sqrt{n})^{m_i}} \quad \text{при } i \neq \nu+1 \text{ четном.} \tag{26}$$

Аналогично находим:

$$\delta_i'^0 = 1 - \sum_{r=[z\sqrt{n}]+1}^{m_i-1} \frac{C_{m_i}^r (m_i - r)^{m_i-r-1}(r - z\sqrt{n})^r}{(m_i - z\sqrt{n})^{m_i}} \quad \text{при } i = 1, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_i'^0 = 1 - \sum_{r=[2z\sqrt{n}]+1}^{m_i-1} \frac{C_{m_i}^r (m_i - r)^{m_i-r-1}(r - 2z\sqrt{n})^r}{(m_i - 2z\sqrt{n})^{m_i}} \quad \text{при } i \neq 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{и } \nu+1 \text{ нечетном,} \\ &\delta_{\nu+1}^0 = \delta_{\nu+1}'^0 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Определим при $p \to \infty$ предел выражения

$$B_\nu^+ = \frac{1}{C_N^n} \prod_{i=1}^{\nu+1} C_{k_i}^{\overline{\frac{k_i+c_i}{p+1}}}. \tag{29}$$

Учтя (22) и то, что при $p \to \infty$ числа k_i, N и m стремятся к бесконечности, мы, применив формулу Стирлинга, находим:

$$B_\nu^+ = \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{m!\, n!\, k_i!}{(k_i - m_i)!\, m_i!\, N!} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!} \frac{m^m k_i^{k_i}}{(k_i - m_i)^{k_i - m_i} N^N} \sqrt{\frac{m k_i}{N (k_i - m_i)}}\, e^{\theta(p)},$$

где $\theta(p) \to 0$ при $p \to \infty$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\nu+1} (k_i - m_i) = m,$$

и, далее,

$$B_\nu^+ = \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!} \left(\frac{k_i}{N}\right)^{m_i} \frac{\left(1 + \frac{m_i}{k_i - m_i}\right)^{k_i - m}}{\left(\frac{N}{m}\right)^m} \sqrt{\left(1 + \frac{m_i}{k_i - m_i}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\, e^{\theta(p)}.$$

При $p \to \infty$ имеем:

$$\frac{k_i}{N} = \frac{m_i (p+1) - c_i}{n (p+1)} \to \frac{m_i - c_i^0}{n},$$

а так как

$$\prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{\left(1 + \frac{m_i}{k_i - m_i}\right)^{k_i - m_i}}{\left(\frac{N}{m}\right)^m} \sqrt{\left(1 + \frac{m_i}{k_i - m_i}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\, e^{\theta(p)} \to 1,$$

то

$$\lim_{p \to \infty} B_\nu^+ = \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!\, n^n} (m_i - c_i^0)^{m_i}. \tag{30}$$

Аналогично находим:

$$\lim_{p \to \infty} B_\nu^- = \lim_{p \to \infty} \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{C_{k_i}^{\overline{\frac{k_i - c_i}{p+1}}}}{C_N^n} = \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{\mu_i!\, n^n} (\mu_i + c_i^0)^{\mu_i}. \tag{31}$$

Итак, окончательно, в силу (17), (23), (24), (26) — (28), (30) и (31), получаем:

$$\Phi_n(z) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\sqrt{n}}{z}\right]} (-1)^{\nu+1} \sum \left[\prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!\, n^n} \delta_i^0 (m_i - c_i^0)^{m_i} + \right.$$

$$\left. + \prod_{i=1}^{\nu+1} \frac{n!}{m_i!\, n^n} \delta_i'^0 (m_i + c_i^0)^{m_i} \right],$$

где внутреннее суммирование распространяется на все m_i, для которых $\sum_{i=1}^{\nu+1} m_i = n$. Теорема доказана.

Примечание. Несколько изменив ход рассуждений, можно получить совместную функцию распределения максимума и минимума уклонений эмпирической от теоретической кривой распределения. При этом изменится только смысл c_i^0.

Выражаю сердечную благодарность Б. В. Гнеденко за постановку задачи и руководство при ее решении.

Поступило
23.XI.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смирнов Н. В., Приближение случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, т. X (1944), 179—206.

[2] Гнеденко Б. В. и Королюк В. С., О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXX, № 4 (1951), 525—528.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 97—102

К. А. РОДОССКИЙ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДУЛЯ ζ-ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается теорема о значениях модуля отрезка обыкновенного ряда Дирихле и выводятся новые факты о распределении малых значений модуля ζ-функций в критической полосе.

§ 1

Пусть дан отрезок обыкновенного ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{y<n\leqslant z} \frac{a_n}{n^s}.$$

Здесь $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, $z > y \geqslant 3$, $|a_n| \leqslant A\tau(n)$, где A — постоянная, $\tau(n)$ — число делителей n.

Определим прямоугольник

$$\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad \frac{T}{2} \leqslant t \leqslant T, \qquad (R)$$

где $\Delta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $T > 0$. Под c_1, c_2 будем понимать абсолютные положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть числа* $\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\tau^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют условиям:*

1) $\rho^{(k)} \in R$,
2) $|\tau^{(k)} - i^{(l)}| > B$ *при* $k \neq l$,
3) $|f(\rho^{(k)})| > M$,

где B *и* M — *положительные постоянные. Обозначим через* $Q(\Delta, T)$ *наибольшее количество чисел* $\rho^{(k)}$, *которые могут обладать перечисленными свойствами. Тогда*

$$Q(\Delta, T) < c_1 A^2 M^{-2} L^6 \ln^{12} z \,(T y^{1-2\Delta} + z^{2(1-\Delta)})$$

при условии

$$\ln^3 z \geqslant \max\{L^{-3}, B^{-1}L^{-3}\},$$

где

$$L^3 = \max\{8AM^{-1}, 1\}.$$

Доказательство дано в § 3—5.

ТЕОРЕМА 2. *Покроем прямоугольник* R *прямоугольниками* R_n *вида:*

$$\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad \tfrac{1}{2}T + n \leqslant t < \tfrac{1}{2}T + n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{2}\right], \qquad (R_n)$$

где

$$\sqrt{\frac{\ln(8c_2\ln T)}{\ln T}}+\frac{1}{2}\leqslant\Delta\leqslant 1 \text{ и } T\geqslant 3.$$

Тогда число прямоугольников R_n, *для которых*

$$\min_{s\in R_n}|\zeta(s)|<\left(5\ln T\cdot T^{\frac{(2\Delta-1)(1-\Delta)}{2-3\Delta+2\Delta^2}}\right)^{-1},$$

не превосходит

$$c_2\ln^{12}T\cdot T^{\frac{(1+2\Delta)(1-\Delta)}{2-3\Delta+2\Delta^2}}.$$

Доказательство дано в § 6. Первоначальный вариант этой теоремы был опубликован в заметке ([1]).

§ 2

В дальнейшем изложении нам придется ссылаться на две следующие леммы.

ЛЕММА 1. *При* $\Delta\geqslant\frac{1}{2}$ *имеют место неравенства*:

a) $\sum\limits_{y<n\leqslant z}\frac{\tau(n)}{n^\Delta}<4\ln^2 z\cdot z^{1-\Delta}$,

b) $\sum\limits_{y<n\leqslant z}\frac{\tau^2(n)}{n^{2\Delta}}<c_3\ln^4 z\cdot y^{1-2\Delta}$,

c) $\sum\sum\limits_{1\leqslant m<n\leqslant z}\frac{\tau(m)\,\tau(n)}{(mn)^\Delta}\cdot\frac{m}{n-m}<c_4\ln^{5,5}z\cdot z^{2(1-\Delta)}$.

Доказательство основывается на том, что

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)<2x\ln x,\qquad \sum_{n\leqslant x}\tau^2(n)<c_5\ln^3 x\cdot x$$

[см., например, ([2]), лемма 4].

ЛЕММА 2. *При* $0<\varepsilon<(2\ln z)^{-1}$ *и натуральных* n *и* m *таких, что* $z\geqslant n>m$, *имеем:*

$$\left|\sum_{l=1}^{l_0}\left(\frac{m}{n}\right)^{i\varepsilon l}\right|<4\varepsilon^{-1}\left(1+\frac{m}{n-m}\right).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\left|\sum_{l=1}^{l_0}\left(\frac{m}{n}\right)^{i\varepsilon l}\right|\leqslant\frac{2}{\left|1-e^{i\varepsilon\ln\frac{n}{m}}\right|}<\frac{2}{\sin\left(\varepsilon\ln\frac{n}{m}\right)}<\frac{4}{\varepsilon\ln\frac{n}{m}}<4\varepsilon^{-1}\left(1+\frac{m}{n-m}\right),$$

что и требовалось доказать.

§ 3

Переходим к доказательству теоремы 1. Будем вести его от противного, предполагая, что

$$Q(\Delta,T)>c_1A^2M^{-2}L^6\ln^{12}z\cdot(Ty^{1-2\Delta}+z^{2(1-\Delta)}).$$

ЛЕММА 3. *Пусть натуральное* $\lambda=O(\sqrt{\ln z})$, $u=z^{(1-\Delta)2^{-\lambda}}$ *и* $\sigma\geqslant\Delta\geqslant\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\left|\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial\sigma^{\lambda+1}}f(s)\right|\leqslant Mu^{2^{\lambda+1}-1}(L\ln z)^{3(\lambda+1)}.$$

Доказательство. Применяя неравенство а) леммы 1, получаем:

$$\left|\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial\sigma^{\lambda+1}} f(s)\right| \leqslant A \sum_{y<n\leqslant z} \frac{\tau(n)\ln^{\lambda+1} n}{n^\sigma} \leqslant 4A\ln^{\lambda+3} z\cdot z^{1-\Delta} \leqslant$$

$$\leqslant M\cdot 4AM^{-1} z^{\frac{1-\Delta}{2^\lambda}(2^{\lambda+1}-1)} \ln^{\lambda+3} z \leqslant Mu^{2^{\lambda+1}-1}(L\ln z)^{3\lambda+1},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Для каждого* $\rho^{(k)}$ *существуют такие* $\beta_1^{(k)} \geqslant \Delta \geqslant \frac{1}{2}$ *и целое* $\nu_k \in [0, \lambda]$, *что выполняются неравенства*:

$$\left|\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial\sigma^{\nu_k}} f(\beta_1^{(k)} + i\tau^{(k)})\right| \geqslant Mu^{2^{\nu_k}-1} (L\ln z)^{3\nu_k},$$

$$\left|\frac{\partial^{\nu_k+1}}{\partial\sigma^{\nu_k+1}} f(s)\right| < Mu^{2^{\nu_k+1}-1} (L\ln z)^{3(\nu_k+1)} \text{ при } \sigma \geqslant \Delta.$$

Доказательство. При $\nu_k = 0$ первое неравенство имеет место по условию теоремы, при $\nu_k = \lambda$ выполняется второе неравенство в силу леммы 3. Таким образом, ν_k есть наименьшее целое $\geqslant 0$, при котором выполняется второе неравенство.

Для $Q_1 \geqslant Q(\Delta, T)\cdot(\lambda+1)^{-1}$ чисел $\rho^{(k)}$ будет одно и то же $\nu_k = \nu$, при котором будет выполняться лемма 4. Покроем сегмент $[\Delta, 1]$ без перекрытий при помощи сегментов длины $\delta_\nu = (2u^{2^\nu}(L\ln z)^3)^{-1}$. Число покрывающих сегментов не превосходит

$$\frac{1}{2}\delta_\nu^{-1} = u^{2^\nu}(L\ln z)^3$$

и в одном из них, имеющем вид $[\Delta_1, \Delta_1 + \delta_\nu]$ $(\Delta_1 \geqslant \Delta)$, будут находиться $Q_2 \geqslant Q_1(u^{2^\nu}(L\ln z)^3)^{-1}$ чисел $\beta_1^{(k)}$. В силу леммы 4, для каждого $\rho^{(k)}$ (из числа Q_2) мы можем написать следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial\sigma^\nu} f(\Delta_1 + i\tau^{(k)})\right| \geqslant \left|\frac{\partial^\nu}{\partial\sigma^\nu} f(\beta_1^{(k)} + i\tau^{(k)})\right| - \left|\int_{\Delta_1}^{\beta_1^{(k)}} \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial\sigma^{\nu+1}} f(\sigma + i\tau^{(k)})\,d\sigma\right| \geqslant$$

$$\geqslant Mu^{2^\nu-1}(L\ln z)^{3\nu} - \delta_\nu Mu^{2^{\nu+1}-1}(L\ln z)^{3(\nu+1)} = \frac{1}{2}Mu^{2^\nu-1}(L\ln z)^{3\nu} = M_1. \quad (1)$$

§ 4

Построим Q_2 неперекрывающихся сегментов вида:

$$\left[\tau^{(k)} - \frac{B}{2},\ \tau^{(k)} + \frac{B}{2}\right]. \qquad (S^{(k)})$$

ЛЕММА 5. *При* $\sigma \geqslant \Delta \geqslant \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\partial^{\nu+\lambda+1}}{\partial\sigma^\nu \partial t^{\lambda+1}} f(s)\right| < M_1 u^{2^{\lambda+1}-1}(L\ln z)^{3(\lambda+1)}.$$

Доказательство. На основании неравенства а) леммы 1, получаем:

$$\left|\frac{\partial^{\nu+\lambda+1}}{\partial\sigma^\nu\partial t^{\lambda+1}} f(s)\right| \leqslant A \sum_{y<n\leqslant z} \frac{\tau(n)\ln^{\nu+\lambda+1} z}{n^\sigma} \leqslant 4A\ln^{\nu+\lambda+1} z\cdot z^{1-\Delta} <$$

$$< \frac{1}{2}Mu^{2^\nu-1}(L\ln z)^{3\nu}\cdot 8AM^{-1}\ln^{3(\lambda+1)} z\cdot u^{2^{\lambda+1}-1} < M_1(L\ln z)^{3(\lambda+1)}\cdot u^{2^{\lambda+1}-1},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. *Для каждого k, для которого выполняется неравенство* (1), *найдется* $\tau_1^{(k)} \in S^{(k)}$ *и целое* $\mu_k \geqslant 0$ *такие, что будут выполняться неравенства:*

$$\left| \frac{\partial^{\nu+\mu_k}}{\partial^\nu \partial t^{\mu_k}} f(\Delta_1 + i\tau_1^{(k)}) \right| \geqslant M_1 u^{2^{\mu_k}-1} (L \ln z)^{3\mu_k},$$

$$\left| \frac{\partial^{\nu+\mu_\nu+1}}{\partial\sigma^\nu \partial t^{\mu_k+1}} f(\Delta_1 + it) \right| < M_1 u^{2^{\mu_k}-1} (L \ln z)^{2(\mu_k+1)}, \qquad t \in S^{(k)}.$$

Доказательство. Первое неравенство выполняется при $\mu_k = 0$ в силу (1), второе неравенство выполняется при $\mu_k = \lambda$ в силу леммы (5). В качестве μ_k берем наименьшее целое $\geqslant 0$, при котором выполняется второе неравенство.

Для $Q_3 \geqslant Q_2(\lambda+1)^{-1}$ чисел $\tau_1^{(k)}$ будут выполняться неравенства леммы 6 с одним и тем же $\mu_k = \mu$.

Берем теперь

$$\varepsilon_\mu = \left(2u^{2^\mu} (L \ln z)^3\right)^{-1} < \frac{B}{2}$$

(последнее неравенство выполняется при достаточно большом z) и строим числа

$$x_n = \frac{1}{2} T + \varepsilon_\mu l, \text{ где } l = 1, 2, \ldots, \quad l_0 = [T 2^{-1} \varepsilon_\mu^{-1}].$$

Возьмем из чисел x_n число x_{n_k}, ближайшее к $\tau_1^{(k)}$. Тогда

$$\left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + ix_{l_k}) \right| \geqslant \left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + i\tau_1^{(k)}) \right| - \left| \int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{x_{l_k}} \frac{\partial^{\nu+\mu+1}}{\partial\sigma^\nu \partial t^{\mu+1}} f(\Delta_1 + it)\, dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant M_1 u^{2^{\mu+1}-1} (L \ln z)^{3(\mu+1)} - M_1 u^{2^{\mu+1}-1} (L \ln z)^{3(\mu+1)} \varepsilon_\mu = \frac{1}{2} M_1 u^{2^\mu - 1} (L \ln z)^{3\mu}. \quad (2)$$

Возвышая неравенство (2) в квадрат и суммируя по всем тем k, для которых оно имеет место, получаем:

$$\sum_{(x_{l_k})} \left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + ix_{l_k}) \right|^2 \geqslant \frac{M^2}{16} (L \ln z)^{6(\nu+\mu)} u^{2^{\nu+1} + 2^{\mu+1} - 4} Q_3, \quad (3)$$

причем

$$Q_3 \geqslant Q_2(\lambda+1)^{-1} \geqslant Q_1 (u^{2^\nu} L^3 \ln^3 z)^{-1} (\lambda+1)^{-1} \geqslant Q(\Delta, T) (u^{2^\nu} L^3 \ln^3 z)^{-1} (\lambda+1)^{-2}. \quad (4)$$

§ 5

Оценим левую часть неравенства (3) сверху:

$$\sum_{(x_{l_k})} \left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + ix_{l_k}) \right|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{l_0} \left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + ix_l) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant l_0 \ln^{2(\nu+\mu)} z \sum_{y < n \leqslant z} \frac{|a_n|^2}{n^{2\Delta}} + \ln^{2(\nu+\mu)} z \sum_{n > y}^{z} \sum_{m > y}^{z} \frac{|a_n a_m|}{(nm)^\Delta} \left| \sum_{l=1}^{l_0} \left(\frac{m}{n}\right)^{i\varepsilon_\mu l} \right|. \quad (5)$$

Так как $|a_n| \leqslant A\tau(n)$, то, на основании неравенства b) леммы 1, имеем:

$$l_0 \sum_{y<n\leqslant z} \frac{|a_n|^2}{n^{2\Delta}} < c_3 \frac{A^2T}{2\varepsilon_\mu} \ln^{2(\nu+\mu)+4} z \cdot y^{1-2\Delta}. \tag{6}$$

В силу леммы 2 и неравенств a) и c) леммы 1, получаем:

$$\ln^{2(\nu+\mu)} z \sum_{n>y}^{z} \sum_{\substack{m>y \\ n\neq m}}^{z} \frac{|a_n a_m|}{(nm)^{\Delta}} \left| \sum_{l=1}^{l_0} \left(\frac{m}{n}\right)^{i\varepsilon_\mu l} \right| <$$

$$< 8A^2 \ln^{2(\nu+\mu)} z \cdot \varepsilon_\mu^{-1} \sum\sum_{y<m<n\leqslant z} \frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^{\Delta}} \left(1 + \frac{m}{n-m}\right) <$$

$$< 8A^2 \varepsilon_\mu^{-1} \ln^{2(\nu+\mu)} z \cdot (16 \ln^4 z + c_4 \ln^{5,5} z) z^{2(1-\Delta)}. \tag{7}$$

Из неравенств (5), (6) и (7) следует:

$$\sum_{(x_{l_k})} \left| \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial\sigma^\nu \partial t^\mu} f(\Delta_1 + i x_{l_k}) \right|^2 \leqslant c_6 A^2 L^3 \ln^{2(\nu+\mu)+8,5} z \cdot u^{2\mu} (T y^{1-2\Delta} + z^{2(1-\Delta)}). \tag{8}$$

Сопоставляя неравенства (3), (4) и (8), получаем:

$$Q(\Delta, T) \leqslant 16 c_6 A^2 M^{-2} L^6 \ln^{-4(\nu+\mu)+11,5} z \cdot (\lambda+1)^2 u^{-2^\nu - 2^\mu + 4} (T y^{1-2\Delta} + z^{2(1-\Delta)}).$$

В последнем неравенстве полагаем $\lambda = \left[\frac{\ln \ln z}{\ln 2}\right] + 1$. При таком выборе λ наибольшее значение правой части будет при $\nu = \mu = 0$. Отсюда непосредственно следует доказываемая теорема.

§ 6

Переходим к доказательству теоремы 2. Покроем прямоугольник R прямоугольниками R_n вида:

$$\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad \frac{T}{2} + n \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} + n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{2}\right]. \tag{R_n}$$

Пусть для некоторых нечетных n имеют место неравенства:

$$\min_{s \in R_n} |\zeta(s)| < (5 \ln T \cdot y^{1-\Delta})^{-1}, \tag{9}$$

где

$$y = T^{\frac{2\Delta-1}{2-3\Delta+\Delta^2}} \leqslant T \quad \text{при } \Delta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Эти R_n снова перенумеруем, придавая им номера, идущие подряд: $k = 1, 2, \ldots$. Ту точку R_k, в которой достигается минимум $|\zeta(s)|$, обозначим через

$$\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\tau^{(k)}.$$

В приближенном функциональном уравнении [см. ([3]), стр. 82]

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n\leqslant \zeta} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(x^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}}),$$

где $x\zeta = 2\pi|t|$, $\chi(s) = O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma})$, полагаем $s = \rho^{(k)}$ и, учитывая (9), получаем оценку:

$$\left|\sum_{n<x} \frac{1}{n^{\rho_k}}\right| < (5 \ln T \cdot y^{1-\Delta})^{-1} + O(T^{\frac{1}{2}} x^{-\Delta} + T^{-\frac{1}{2}} x^{1-\Delta}). \qquad (10)$$

При помощи неравенства (10) оцениваем следующую сумму:

$$\left|\sum_{n<y} \frac{\mu(n)}{n^{\rho_k}} \sum_{m<\frac{z}{n}} \frac{1}{m^{\rho_k}}\right| \leqslant \frac{1}{4} + c_2 T^{\frac{1}{2}} z^{-\Delta} y + c_2 T^{-\frac{1}{2}} z^{1-\Delta} \cdot \ln y.$$

Выбирая

$$z = (8c_2)^{\frac{1}{\Delta}} T^{\frac{\frac{1}{2}+\Delta}{2-3\Delta+2\Delta^2}}$$

и считая, что

$$\Delta - \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{\frac{\ln(8c_2 \ln T)}{\ln T}},$$

из последнего неравенства получаем:

$$\left|\sum_{n<y} \frac{\mu(n)}{n^{\rho_k}} \sum_{m<\frac{z}{n}} \frac{1}{m^{\rho_k}}\right| < \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Из неравенства (11) и тождества

$$\sum_{n=1}^{z} \frac{\mu(n)}{n^{\rho_k}} \sum_{m<\frac{z}{n}} \frac{1}{m^{\rho_k}} = 1$$

получаем неравенство

$$\left|\sum_{n>y}^{z} \frac{\mu(n)}{n^{\rho_k}} \sum_{m<\frac{z}{n}} \frac{1}{n^{\rho_k}}\right| > \frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Полагая $f(s) = \sum\limits_{y<n\leqslant z} \frac{a_n}{n^s}$, где $a_n = \sum\limits_{d/n,\, d>y} \mu(d)$ и $|a_n| \leqslant \tau(n)$, мы можем записать неравенство (12) в виде $|f(\rho^{(k)})| > \frac{1}{2}$.

Таким образом, точки $\rho^{(k)}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1 с $A = 1$, $B = 1$, $M = \frac{1}{2}$. Подставляя в оценку $Q(\Delta, T)$ теоремы 1 установленные значения A, B, M, y, z, получаем утверждение теоремы 2 для прямоугольников R_n с нечетным n. Аналогичная оценка получается и для четных номеров. Тем самым теорема 2 доказана.

Поступило
4. I. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Родосский К. А., К теории ζ-функции, Доклады Ак. наук СССР, т. 86, № 6 (1952), 1069—1070.

[2] Чудаков Н. Г., On Goldbach — Vinogradov's theorem, Ann. of Math., vol. 48, № 3 (1947), 515—545.

[3] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, М., 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 103—124

В. С. КОРОЛЮК

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ А. Н. КОЛМОГОРОВА И Н. В. СМИРНОВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе определяются первые два члена асимптотических разложений по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ для функций распределения максимальных уклонений между двумя эмпирическими кривыми распределения, а также между эмпирической и теоретической кривыми распределения.

Одной из задач математической статистики является задача проверки статистических гипотез, которая формулируется так: на основании некоторых соображений можно сказать, что функция распределения случайной величины ξ есть $F(x)$; спрашивается, совместимы ли наблюденные значения

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_n \tag{1}$$

с гипотезой, что ξ имеет действительно распределение $F(x)$?

Если имеются две серии независимых наблюдений

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_n \text{ и } y_1,\ y_2, \ldots ,\ y_m \quad (N = m + n,\ m \geqslant n),$$

то спрашивается, совместимы ли наблюденные значения с гипотезой, что обе серии получены в результате наблюдения над случайными величинами с одним и тем же распределением $F(x)$?

А. Н. Колмогоров (1) предложил критерий для проверки первой из указанных гипотез. Н. В. Смирновым (2) был предложен аналогичный критерий для проверки второй гипотезы.

Критерий А. Н. Колмогорова состоит в следующем:

По результатам наблюдений (1) строится эмпирическая функция распределения

$$S_n(t) = \frac{K_n(t)}{n},$$

где $K_n(t)$ — число x_k, меньших, чем t.

ТЕОРЕМА А. Н. КОЛМОГОРОВА. *Если $F(t)$ непрерывна, то*

$$P\{\sqrt{n} \sup_{-\infty<t<+\infty} |S_n(t) - F(t)| < z\} \xrightarrow[n\to\infty]{} K(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leqslant 0. \end{cases}$$

Критерий Н. В. Смирнова основан на следующей теореме.

ТЕОРЕМА Н. В. СМИРНОВА. *Если $F(t)$ непрерывна, то*

$$P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_{-\infty<t<+\infty}|T_m(t)-S_n(t)|<z\right\}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}K(z),$$

где $T_m(t)$ — эмпирическая функция распределения второй серии наблюдений.

Кроме указанных теорем, для проверки сформулированных гипотез могут быть использованы следующие теоремы [см. (2)].

ТЕОРЕМА 1. *Если $F(t)$ непрерывна, то*

$$P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<+\infty}[S_n(t)-F(t)]<z\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1-e^{-2z^2}\quad(z>0).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $F(t)$ непрерывна, то*

$$P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_{-\infty<t<+\infty}[T_m(t)-S_m(t)]<z\right\}\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}1-e^{-2z^2}\quad(z>0).$$

Теоремы А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова определяют предельные распределения максимума двусторонних и односторонних уклонений между эмпирическим и теоретическим распределениями и между двумя эмпирическими распределениями при неограниченном числе наблюдений. Ясно, что указанные теоремы не учитывают влияния, которое оказывает на распределение максимума уклонений число наблюдений. Таким образом возникают две задачи:

1. Нахождение вида распределений

$$\Phi_n(z)=P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<+\infty}|S_n(t)-F(t)|<z\right\},$$

$$\Phi_{nm}(z)=P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_{-\infty<t<+\infty}|T_m(t)-S_n(t)|<z\right\},$$

$$\Phi_n^+(z)=P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<+\infty}[F(t)-S_n(t)]<z\right\},$$

$$\Phi_{nm}^+(z)=P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_{-\infty<t<+\infty}[T_m(t)-S_n(t)]<z\right\}$$

при фиксированных значениях n и m.

2. Оценка погрешностей, которые возникают при замене точных распределений предельными.

В настоящее время известен [см. (3), (4)] вид точных распределений $\Phi_n^+(z)$, $\Phi_n(z)$, $\Phi_{nm}^+(z)$, $\Phi_{nm}(z)$ при $m=np$, где p — целое число.

Н. В. Смирновым (2) было доказано, что

$$\Phi_n^+(z)=1-e^{-2z^2}\left[1+\frac{2z}{3\sqrt{n}}+O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right].$$

В работе Б. В. Гнеденко (5) даны асимптотические разложения для функций $\Phi_{nn}^+(z)$ и $\Phi_{nn}(z)$.

В настоящей работе определяются первые два члена асимптотических разложений для функций $\Phi_{nm}^+(z)$, $\Phi_{nm}(z)$, $\Phi_n^+(z)$, $\Phi_n(z)$, а также указывается правило, по которому могут быть вычислены любые члены разложения указанных функций.

Последующие параграфы посвящены доказательству следующих теорем:

ТЕОРЕМА 1. *В точках скачков функции распределения максимума разности между двумя эмпирическими кривыми распределения* $\Phi^{+}_{nm}(z)$ *при* $z = o\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right)$ *имеет место формула:*

$$\Phi^{+}_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty<t<+\infty} [T_m(t) - S_n(t)] < z\right\} =$$
$$= 1 - e^{-2z^2}\left[1 - \sqrt{\frac{nm}{N}}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\frac{2z}{3} + \frac{m^2+mn+n^2}{Nmn}\left[\frac{2z^2}{3}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{z^{11}}{n^{\frac{3}{2}}} e^{-2z^2}\right)\right].$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция распределения максимума разности между теоретической и эмпирической кривыми распределения* $\Phi^{+}_{n}(z)$ *при* $z = o\left(\sqrt[6]{n}\right)$ *представима в виде:*

$$\Phi^{+}_{n}(z) = P\left\{\sqrt{n} \sup_{-\infty<t<+\infty} [F(t) - S_n(t)] < z\right\} =$$
$$= 1 - e^{-2z^2}\left[1 + \frac{2z}{3\sqrt{n}} + \frac{2z^2}{3n}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right)\right] + O\left(\frac{z^{11}}{n^{\frac{3}{2}}} e^{-2z^2}\right).$$

ТЕОРЕМА 3. *В точках скачков функции распределения максимума модуля разности между двумя эмпирическими кривыми распределения* $\Phi_{nm}(z)$ *при* $z = o\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right)$ *имеет место формула:*

$$\Phi_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty<t<+\infty} |T_m(t) - S_n(t)| < z\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} +$$
$$+ \frac{m^2+mn+n^2}{Nmn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{2k^2z^2}{3}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right) e^{-2k^2z^2} + O\left(\frac{z^{11}}{n^{\frac{3}{2}}} e^{-2z^2}\right).$$

ТЕОРЕМА 4. *Функция распределения максимума модуля разности между теоретической и эмпирической кривыми распределения* $\Phi_n(z)$ *при* $z = o\left(\sqrt[6]{n}\right)$ *представима в виде:*

$$\Phi_n(z) = P\left\{\sqrt{n} \sup_{-\infty<t<+\infty} |F(t) - S_n(t)| < z\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{2k^2z^2}{3}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right) e^{-2k^2z^2} + O\left(\frac{z^{11}}{n^{\frac{3}{2}}} e^{-2z^2}\right).$$

Заметим, что для двусторонних уклонений первый член для асимптотических разложений имеет порядок $1/n$, а не $\frac{1}{\sqrt{n}}$, как обычно в теории вероятностей.

§ 1. Вывод разностного уравнения

Пусть над случайными величинами с одной и той же непрерывной функцией распределения $F(t)$ произведены две серии взаимно независимых наблюдений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ $(N = m + n,\ m \geqslant n)$. Расположим все результаты наблюдений по величине

$$z_1 < z_2 < \ldots < z_N \tag{2}$$

и введем случайные величины

$$\varepsilon_r = \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{nm}{N}}, & \text{если } z_r = y_i, \\ -\beta = -\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{nm}{N}}, & \text{если } z_r = x_j. \end{cases}$$

Рассмотрим суммы

$$S_k = \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_r \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad S_0 = 0.$$

Легко видеть, что

$$S_k = \sqrt{\frac{nm}{N}}\,[T_m(t) - S_n(t)],$$

причем t определяется как наименьший корень уравнения $K_N(t) = k$, где $K_N(t)$ — число наблюдений в ряду (2), меньших, чем t. Следовательно,

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} S_k = \max_{-\infty < t < +\infty} \sqrt{\frac{nm}{N}}\,[T_m(t) - S_n(t)],$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |S_k| = \max_{-\infty < t < +\infty} \sqrt{\frac{nm}{N}}\,|T_m(t) - S_n(t)|.$$

Введем распределения

$$p^+(x, t; z) = P\left\{\max_{r \leqslant k} S_r < z \,/\, S_k = x\right\}, \tag{3}$$

$$p(x, t; z) = P\left\{\max_{r \leqslant k} |S_r| < z \,/\, S_k = x\right\}, \tag{4}$$

где t принимает значение вида $\frac{k}{N}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, а x — возможные значения сумм S_k. Таким образом функции $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$, во-первых, зависят от n и m, а во-вторых, определены в конечном числе точек плоскости (x, t). В схеме блуждания, описываемой суммами S_k в плоскости (x, t), точки, в которых определены функции $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$, есть узловые точки путей, координаты которых имеют вид:

$$x = r\alpha - s\beta, \quad t = \frac{k}{N} \quad (k = r + s, \quad r, s \geqslant 0). \tag{5}$$

Из определения функций $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$ следует, что

$$\Phi^+_{nm}(z) = p^+(0, 1; z), \quad \Phi_{nm}(z) = p(0, 1; z). \tag{6}$$

В силу теоремы В. И. Гливенко ([6]),

$$\begin{aligned} \Phi_n^+(z) &= \lim_{m\to\infty} \Phi_{nm}^+(z) = \lim_{m\to\infty} p^+(0, 1; z), \\ \Phi_n(z) &= \lim_{m\to\infty} \Phi_{nm}(z) = \lim_{m\to\infty} p(0, 1; z). \end{aligned} \tag{7}$$

Для определения функций $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$ обратимся к схеме блуждания, определяемой суммами S_k. В схеме блуждания S_k определяет абсциссу точки, движущейся в плоскости (x, t) и совершающей за каждый шаг скачок по оси t на $1/N$ и по оси x — на величину либо α, либо $-\beta$. Так как $S_0 = 0$, $S_N = 0$, то все пути выходят из точки $(0, 0)$ и заканчиваются в точке $(0, 1)$. Легко понять, что число всех возможных путей равно $C_N^n = \frac{N!}{n!m!}$ и все пути равновероятны. Если обозначить через $u^+(x, t; z)$ число путей, приходящих в точку (x, t) и не имеющих общих точек с границей $x = z$, то получим:

$$p^+(x, t; z) = P\left\{\max_{r\leqslant k} S_r < z \,/\, S_k = x\right\} = \frac{P\left\{\max\limits_{r\leqslant k} S_r < z;\ S_k = x\right\}}{P\{S_k = x\}}.$$

Но

$$P\left\{\max_{r\leqslant k} S_r < z;\ S_k = x\right\} = \frac{u^+(x, t; z)\, C_{N-k}^{m-r}}{C_N^n},$$

где r — число положительных шагов до точки (x, t), а

$$P\{S_k = x\} = \frac{C_k^r\, C_{N-k}^{m-r}}{C_N^n}.$$

Таким образом мы находим:

$$p^+(x, t; z) = \frac{u^+(x, t; z)}{C_k^r} \tag{8}$$

и аналогично

$$p(x, t; z) = \frac{u(x, t; z)}{C_k^r}, \tag{9}$$

где $u(x, t; z)$ — число путей, приходящих в точку (x, t) и не имеющих общих точек с границами $x = z$ и $x = -z$.

Числа $u^+(x, t; z)$ и $u(x, t; z)$ удовлетворяют следующему разностному уравнению:

$$u(x, t) = u\left(x - \alpha, t - \frac{1}{N}\right) + u\left(x + \beta, t - \frac{1}{N}\right), \ *$$

которое справедливо для точек внутри области Q, ограниченной прямыми

$$t = \beta x, \quad t = -\alpha x, \quad t = \beta x + 1, \quad t = -\alpha x + 1.$$

* Параметр z опущен для простоты записи.

Разделив это уравнение на C_k^r, получим:

$$\frac{u(x,t)}{C_k^r}=\frac{u\left(x-\alpha,\ t-\frac{1}{N}\right)}{C_{k-1}^{r-1}}\cdot\frac{C_{k-1}^{r-1}}{C_k^r}+\frac{u\left(\left(x+\beta,\ t-\frac{1}{N}\right)\right.}{C_{k-1}^{r}}\cdot\frac{C_{k-1}^{r}}{C_k^r}\,. \tag{10}$$

Из (8) и (9) получаем, что функции $p^+(x, t;\ z)$ и $p(x, t;\ z)$ удовлетворяют внутри области Q разностному уравнению:

$$p(x,t)=\frac{r}{k}\,p\left(x-\alpha,\ t-\frac{1}{N}\right)+\left(1-\frac{r}{k}\right)p\left(x+\beta,\ t-\frac{1}{N}\right).$$

Так как числа x, t, k и r связаны уравнениями (5), то

$$r=mt+\gamma x,\quad k=Nt,$$

где

$$\gamma=\sqrt{\frac{nm}{N}}=\frac{1}{\alpha+\beta}\,.$$

Положим $\nu=\frac{\beta}{\alpha}$; тогда $\beta=\alpha\nu$, $N=\frac{1}{\alpha^2\nu}$, $\gamma=\frac{1}{\alpha(1+\nu)}$, и разностное уравнение (10) перепишется в виде:

$$p(x,t)=\frac{\nu}{1+\nu}\left(1+\alpha\frac{x}{t}\right)p\left(x-\alpha,\ t-\frac{1}{N}\right)+$$
$$+\frac{1}{1+\nu}\left(1-\beta\frac{x}{t}\right)p\left(x+\beta,\ t-\frac{1}{N}\right). \tag{11}$$

Из определения функции $p^+(x, t;\ z)$ следует, что

$$\left.\begin{aligned} p^+(x, \beta x;\ z)&=1 \text{ при } 0\leqslant x<z,\\ p^+(x, -\alpha x;\ z)&=1 \text{ при } x<0,\\ p^+(x, t;\ z)&=0 \text{ при } x\geqslant z. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Поэтому функция $p^+(x, t;\ z)$ есть решение уравнения (11) с граничными условиями (12).

Аналогично получим, что функция $p(x, t;\ z)$ есть решение уравнения (11) с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} p(x, \beta x;\ z)&=1 \text{ при } 0\leqslant x<z,\\ p(x, -\alpha x;\ z)&=1 \text{ при } -z<x<0,\\ p(x, t;\ z)&=0 \text{ при } |x|\geqslant z. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

§ 2. Определение уравнений для членов разложения

Дальнейший путь решения задачи следующий: для нахождения асимптотических разложений функций $\Phi_{nm}^+(z)$, $\Phi_{nm}(z)$, $\Phi_n^+(z)$, $\Phi_n(z)$ мы найдем асимптотические разложения функций $p^+(x, t;\ z)$ и $p(x, t;\ z)$ и тогда значения этих функций в точке (0,1) дадут асимптотические разложения функций $\Phi_{nm}^+(z)$ и $\Phi_{nm}(z)$, а их предельные значения при $m\to\infty$ и фиксированном n будут асимптотическими разложениями функций $\Phi_n^+(z)$ и $\Phi_n(z)$.

Асимптотические представления функций $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$ будем искать следующим образом: ищем решение уравнения (11) в виде:

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \alpha(1-\nu)p_1(x, t) + \alpha^2 p_2(x, t) + \beta^3 p_3(x, t). \tag{14}$$

Представим разностный оператор B, определяющий уравнение (11), через дифференциальные операторы. По формуле Тейлора имеем:

$$p\left(x-\alpha, t-\frac{1}{N}\right) = p(x, t) + \sum_{k=1} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(k)} p(x, t),$$

$$p\left(x+\beta, t-\frac{1}{N}\right) = p(x, t) + \sum_{k=1} \frac{\alpha^k \nu^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(k)} p(x, t).$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (11), находим:

$$\begin{aligned} 0 = B(p) &= \frac{\nu}{1+\nu}\left(1+\alpha\frac{x}{t}\right)p\left(x-\alpha, t-\frac{1}{N}\right) + \\ &+ \frac{1}{1+\nu}\left(1-\alpha\nu\frac{x}{t}\right)p\left(x+\beta, t-\frac{1}{N}\right) - p(x, t) = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu}\left(1+\alpha\frac{x}{t}\right)\sum\frac{(-1)^k\alpha^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)^k p + \\ &+ \frac{1}{1+\nu}\left(1-\alpha\nu\frac{x}{t}\right)\sum\frac{\alpha^k\nu^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(k)} p \end{aligned}$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} B(p) = \frac{1}{N}\Bigg\{&\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t}\right] + \alpha(1-\nu)\left[\frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\right] + \\ &+ \alpha^2\left[\nu\frac{x}{t}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - (\nu^2-\nu+1)\frac{x}{6t}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + (\nu^2-\nu+1)\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t}\right] + \\ &+ \alpha^3\left[-\frac{\nu(1-\nu)}{2}\frac{x}{t}\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t} + \frac{(1-\nu)(1+\nu^2)}{4!}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{\nu(1-\nu)}{3!}\frac{\partial^4 p}{\partial x^3\partial t} - \frac{\alpha\nu^2}{2}\frac{x}{t}\frac{\partial^3 p}{\partial x\partial t^2}\right. - \\ &- \frac{\alpha\nu^2}{3!}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{\alpha\nu(\nu^2-\nu+1)}{3!}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^3\partial t} + \frac{\alpha^2\nu^2(1-\nu)}{4}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\alpha\nu^2}{4}\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial t^2} + \\ &+ \left.\frac{\alpha^3\nu^3}{3}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x\partial t^3} + \frac{\alpha^3\nu^3}{4!}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4}\right] + \\ &+ \frac{\alpha^3}{(1+\nu)5!}\left[\nu^4\left(1-\alpha\nu\frac{x}{t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(5)} p(x', t') - \right. \\ &- \left.\left(1+\alpha\frac{x}{t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(5)} p(x'', t'')\right]\Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $x < x' < x+\beta$, $x-\alpha < x'' < x$, $t-\frac{1}{N} < t'$, $t'' < t$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}, \\ A_1 &= \frac{x}{2t}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}, \\ A_2 &= \nu\frac{x}{t}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\nu^2-\nu+1)\frac{x}{6t}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\nu^2-\nu+1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Подставляя (14) и (15) в уравнение (11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, получим уравнения для членов разложения p_0, p_1, p_2 и p_3:

$$1)\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}-\frac{x}{t}\frac{\partial p_0}{\partial x}-\frac{\partial p_0}{\partial t}=0,$$

а) $p_0(x, 0)=1, \quad p_0(z, t)=0,$

б) $p_0(x, 0)=1, \quad p_0(z, t)=p_0(-z, t)=0;$

$$2)\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}-\frac{x}{t}\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{\partial p_1}{\partial t}=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3}-\frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2},$$

а) $p_1(x, 0)=p_1(z, t)=0,$

б) $p_1(x, 0)=p_1(z, t)=p_1(-z, t)=0,$

$$3)\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}-\frac{x}{t}\frac{\partial p_2}{\partial t}-\frac{\partial p_2}{\partial t}=\frac{\nu}{2}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2\partial t}+\frac{(\nu^2-\nu+1)x}{6t}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3}-\frac{(\nu^2-\nu+1)}{24}\frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4}-$$
$$-\frac{\nu x}{t}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x\partial t}-\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}+(1-\nu)^2\left[\frac{1}{6}\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^3}-\frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right], \tag{17}$$

а) $p_2(x, 0)=p_2(z, t)=0,$

б) $p_2(x, 0)=p_2(z, t)=p_2(-z, t)=0,$

$$4)\ B(p_3)=-\frac{1}{\beta^3}\left\{\left[B-\frac{1}{N}(A_0+\alpha(1-\nu)A_1+\alpha^2 A_2)\right](p_0)+\right.$$
$$\left.+\alpha(1-\nu)\left[B-\frac{1}{N}(A_0+\alpha(1-\nu)A_1)\right](p_1)+\alpha^2\left[B-\frac{1}{N}A_0\right](p_2)\right\}.$$

Граничные условия для $p_3(x, t)$ находятся из соотношения:

$$p_3(x, t)=\frac{1}{\beta^3}[p(x, t)-p_0(x, t)-\alpha(1-\nu)p_1(x, t)-\alpha^2 p_2(x, t)]. \tag{18}$$

Выбор граничных значений для p_0, p_1 и p_2 определяется условием, чтобы функция $p_3(x, t)$ на границе области Q была ограниченной при любых значениях n и m.

Примечание. Мы изложили путь нахождения асимптотических разложений в предположении непрерывности $p(x, t; z)$ по z. В действительности же $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$ разрывны по z, а именно: обозначим через z_1, z_2, $z_3, \ldots$ возможные значения абсцисс узловых точек путей в схеме блуждания. Тогда эти точки, как легко понять, и являются точками скачков функций $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$, а для промежуточных значений z имеет место равенство:

$$p(x, t; z)=p(x, t; z_i),$$

где $z_{i-1}<z\leqslant z_i$. Поэтому в случае промежуточных значений z в асимптотическое разложение решения уравнения (11) необходимо добавить член $q(x, t; z)$, учитывающий разрывный характер $p^+(x, t; z)$ и $p(x, t; z)$. В дальнейшем мы будем считать, что $z=z_i$ (z_i — абсцисса точки скачков).

§ 3. Асимптотические разложения для односторонних уклонений

Нулевой член разложения $p^+(x, t; z)$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}-\frac{x}{t}\frac{\partial p_0}{\partial x}-\frac{\partial p_0}{\partial t}=0 \tag{19}$$

с граничными условиями

$$p_0(x, 0)=1, \quad p_0(z, t)=0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$p_0(x, t) = 1 - e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}, \tag{20}$$

что легко проверяется непосредственно.

Первый член разложения $p^+(x, t, z)$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3} - \frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \tag{21}$$

с граничными условиями: $p_1(x, 0) = p_1(z, t) = 0$. Подставляя в (21) выражение для $p_0(x, t)$, получим для $p_1(x, t)$ уравнение:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{2z^2(3x-2z)}{3t^3} e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}.$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$p_1(x, t) = \frac{2z^2}{3}\left[A_0(x) + \frac{1}{t}A_1(x) + \frac{1}{t^2}A_2(x) + \frac{1}{t^3}A_3(x)\right] e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}$$

и находим первый член разложения:

$$p_1(x, t) = \frac{2}{3}\left[\frac{z-x}{t} + \frac{zx(x-z)}{t^2}\right] e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}. \tag{22}$$

Второй член разложения для $p^+(x, t, z)$ определяется уравнением:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2 \partial t} + \frac{(\nu^2-\nu+1)x}{6t}\frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3} - \frac{\nu^2-\nu+1}{24}\frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4} -$$
$$- \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} + (1-\nu)^2\left[\frac{1}{6}\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^3} - \frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right] \tag{23}$$

с граничными условиями: $p_2(x, 0) = p_2(z, t) = 0$. Подставляя в правую часть уравнения (23) найденные выражения для $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$, получим уравнение для $p_2(x, t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial t} = \left[\frac{1}{t^3}B_3(x) + \frac{1}{t^4}B_4(x) + \frac{1}{t^5}B_5(x)\right] e^{-\frac{2z(z-x)}{t}},$$

где

$$B_3(x) = \frac{1}{3}[6\nu z^2 + 2(1-\nu)^3 zx],$$

$$B_4(x) = \frac{1}{9}[2(\nu^2 - 8\nu + 1)z^4 + 4(\nu^2 + 4\nu + 1)z^3 x - 6(2\nu^2 - \nu + 2)z^2 x^2],$$

$$B_5(x) = \frac{4(1-\nu)^2}{9} z^3(-3x^3 + 5zx^2 - 2z^2 x).$$

Применяя, аналогично предыдущему, метод неопределенных коэффициентов, получим второй член разложения в виде:

$$p_2(x, t) = \left[\frac{2(\nu^2+\nu+1)z(x-z)}{3t^2} + \frac{4(\nu^2+\nu+1)z^4 - 4(\nu^2+4\nu+1)z^3x + 18\nu z^2x^2 - 6\nu zx^3}{9t^3} -\right.$$
$$\left. - \frac{2(1-\nu)^2 z^2 x^2 (x-z)^2}{9t^4}\right] e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}. \tag{24}$$

Итак, решение уравнения (11) с граничными условиями (12), т. е. функция $p^+(x, t; z)$ представима в виде [см. (14)]:

$$p^+(x, t; z) = p_0(x, t) + \alpha(1-\nu)p_1(x, t) + \alpha^2 p_2(x, t) + \beta^3 p_3(x, t),$$

где p_0, p_1 и p_2 определяются соответственно формулами (20), (22) и (24).

Вспоминая, что [см. (6)]

$$\Phi^+_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}}\sup\left[T_m(t) - S_n(t)\right] < z\right\} = p^+(0,1; z),$$

получаем разложение для функции $\Phi^+_{nm}(z)$:

$$\Phi^+{}_{nm}(z) = p_0(0,1) + \alpha(1-\nu)\, p_1(0,1) + \alpha^2 p_2(0,1) + \beta^3 p_3(0,1),$$

и так как

$$p_0(0,1) = 1 - e^{-2z^2},$$

$$p_1(0,1) = \frac{2z}{3} e^{-2z^2},$$

$$p_2(0,1) = (\nu^2 + \nu + 1)\frac{2z^2}{3}\left(\frac{2z^2}{3} - 1\right)e^{-2z^2},$$

то

$$\Phi^+_{nm}(z) = 1 - e^{-2z^2} + \sqrt{\frac{nm}{N}}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\frac{2z}{3} e^{-2z^2} + \\ + \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn}\frac{2z^2}{3}\left(\frac{2z^2}{3} - 1\right)e^{-2z^2} + \beta^3 p_3(0,1),$$

или, иначе,

$$\Phi^+_{nm}(z) = 1 - e^{-2z^2}\left[1 - \sqrt{\frac{nm}{n}}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\frac{2z}{3} + \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn}\frac{2z^2}{3}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right)\right] + \beta^3 p_3(0,1), \tag{25}$$

где $p_3(0,1)$ есть значение функции $p_3(x, t)$, являющейся решением уравнения 4) формулы (17).

Вспоминая, что при фиксированном n [см. (7)]

$$\Phi^+_n(z) = \lim_{m\to\infty} \Phi^+_{nm}(z),$$

получаем асимптотическое разложение функции $\Phi^+_n(z)$:

$$\Phi^+_n(z) = 1 - e^{-2z^2}\left[1 + \frac{2z}{3\sqrt{n}} + \frac{2z^2}{3n}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right)\right] + \frac{1}{n^{3/2}} p_3(0,1). \tag{26}$$

Разумеется, что полученные формулы требуют обоснования, т. е. нужно оценить поведение $p_3(0,1)$ при стремлении n и m к бесконечности. Оставляя эту задачу до § 5—7, перейдем к определению асимптотических разложений для функции $p(x, t; z)$, являющейся решением уравнения (11) с граничными условиями (13).

§ 4. Асимптотические разложения для двусторонних уклонений

Нулевой член разложения для $p(x, t; z)$ определяется уравнением [см. уравнение 1) формулы (17)]:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial p_0}{\partial t} = 0, \quad p_0(x,0) = 1, \quad p_0(z, t) = p_0(-z, t) = 0.$$

Решением этого уравнения, как легко проверить непосредственно, служит функция:

$$p_0(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}}. \tag{27}$$

Первый член разложения для $p(x, t; z)$ определяется уравнением 2) формулы (17) с граничными условиями: $p_1(x,0) = p_1(z, t) = p_1(-z, t) = 0$.

Подставляя в уравнение 2) формулы (17) выражение для $p_0(x, t)$, получим для $p_1(x, t)$ уравнение:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \frac{2k^2z^2(2kz-3x)}{3t^3} e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}},$$

решение которого ищем в виде:

$$p_1(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \varphi_k(x,t) e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}},$$

где

$$\varphi_k(x, t) = \frac{1}{t} A_k^{(1)}(x) + \frac{1}{t^2} A_k^{(2)}(x) + \frac{1}{t^3} A_k^{(3)}(x).$$

Таким образом находим первый член разложения для $p(x, t; z)$:

$$p(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{2kz}{3t} + (-1)^k\left[\frac{\delta_k x}{3t} + \frac{2kzx(kz-x)}{3t^2}\right]\right\} e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}}, \qquad (28)$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное},\\ 2, & \text{если } k \text{ нечетное}.\end{cases}$$

Подставляя в уравнение 3) формулы (17) выражения для $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$, получим уравнение для $p_2(x, t)$ в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{t^3}B_k^{(3)}(x) + \frac{1}{t^4}B_k^{(4)}(x) + \frac{1}{t^5}B_k^{(5)}(x)\right] e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}}$$

с нулевыми граничными условиями, где

$$B_k^{(3)}(x) = \frac{1}{3}\{2k^2z^2[(\delta_k-2)\nu^2 + (1-2\delta_k)\nu + (\delta_k-2)] - 2(\delta_k-1)(1-\nu^2)kzx\},$$

$$B_k^{(4)}(x) = \frac{1}{9}\{2k^4z^4[(7-4\delta_k)\nu^2 - 8(1-\delta_k)\nu + (7-4\delta_k)] + 4k^3z^3x[(4\delta_k-9)\nu^2 + 4(3-2\delta_k)\nu + (4\delta_k-9)] + 6k^2z^2x^2[(4-\delta_k)\nu^2 + (2\delta_k-5)\nu + (4-\delta_k)]\},$$

$$B_k^{(5)}(x) = \frac{4(1-\nu)^2k^3z^3}{9}[2k^2z^2x - 5kzx^2 + 3x^3].$$

Решая уравнение 3) формулы (17) аналогично предыдущему, получим второй член разложения для $p(x, t; z)$:

$$p_2(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\left\{\frac{2(\nu^2+\nu+1)kz(kz-x)}{3t^2} + \frac{1}{9t^3}\left[Q_k(x) - \frac{(\nu^2+\nu+1)kz(2kz-x)^3}{2}\right] + \frac{2(1-\nu)^2k^2z^2x^2(x-kz)^2}{9t^4}\right\} e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}}, \qquad (29)$$

где

$$Q_k(x) = C_k^{(3)}x^3 + C_k^{(2)}x^2 + C_k^{(1)}x,$$

$$C_k^{(3)} = \frac{kz}{2}[(7-4\delta_k)\nu^2 + (8\delta_k-5)\nu + (7-4\delta_k)],$$

$$C_k^{(2)} = -3k^2z^2[(3-2\delta_k)\nu^2 + (4\delta_k-3)\nu + (3-2\delta_k)],$$

$$C_k^{(1)} = 2k^2z^2[(3-2\delta_k)\nu^2 + (4\delta_k-3)\nu + (3-2\delta_k)].$$

Итак, решение уравнения (11) с граничными условиями (13), т. е. функция $p(x, t; z)$ представляется в виде [см. (14)]:

$$p(x, t; z) = p_0(x, t) + \alpha(1-\nu)\, p_1(x, t) + \alpha^2 p_2(x, t) + \beta^3 p_3(x, t),$$

где $p_0(x, t)$, $p_1(x, t)$ и $p_2(x,t)$ определяются соответственно формулам (27), (28) и (29), а $p_3(x, t)$ является решением уравнения 4) формулы (17) с граничными условиями (18).

Вспоминая, что [см. (6)]

$$\Phi_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty<t<+\infty} |T_m(t) - S_n(t)| < z\right\} = p(0,1; z),$$

получаем асимптотическое разложение для $\Phi_{nm}(z)$:

$$\Phi_{nm}(z) = p_0(0,1) + \alpha(1-\nu)\, p_1(0,1) + \alpha^2 p_2(0,1) + \beta^3 p_3(0,1).$$

И так как

$$p_0(0,1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2},$$

$$p_1(0,1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2kz}{3} e^{-2k^2z^2} \equiv 0,$$

$$p_2(0,1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\nu^2+\nu+1)2k^2z^2}{3}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right) e^{-2k^2z^2},$$

то окончательно имеем асимптотическое разложение для $\Phi_{nm}(z)$:

$$\Phi_{nm}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \left[1 + \frac{m^2+mn+n}{Nmn}\,\frac{2k^2z^2}{3}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right)\right] e^{-2k^2z^2} + \beta^3 p_3(0,1). \quad (30)$$

Далее, мы имели [см. (7)]:

$$\Phi_n(z) = P\{\sqrt{n} \sup_{-\infty<t+\infty} |F(t) - S_n(t)| < z\} = \lim_{m\to\infty} \Phi_{nm}(z).$$

Поэтому, переходя к пределу при $m \to \infty$ в формуле (30), получаем асимптотическое разложение для $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}\left[1 + \frac{2k^2z^2}{3n}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right)\right] + \frac{1}{n^{3/2}} p_3(0,1). \quad (31)$$

§ 5. Определение остаточного члена асимптотических разложений

Мы имели решение разностного уравнения

$$p(x,t) = \frac{\nu}{1+\nu}\left(1 + \alpha\frac{x}{t}\right)\ \left(x-\alpha, t - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{1+\nu}\left(1 - \beta\frac{x}{t}\right) p\left(x+\beta, t - \frac{1}{N}\right)$$

в виде

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \alpha(1-\nu)\, p_1(x, t) + \alpha^2 p_2(x, t) + \beta^3 p_3(x, t),$$

где функции $p_0(x, t)$, $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ являются решениями уравнений (17). Функция $p_3(x, t)$ есть решение уравнения

$$p(x, t) =$$
$$= \frac{\nu}{1+\nu}\left(1 + \alpha\frac{x}{t}\right) p\left(x - a, t - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{1+\nu}\left(1 - \beta\frac{x}{t}\right) p\left(x+\beta, t - \frac{1}{N}\right) + f_N(x,t),$$

где [см. уравнение 4) формулы (17)]

$$f_N(x,t) = -\frac{1}{\beta^3}\Big\{\Big[B - \frac{1}{N}(A_0 + \alpha(1-\nu)A_1 + \alpha^2 A_2)\Big](p_0) +$$
$$+ \alpha(1-\nu)\Big[B - \frac{1}{N}(A_0 + \alpha(1-\nu)A_1\Big](p_1) + \alpha^2\Big[B - \frac{1}{N}A_0\Big](p_2).$$

При этом

$$B(p) = \frac{\nu}{1+\nu}\Big(1 + \alpha\frac{x}{t}\Big)p\Big(x-\alpha, t-\frac{1}{N}\Big) + \frac{1}{1+\nu}\Big(1 - \beta\frac{x}{t}\Big)p\Big(x+\beta, t-\frac{1}{N}\Big) - p(x,t),$$

$$A_0(p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$A_1(p) = \frac{x}{2t}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3},$$

$$A_2(p) = \nu\frac{x}{t}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - (\nu^2 - \nu + 1)\frac{x}{6t}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{\nu^2 - \nu + 1}{4!}\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t},$$

а граничные условия для $p_3(x,t)$ определяются из соотношения (18).

Оператор B можно представить в виде [см. (15)]:

$$B(p) = \frac{1}{N}\Big[A_0 + \alpha(1-\nu)A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \frac{\alpha^3}{1+\nu}A_4\Big](p),$$

где

$$A_3(p) = \frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{x}{t}\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t} + \frac{(1-\nu)(1+\nu^2)}{4!}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\nu(1-\nu)}{3!}\frac{\partial^4 p}{\partial x^3\partial t} - \frac{\alpha\nu^3}{2}\frac{x}{t}\frac{\partial^3 p}{\partial x\partial t^2} -$$
$$-\frac{\alpha\nu^2}{3!}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{\alpha\nu(\nu^2+\nu+1)}{3!}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^3\partial t} + \frac{\alpha^2\nu^2(1-\nu)}{4}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial t^2} +$$
$$+\frac{\alpha\nu^2}{4}\frac{\partial^4 p}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\alpha^3\nu^3}{3!}\frac{x}{t}\frac{\partial^4 p}{\partial x\partial t^3} + \frac{\alpha^3\nu^3}{4!}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4},$$

$$A_4(p) = \frac{\nu^4}{5!}\Big(1 - \beta\frac{x}{t}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{(5)}p(x',t') - \Big(1 + \alpha\frac{x}{t}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{(5)}p(x'',t''),$$

$$x - \alpha < x' < x, \quad x < x'' < x + \beta, \quad t - \frac{1}{N} < t', t'' < t.$$

Используя представление оператора B, можно написать;

$$f_N(x,t) = \frac{1}{N}\Big\{-\frac{1}{\nu^3}\Big[A_3 + \frac{1}{\nu+1}A_4\Big](p_0) + \frac{\nu-1}{\nu^3}\Big[A_2 + \alpha A_3 + \frac{\alpha}{1+\nu}A_4\Big](p_1) +$$
$$+\frac{1}{\nu^3}\Big[(\nu-1)A_1 - \alpha A_2 - \alpha^2 A_3 - \frac{\alpha^2}{1+\nu}A_4\Big](p_2)\Big\},$$

где функции p_0, p_1 и p_2 для односторонних уклонений даются формулами (20), (22) и (24), для двусторонних уклонений — формулами (27), (28) и (29). Поэтому можно получить явный вид функции $f_N(x,t)$ для односторонних уклонений:

$$f_N(x,t) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q}\frac{A_r(x;z,\nu)}{t^r}e^{-\frac{2z(z-x)}{t}} + \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q_1}\frac{A'_r(x';z,\nu)}{t'^r}e^{-\frac{2z(z-x')}{t'}} +$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q_2}\frac{A''_r(x'';z,\nu)}{t''^r}e^{-\frac{2z(z-x'')}{t''}} \quad (32)$$

и для двусторонних уклонений:

$$f_N(x,t)=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{A_{k,r}(x;z,\nu)}{t^r}e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t'}}+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q_1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{A'_{k,r}(x';z,\nu)}{t'^r}e^{-\frac{2kz(kz-x')}{t'}}+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{q_2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{A''_{k,r}(x'';z,\nu)}{t''^r}e^{-\frac{2kz(kz-x'')}{t''}},\qquad(33)$$

где $A_r(x;z,\nu)$, $A'_r(x';z,\nu)$, $A''_r(x'';z,\nu)$ и $A_{kr}(x;z,\nu)$, $A'_{kr}(x';z,\nu)$, $A''_{kr}(x'';z,\nu)$ — многочлены по x и z с коэффициентами, зависящими от ν, причем ν входит в виде дробно-рациональных функций, степень числителя которых меньше или равна степени знаменателя (считаем, что $\nu=\frac{m}{n}\geqslant 1$). Следовательно, коэффициенты многочленов A_r, A'_r, A''_r и A_{kr}, A'_{kr}, A''_{kr} являются ограниченными функциями при любых значениях n и m; q, q_1, q_2 — целые числа, не зависящие от n и m, $x<x'<x+\beta$, $x-\alpha<x''<x$, $t-\frac{1}{N}<t'$, $t''<t$.

Из сотношения (18) нетрудно заметить, что граничные условия для $p_3(x,t)$ имеют такой же вид, что и функции $f_N(x,t)$. Поэтому $p_3(x,t)$ можно рассматривать как решение уравнения 4) формулы (17) в замкнутой области Q с нулевыми граничными условиями.

Для обосновании асимптотических разложений (25), (26), (30), (31) нужно показать, что решение уравнения 4) формулы (17) с правой частью вида (32) или вида (33) и с нулевыми граничными условиями ограничено в точке (0,1) при любых значениях n и m.

Найдем решение уравнения 4) формулы (17). Для этого перепишем его в форме [см. (10)]:

$$p(x,t)=\frac{C_{k-1}^{r-1}}{C_k^r}p\left(x-\alpha,t-\frac{1}{N}\right)+\frac{C_{k-1}^{r}}{C_k^r}p\left(x+\beta,t-\frac{1}{N}\right)+f_N(x,t),\quad(34)$$

где числа r и k связаны с x и t соотношениями

$$r=mt+\gamma x,\qquad k=Nt\qquad\left(\gamma=\sqrt{\frac{nm}{N}},\ N=n+m\right).\qquad(35)$$

Оператор B, определяющий уравнение (34), — линейный, а поэтому если

$$f_N(x,t)=\sum_{s=1}^{q}f_{N,s}(x,t),$$

то

$$p(x,t)=\sum_{s=1}^{q}p_s(x,t),$$

где $p_s(x,t)$ есть решение уравнения $B(p_s)=f_{N,s}$.

Пусть функция $f_N(x,t)$ такова, что в рассматриваемой области $f_N(x_0,t_0)=A$, а во всех остальных точках $f_N(x,t)=0$. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что решением уравнения (34) служит функция

$$p(x, t) = \begin{cases} \dfrac{C_{k_0}^{r_0} u(k, r;\ k_0, r_0)}{C_k^r} A & \text{при } k \geqslant k_0, \\ 0 & \text{при } k < k_0, \end{cases} \tag{36}$$

где $u(k, r;\ k_0, r_0)$ — число путей из точки (x_0, t_0) в точку (x, t), не имеющих общих точек с границей $x = z$ в случае односторонних уклонений и с границами $x = z$ и $x = -z$ в случае двусторонних уклонений *. Числа k_0, r_0 и k, r определяются соотношениями (35) для точек (x_0, t_0) и (x, t) соответственно.

Из формулы (36) и линейности оператора B следует, что решение уравнения (34) имеет вид:

$$p(x_0, t_0) = \sum_{(k,r)} \frac{C_k^r u(k_0, r_0; k, r)}{C_{k_0}^{r_0}} f_N(x, t).$$

В частности, при $x_0 = 0$, $t_0 = 1$ имеем $k_0 = N$, $r_0 = m$ и

$$p(0,1) = \sum_{(k,r)} \frac{C_k^r u(N, m; k, r)}{C_N^m} f_N(x, t). \tag{37}$$

Суммирование ведется по всем точкам, удовлетворяющим соотношениям (35) и лежащим в замкнутой области Q, ограниченной прямыми

$$t = \beta x, \quad t = -\alpha x, \quad t = \beta x + 1, \quad t = -\alpha x + 1.$$

§ 6. Оценки для функции Грина разностного уравнения

Для оценки решения (37) уравнения (34) с функцией $f_N(x, t)$, определяемой равенствами (32) или (33), мы определим сначала поведение функции Грина разностного уравнения (10):

$$p_N(x, t) = \frac{C_k^r u(N, m; k, r)}{C_N^m}.$$

Из определения $u(N, m; k, r)$ следует, что $u(N, m; k, r) \leqslant C_{N-k}^{m-r}$, а значит,

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{m-r}}{C_N^m};$$

здесь x и t связаны с k и r соотношениями (35). Следовательно,

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{C_{Nt}^{mt+\gamma x} \cdot C_{N\tau}^{m\tau-\gamma x}}{C_N^m} \quad (\tau = 1 - t). \tag{38}$$

Пусть x и t таковы, что соответствующая им точка находится внутри области Q. Тогда, применяя формулу Стирлинга ([6]), получим:

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \sqrt{\frac{N}{nm}} u_N(x, t) \cdot v_N(x, t), \tag{39}$$

* Для общности формулы (36) полагаем $u(k, r; k, r) = 1$.

где c — некоторая постоянная, не зависящая от x, n, t и m, и

$$u_N(x,t)=\left(1+\frac{\alpha x}{t}\right)^{-mt-\gamma x-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta x}{t}\right)^{-nt+\gamma x-\frac{1}{2}},$$

$$v_N(x,t)=\left(1-\frac{\alpha x}{\tau}\right)^{-m\tau+\gamma x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta x}{\tau}\right)^{-n\tau-\gamma x-\frac{1}{2}}.$$

Функции $u_N(x,t)$ и $v_N(x,t)$ оценим порознь:

$$-\ln u_N(x,t)=\left(mt+\gamma x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\alpha x}{t}\right)+\left(nt-\gamma x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{\beta x}{t}\right)=$$

$$=\left(mt+\gamma x+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\alpha x}{t}}\frac{dy}{1+y}-\left(nt-\gamma x+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\beta x}{t}}\frac{dy}{1-y}.$$

После замены переменных и объединения обоих интегралов получим:

$$-\ln u_N(x,t)=\frac{x^2}{t}\int_0^1\frac{1+\frac{\alpha-\beta}{2x}-y\left(1+\frac{1}{Nt}\right)}{\left(1+\frac{\alpha x}{t}y\right)\left(1-\frac{\beta x}{t}y\right)}dy=\frac{x^2}{t}I_1.$$

Оценим интеграл I_1 при $x>0$. Так как для квадратного трехчлена в знаменателе подинтегральной функции имеет место оценка

$$\left(1+\frac{\alpha x}{t}y\right)\left(1-\frac{\beta x}{t}y\right)\leqslant 1$$

при $0<y<1$ и $x>0$, то для I_1 получаем оценку:

$$I_1\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha-\beta}{x}-\frac{1}{Nt}\right).$$

Учитывая, что $t>\beta x$ и $N\beta=\frac{1}{\alpha}$, получаем окончательно:

$$I_1\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{x}\right).$$

При $x<0$ для знаменателя подинтегральной функции имеет место оценка

$$\left(1+\frac{\alpha x}{t}y\right)\left(1-\frac{\beta x}{t}y\right)\leqslant\left(1-\frac{\beta x}{t}\right),$$

и тогда

$$I_1\geqslant\frac{1}{2\left(1-\frac{\beta x}{t}\right)}\left(1+\frac{\alpha-\beta}{x}-\frac{1}{Nt}\right).$$

Учитывая, что при $x<0$ $t>-\alpha x$ и $N\alpha=\frac{1}{\beta}$, получаем:

$$I_1\geqslant\frac{1+\frac{\alpha}{x}}{2\left(1-\frac{\beta x}{t}\right)}.$$

Таким образом, для функции $u_N(x, t)$ имеют место оценки:

$$u_N(x, t) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2t}\left(1-\frac{\beta}{x}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2t}+\frac{x\beta}{2t}} \leqslant ce^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (x > 0),$$

ибо при $x > 0$ $t \geqslant x\beta$ и, следовательно, $\frac{x\beta}{2t} \leqslant \frac{1}{2}$;

$$u_N(x, t) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)}-\frac{x\alpha}{2(t-\beta x)}} \leqslant ce^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)}} \quad (x < 0),$$

ибо при $x < 0$ $t \geqslant -\alpha x$ и, следовательно, $-\frac{x\alpha}{2t} \leqslant \frac{1}{2}$; здесь c — некоторая постоянная, не зависящая от n и m. Аналогично оценивается функция $v_N(x, t)$:

$$-\ln v_N(x, t) = \left(m\tau - \gamma x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha x}{\tau}\right) + \left(n\tau + \gamma x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta x}{\tau}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{\tau}\int_0^1 \frac{1 + \frac{\beta - \alpha}{2x} - y\left(1 + \frac{1}{N\tau}\right)}{\left(1 + \frac{\beta x}{\tau}y\right)\left(1 - \frac{\alpha x}{\tau}y\right)}\,dy = \frac{x^2}{\tau}I_2.$$

Для оценки интеграла I_2 заметим, что при $x > 0$

$$\left(1 + \frac{\beta x}{\tau}y\right)\left(1 - \frac{\alpha x}{\tau}y\right) \leqslant 1 + \frac{\beta x}{\tau},$$

так что для I_2 получаем оценку:

$$I_2 \geqslant \frac{1 + \frac{\beta - \alpha}{x} - \frac{1}{N\tau}}{2\left(1 + \frac{\beta x}{\tau}\right)}.$$

При $x > 0$ $\tau > \alpha x$, следовательно,

$$I_2 \geqslant \frac{1 - \frac{\alpha}{x}}{2\left(1 + \frac{\beta\tau}{\tau}\right)} \quad (x > 0).$$

При $x < 0$ для знаменателя подинтегральной функции имеет место оценка

$$\left(1 + \frac{\beta x}{\tau}y\right)\left(1 - \frac{\alpha x}{\tau}y\right) \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$I_2 \geqslant \frac{1 + \frac{\beta - \alpha}{x} - \frac{1}{N\tau}}{2},$$

а так как при $x < 0$ $\tau > -\beta x$, то

$$I_2 \geqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{x}\right) \quad (x < 0).$$

Таким образом, для функции $v_N(x, t)$ имеем оценки:

$$v_N(x, t) \leqslant e^{-\frac{x^2\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)}{2(\tau+\beta x)}} = e^{-\frac{x^2}{2(\tau+\beta x)}+\frac{x\alpha}{2(\tau+\beta x)}} \leqslant ce^{-\frac{x^2}{2(\tau+\beta x)}} \quad (x > 0),$$

ибо при $x > 0$ $\tau = 1 - t > \alpha x$, следовательно, $\frac{\alpha x}{2(\tau + \beta x)} \leqslant \frac{1}{2}$,

$$v_N(x, t) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2\tau}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2\tau} - \frac{x\beta}{2\tau}} \leqslant ce^{-\frac{x^2}{2\tau}} \quad (x < 0),$$

ибо при $x < 0$ $\tau = 1 - t > -\beta x$, следовательно, $-\frac{x\beta}{2t} \leqslant \frac{1}{2}$.

Из оценок для функций $u_N(x, t)$ и $v_N(x, t)$ и формулы (39) получаем оценки для функции Грина разностного уравнения (10) внутри области Q:

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \sqrt{\frac{N}{nm}}\, e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{x^2}{2(\tau+\beta x)}} \quad (x > 0) \tag{40}$$

и

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \sqrt{\frac{N}{nm}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)} - \frac{x^2}{2\tau}} \quad (x < 0). \tag{41}$$

Найдем теперь оценки функции $p_N(x, t)$ для точек границы области Q, т. е. для точек прямых $t = \beta x$, $t = -\alpha x$, $t = \beta x + 1$, $t = -\alpha x + 1$. На прямой $t = \beta x$ имеем:

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{C_{N\tau}^{m\tau - \gamma x}}{C_N^m} \leqslant \frac{c}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{m}{N}\right)^{Nt} v_N(x, t) = \frac{c}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{2\nu\frac{x}{2\beta}} v_N(x, t).$$

Так как при всех $\nu \geqslant 1$ всегда $\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{2\nu} \leqslant \frac{1}{e}$, то при $t = \beta x$

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{x^2}{2(\tau+\beta x)}} \quad (t = \beta x). \tag{42}$$

На прямой $t = -\alpha x$ имеем:

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{C_{N\tau}^{m\tau - \gamma x}}{C_N^m} \leqslant \frac{c}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{n}{N}\right)^{Nt} v_N(x, t) = \frac{c}{\sqrt{1-t}} (1+\nu)^{2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\frac{x\gamma}{2}} v_N(x, t).$$

Так как при $x < 0$ и при всех $\nu \geqslant 1$ всегда $(1+\nu)^{2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} \geqslant e$, то

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)} - \frac{x^2}{2(1-t)}} \quad (t = -\alpha x). \tag{43}$$

Из соображений симметрии ясно, что оценки функции $p_N(x, t)$ на прямых $t = \beta x + 1$ и $t = -\alpha x + 1$ получаются соответственно из оценок $p_N(x, t)$ на прямых $t = \beta x$ и $t = -\alpha x$ заменой t на $1 - t$ и x на $-x$. Таким образом, на прямых $t = \beta x + 1$ и $t = -\alpha x + 1$ имеют место оценки:

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)} - \frac{x^2}{2(1-t)}} \quad (t = \beta x + 1) \tag{44}$$

и

$$p_N(x, t) \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{x^2}{2(\tau+\beta x)}} \quad (t = -\alpha x + 1). \tag{45}$$

§ 7. Обоснование асимптотических разложений

1. Для обоснования асимптотических разложений для функции распределения односторонних уклонений нужно доказать ограниченность члена $p_3(0,1)$, представимого в виде (37), где $f_N(x, t)$ задается формулой (32). Из этой формулы следует, что $p_3(0, 1)$ состоит из конечного числа слагаемых вида

$$S = \sum_{(x,t)} p_N(x, t) \frac{A(x; z, \nu)}{Nt^q} e^{-\frac{2z(z-x)}{t}},$$

где $p_N(x, t)$ — функция Грина разностного уравнения (10).

Для оценки суммы S разобьем ее на две части: S_1 — сумма по всем внутренним точкам области Q и S_2 — сумма по точкам границы области Q, т. е. по точкам прямых $t = \beta x$, $t = -\alpha x$, $t = \beta x + 1$, $t = -\alpha x + 1$.

Для суммы S_1 имеем:

$$S_1 = \sum_{x>0} p_N(x, t) \frac{A(x; z, \nu)}{Nt^q} e^{-\frac{2z(z-x)}{t}} + \sum_{x\leqslant 0} p_N(x, t) \frac{A(x; z, \nu)}{Nt^q} e^{-\frac{2z(z-x)}{t}} = S_1' + S_1''.$$

Для оценки суммы S_1' применим неравенство (40):

$$S_1' \leqslant \sum_{x>0} \frac{c\,|A(x; z, \nu)|}{\sqrt{Nmn}\, t^q \sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{x^2}{2(\tau+\beta x)} - \frac{2z(z-x)}{t}}$$

или после преобразований:

$$S_1' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{x>0} \frac{c\,|A(x; z, \nu)|}{\sqrt{Nmn}\, t^q \sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)} + \frac{\beta x^2}{2(1-t)(1-t+\beta x)}}. \tag{46}$$

Так как число точек в области Q не превосходит $2\sqrt{Nmn}$, а каждое слагаемое в рассматриваемой сумме без множителя $1/\sqrt{Nmn}$ при условии $z = o\left(\sqrt[6]{\frac{mn}{N}}\right)$ ограничено при всех n, m и t, x в области Q, то для S_1' получаем оценку:

$$S_1' = O(z^p e^{-2z^2}), \tag{47}$$

где p — некоторое целое положительное число (можно подсчитать, что $p = 11$).

Для оценки S_1'' применим неравенство (41):

$$S_1'' \leqslant \sum_{x<0} \frac{c\,|A(x; z, \nu)|}{\sqrt{Nmn}\, t^q \sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)} - \frac{x^2}{2(1-t)} - \frac{2z(z-x)}{t}},$$

или после преобразований:

$$S_1'' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{x<0} \frac{c\,|A(x; z, \nu)|}{\sqrt{Nmn}\, t^q \sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)} - \frac{\beta x^2}{2t(t-\beta x)}}, \tag{48}$$

откуда снова, как и для S_1', при $z = O\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right)$ получаем оценку:

$$S_1'' = O(z^p e^{-2z^2}). \tag{49}$$

Остается получить оценки для суммы S_2, в которой суммирование ведется по точкам прямых $t=\beta x$, $t=-\alpha x$, $t=\beta x+1$, $t=-\alpha x+1$. Воспользуемся оценками (42) — (45).

Для точек прямой $t=\beta x$ имеем, применяя (42):

$$S_2' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{t=\beta x} \frac{c\,|A\,(x;\,z,\,\nu)|}{Nt^q\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)}+\frac{\beta x^2}{2(1-t)(1-t+\beta x)}}.$$

Так как число точек на прямой $t=\beta x$ не превосходит N, а слагаемые в сумме без множителя $1/N$ ограничены при всех n, m и t, x, то для S_2' получаем оценку:

$$S_2' = O\,(z^p e^{-2z^2}).$$

Точно так же получаем аналогичную оценку для суммы S_2'' по точкам прямой $t=-\alpha x$:

$$S_2'' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{t=-\alpha x} \frac{c\,|A\,(x;\,z,\,\nu)|}{Nt^q\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)}-\frac{\beta x^2}{2t(t-\beta x)}},$$

откуда, как и в предыдущем случае, при $z=o\left(\sqrt[6]{\frac{mn}{N}}\right)$ получим:

$$S_2'' = O\,(z^p e^{-2z^2}).$$

Очевидно, что аналогичные оценки имеют место и для сумм по точкам прямых $t=\beta x+1$ и $t=-\alpha x+1$.

Итак, для суммы S_2 по точкам границы области Q имеет место оценка:

$$S_2 = O\,(z^p\,e^{-2z^2}). \tag{50}$$

Объединяя оценки (47), (49), (50), получаем для каждого слагаемого в выражении $f_N\,(x,\,t)$ по формуле (32) оценку:

$$S = O\,(z^p\,e^{-2z^2}), \tag{51}$$

где $p=11$.

Чтобы получить доказательство ограниченности $p_3\,(0,\,1)$, остается показать, что вторая и третья суммы в (32) оцениваются так же, как и первая сумма. Действительно, в области Q мы имеем:

$$\sigma' = \sum_{x\leqslant 0} p_N\,(x,\,t)\,\frac{A'\,(x';\,z,\,\nu)}{Nt'^q}\, e^{-\frac{2z(z-x')}{t'}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x>0} \frac{c\,|\,A'\,(x';\,z,\,\nu)\,|}{\sqrt{Nmn}\,t'^q\sqrt{2\pi t\,(1-t)}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}-\frac{x^2}{2\,(\tau+\beta x)}-\frac{2z\,(z-x')}{t'}}$$

и

$$\sigma'' \leqslant \sum_{x\leqslant 0} p_N\,(x,\,t)\,\frac{A'\,(x';\,z,\,\nu)}{Nt'^q}\, e^{-\frac{2z\,(z-x')}{t'}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x\leqslant 0} \frac{c\,|\,A'\,(x';\,z,\,\nu)\,|}{\sqrt{Nmn}\,t'^q\sqrt{2\pi t\,(1-t)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-\beta x)}-\frac{x^2}{2\tau}-\frac{2z\,(z-x')}{t'}}.$$

После преобразования получим

$$\sigma' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{x>0} \frac{c\,|\,A'(x';\ z,\ \nu)\,|}{\sqrt{Nmn}\, t'^q \sqrt{2\pi t\,(1-t)}}\, e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)} + \frac{\beta x^2}{2\tau(\tau+\beta x)} + \frac{2z[z(t'-t)+x't-xt']}{tt'}}$$

и

$$\sigma'' \leqslant e^{-2z^2} \sum_{x\leqslant 0} \frac{c\,|\,A'(x';\ z,\ \nu)\,|}{\sqrt{Nmn}\, t'^q \sqrt{2\pi t\,(1-t)}}\, e^{-\frac{[x-2z(1-t)]^2}{2t(1-t)} - \frac{\beta x^2}{2t\,(t-\beta x)} - \frac{2z[z(t'-t)+x't-xt']}{tt'}}.$$

Сравнивая последние выражения с оценками (46) и (48), нетрудно показать, что дополнительный множитель вида

$$\left(\frac{t}{t'}\right)^q e^{\frac{2z[z(t'-t)+x't-xt']}{tt'}}$$

не изменит оценки (51). Аналогичные рассуждения имеют место и для слагаемых третьей суммы (32). Таким образом теоремы 1 и 2 доказаны.

2. Для обоснования асимптотических разложений для функций распределения двусторонних уклонений нужно доказать, что остаточный член $p_3(0, 1)$, представимый в виде (37), ограничен, причем $f_N(x,\ t)$ задается в виде (33).

Выделим из (33) две суммы:

$$S_1 = \sum_{(x,\ t)} p_N(x,\ t)\, \frac{A(x;\ z,\ \nu)}{Nt^q}\, e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}, \tag{52}$$

$$S_2 = \sum_{(x,\ t)} p_N(x,\ t)\, \frac{A(x;\ z,\ \nu)}{Nt^q}\, e^{-\frac{2z(z+x)}{t}}. \tag{53}$$

Выше было доказано, что $S_1 = O(z^p e^{-2z^2})$. Нетрудно проследить, что оценки сумм вида S_2 ничем принципиально не отличаются от оценок сумм вида S_1. Таким образом и для сумм вида S_2 имеет место оценка:

$$S_2 = O(z^p e^{-2z^2}).$$

Для (52) и (53) оценки (51) получены. Далее, имеем:

$$f_N^{(1)}(x,\ t) = \sum_{|k|=2}^{\infty} (-1)^k \frac{A_k(x;\ z,\ \nu)}{Nt^q}\, e^{-\frac{2kz(kz-x)}{t}} =$$

$$= e^{-2z^2} \sum_{|k|=2}^{\infty} (-1)^k \frac{A_k(x;\ z,\ \nu)}{Nt^q}\, e^{-\frac{2kz\,(kz-x)\,-2z^2t}{t}}, \tag{54}$$

где $2kz(kz-x) - 2z^2t > 0$ при всех $x < z$ и t. Так как функции

$$\frac{1}{t^q}\, e^{-\frac{2kz(kz-x)-2z^2t}{t}}$$

ограничены по t и $x\,(0 \leqslant t \leqslant 1,\ |\,x\,| < z)$ при всех $k\,(|\,k\,| \geqslant 2)$, и так как ряд (54) сходится, то и для $f_N^{(1)}(x,\ t)$ получаем оценку (51). Аналогичные

оценки для слагаемых второй и третьей суммы в формуле (33) получаются так же, как и в подобном случае для односторонних уклонений. Таким образом теоремы 3 и 4 доказаны.

Выражаю глубокую благодарность Б. В. Гнеденко за постановку задачи и полезные советы. Глубоко благодарен также А. Н. Колмогорову и И. И. Гихману за ценную дискуссию.

Поступило
25. I. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, Giorn. Ist. Ital. d. Attuari. t. IV (1933), 83—91.

[2] Смирнов Н. В., Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, в. 10 (1944), 179—207.

[3] Гнеденко Б. В. и Королюк В. С., О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, Доклады Ак. наук СССР, т. 80 (1951), 525—528.

[4] Королюк В. С., О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 81—96.

[5] Гнеденко Б. В., Некоторые результаты о максимальном расхождении между двумя эмпирическими распределениями, Доклады Ак. наук СССР, т. 82, № 5 (1952), 661—664.

[6] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М.-Л., 1950 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 125—132

З. И. КОЗЛОВА

О НАКРЫТИИ МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе показана возможность накрытия R_α-множеств $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ таких, что все точки множества $R_{\{N\}}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$, где N — жесткая база R^α-операции, являются точками p-значности или точками конечнозначности, BR_α-множествами $\{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ такими, что множество $R_{\{N\}}(\{H_{n_1 \ldots n_k}\})$ обладает теми же свойствами.

Для класса R-множеств, открытого А. Н. Колмогоровым и Е. Ливенсоном [см. ([1]), ([2])], как показал в ряде работ А. А. Ляпунов [см. ([3]), ([4]), ([5]), ([6]), ([7])], выполняется теорема, аналогичная теореме В. И. Гливенко о накрытии униформного A-множества таким же B-множеством, а именно:

Если N — жесткая база R^α-операции и $\mathscr{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — таблица R_α-множеств (или R_{α_ν}-множеств) такая, что каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ есть точка N-однозначности таблицы $\mathscr{E}$, то существует таблица $\mathscr{E}' = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что $H_{n_1 \ldots n_k} \supset E_{n_1 \ldots n_k}$ и каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{H_{n_1 \ldots n_k}\})$ есть точка N-однозначности таблицы $\mathscr{E}'$.

Аналогичные теоремы можно установить для случая «p-значности», где p — некоторое натуральное число, и «конечнозначности».

1. Пусть N — жесткая база* некоторой δS-операции.

Точка x называется точкой $N - p$-значности последовательности множеств $\{E_n\}$, если существует p и только p различных цепей базы N, в ядра которых входит точка x.

Через N^* обозначается множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере две различные цепи базы N.

Через Φ_{N^*} обозначается δs-операция, которая отбирает точки, входящие не менее чем в два различных ядра, определяемых цепями базы N.

Через $\Phi_{[N_p]^*}$ будем обозначать δs-операцию, которая отбирает точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ различных ядер, определяемых цепями базы N, т. е. точки, определяемые δs-операцией Φ_N, но не являющиеся точками $N - k$-значности, где $k \leqslant p$.

Пусть N — некоторая база δs-операции. Обозначим через N^n множество всех цепей базы N, которые содержат натуральное число n. На совокуп-

---

* Пусть N — база некоторой δs-операции. Цепь $\eta \in N$ называется *жесткой цепью* базы N, если она не содержит в себе никакой другой цепи базы N.

База N, состоящая из одних только жестких цепей, называется *жесткой базой* [см. ([8])].

ности баз N и $\{N^n\}$ построим d-систему K, содержащую все конечные пересечения баз этой системы.

Будем говорить, что класс множеств Ξ и база N находятся *во вполне правильном отношении*, если:

1) класс множеств $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;

2) при любой базе $M \in K$ имеет место соотношение

$$\Phi_M(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

ЛЕММА. *Если класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении и базы M_1 и M_2 принадлежат d-системе K, то*

$$\Phi_{M_1-M_2}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств класса Ξ. Чтобы получить множество $\Phi_{M_1-M_2}(\{E_n\})$, достаточно положить $\mathscr{E}_n = 0$, если n является элементом каждой цепи базы M_2, но не является элементом каждой цепи базы M_1, и положить $\mathscr{E}_n = E_n$ во всех остальных случаях. Тогда

$$\Phi_{M_1}(\{\mathscr{E}_n\}) = \sum_{\eta \in M_1} \prod_{n \in \eta} \mathscr{E}_n = \sum_{\eta^* \in M_1 - M_2} \prod_{n \in \eta^*} E_n = \Phi_{M_1-M_2}(\{E_n\}).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_{M_1-M_2}(\Xi) \subset \Phi_{M_1}(\Xi).$$

А так как, в силу вполне правильного отношения,

$$\Phi_{M_1}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),$$

то и

$$\Phi_{M_1-M_2}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Если Ξ есть класс R_α- или CR_α-множеств и Φ_N есть, соответственно, R^β- или R^β_c-операция, где $\beta \leqslant \alpha$ (база N предполагается жесткой), то условия вполне правильного отношения класса Ξ и базы N выполняются.

ТЕОРЕМА 1. *Если класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то*

$$\Phi_{[Np]^*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Доказательство. В работе А. А. Ляпунова ([7]) доказано, что при выполнении условий данной теоремы имеет место соотношение:

$$\Phi_{N^*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Пусть теперь $p = 2$. Каждая цепь базы $[N \cdot 2]^*$ содержит по крайней мере три различные цепи базы N. Следовательно, найдутся такие два различных натуральных числа n_1 и n_2, что:

1) либо одна из цепей входит в N^{n_1} и не входит в N^{n_2}, т. е. входит в базу $N^{n_1} - N^{n_2}$; вторая цепь входит в N^{n_2}, но не входит в N^{n_1}, т. е.

входит в базу $N^{n_2}-N^{n_1}$; третья цепь не входит ни в N^{n_1}, ни в N^{n_2}, т. е. входит в базу $N-N^{n_1}-N^{n_2}$;

2) либо одна из цепей входит в $N^{n_1n_2}$; вторая цепь входит в N^{n_1}, но не входит в N^{n_2}, т. е. входит в базу $N^{n_1}-N^{n_2}$: третья цепь не входит в N^{n_1}, т. е. входит в базу $N-N^{n_1}$;

3) либо одна из цепей входит в $N^{n_1n_2}$; вторая цепь входит в N^{n_2}; но не входит в N^{n_1}, т. е. входит в базу $N^{n_2}-N^{n_1}$; третья цепь не входит в N^{n_2}, т. е. входит в базу $N-N^{n_2}$;

4) либо одна из цепей входит в $N^{n_1n_2}$; вторая цепь входит в N^{n_1}; но не входит в N^{n_2}, т. е. входит в базу $N^{n_1}-N^{n_2}$; третья цепь входит в N^{n_2}, но не входит в N^{n_1}, т. е. входит в базу $N^{n_2}-N^{n_1}$.

С другой стороны, всякое объединение трех цепей, удовлетворяющих перечисленным возможным случаям, составляет цепь базы $[N\cdot 2]^*$.

Следовательно, для любой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ справедлива формула:

$$\Phi_{[N\cdot 2]^*}(\{E_n\}) = \sum_{n_1\neq n_2} [\Phi_{N^{n_1}-N^{n_2}}(\{E_n\})\,\Phi_{N^{n_2}-n_1}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N-N^{n_1}-N^{n_2}}(\{E_n\}) +$$
$$+\Phi_{N^{n_1n_2}}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N^{n_1}-N^{n_2}}(\{E_n\})\,\Phi_{N-N^{n_1}}(\{E_n\}) +$$
$$+\Phi_{N^{n_1n_2}}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N^{n_2}-N^{n_1}}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N-N^{n_2}}(\{E_n\}) +$$
$$+\Phi_{N^{n_1n_2}}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N^{n_1}-N^{n_2}}(\{E_n\})\cdot\Phi_{N^{n_2}-N^{n_1}}(\{E_n\})]. \qquad (1)$$

Так как класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то

$$\Phi_{[N\cdot 2]^*}(\Xi)\subset\Phi_N(\Xi).$$

В общем случае каждая цепь базы $[Np]^*$ содержит по крайней мере $(p+1)$ разных цепей базы N. Следовательно, найдутся такие p попарно не равных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_p$, которые могут распределяться в цепях относительно друг друга $C_p^0+C_p^1+\cdots+C_p^p=2^p$ возможными различными способами. Тогда для каждой цепи базы $[N\cdot p]^*$ должна удовлетворяться хотя бы одна из $C_{2^p}^{p+1}$ возможных комбинаций этих распределений.

В результате мы получим формулу для $\Phi_{[N\cdot p]^*}(\{E_n\})$, где $\{E_n\}$ — любая последовательность множеств класса Ξ, аналогичную формуле (1), где сумма распространится на всевозможные системы попарно не равных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_p$, а каждый член этой суммы представит сумму $C_{2^p}^{p+1}$ слагаемых из произведений с $(p+1)$ сомножителями, представляющими собой δs-операции над последовательностью множеств $\{E_n\}$ с соответствующими базисами из d-системы K, построенной на базисах N и $\{N^n\}$. А так как класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то отсюда получим, что

$$\Phi_{[N\cdot p]^*}(\Xi)\subset\Phi_N(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Phi_{[N\cdot p]^{*n}}$ операцию, отбирающую ядра тех цепей операции $\Phi_{[Np]^*}$, которые содержат натуральное число n.

ТЕОРЕМА 2. *Если класс* Ξ *и база* N *находятся во вполне правильном отношении, то*

$$\Phi_{[Np]^{\bullet n}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Доказательство. В работе А. А. Ляпунова (7) доказано, что при выполнении условий данной теоремы

$$\Phi_{N^{\bullet n}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Легко видеть, что при $p = 2$

$$\Phi_{[N\cdot 2]^{\bullet}}(\{E_n\}) = \sum_{\substack{n,\, n_1 \\ n_1 \neq n}} [\Phi_{N^n - N^{n_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{n_1} - N^n}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N - N^n - N^{n_1}}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^n - N^{n_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N - N^n}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{n_1} - N^n}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N - N^{n_1}}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^n - N^{n_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{n_1} - N^n}(\{E_n\})] +$$
$$+ \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ n_1 \neq n \\ n_2 \neq n}} [\Phi_{N^{nn_1} - N^{nn_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{nn_2} - N^{nn_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^n - N^{nn_1} - N^{nn_2}}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1n_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{nn_1} - N^{nn_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^n - N^{nn_1}}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1n_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{nn_2} - N^{nn_1}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^n - N^{nn_2}}(\{E_n\}) +$$
$$+ \Phi_{N^{nn_1n_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{nn_1} - N^{nn_2}}(\{E_n\}) \cdot \Phi_{N^{nn_2} - N^{nn_1}}(\{E_n\})],$$

где множества E_n принадлежат классу Ξ. Так как класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то отсюда следует, что

$$\Phi_{[N\cdot 2]^{\bullet n}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

В общем случае при определении $\Phi_{[Np]^{\bullet n}}(\{E_n\})$ надо сумму, служащую для определения $\Phi_{[Np]^{\bullet n}}(\{E_n\})$, разбить на две суммы: первую сумму взять по всевозможным попарно различным натуральным числам n, n_1, $n_2, \ldots, n_{p-1}$, где n — данное фиксированное натуральное число, а слагаемые этой суммы строить так же, как и слагаемые суммы, служащей для определения $\Phi_{[Np]^{\bullet}}(\{E_n\})$; вторую сумму взять по всем попарно различным натуральным числам $n_1, n_2, \ldots, n_p$, ни одно из которых не совпадает с данным натуральным числом n, слагаемые же этой суммы строить так же, как слагаемые суммы, служащей для определения $\Phi_{[Np]^{\bullet}}(\{E_n\})$, закрепив только дополнительно у каждой базы δs-операции число n. А так как класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то отсюда следует, что

$$\Phi_{[Np]^{\bullet n}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $R_{\{Np\}^{\bullet}}$ операцию, которая отбирает точки, входящие не менее чем в $(p+1)$ ядер $R_{\{N\}}$-цепей, т. е. точки, получаемые $R_{\{N\}}$-операцией, но не являющиеся точками $\{N\}$ — k-значности, где $k \leqslant p$.

Следствие. *Если* N *— жесткая база* $R^{\varkappa}$*-операции, то класс* R_α*-множеств инвариантен относительно операции* $R_{\{Np\}^{\bullet}}$, *а также относительно всех операций* $R_{\{Np\}^{\bullet n_1, \ldots, n_k}}$, *отбирающих ядра тех цепей операци* $R_{\{Np\}^{\bullet}}$, *которые содержат кортеж* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Действительно, так как N — жесткая база R^{α}-операции, то класс R_{α}-множеств инвариантен относительно $R_{\{N\}}$-операции. А так как R_{α}-множества и операция $R_{\{N\}}$ находятся во вполне правильном отношении, то

$$R_{\{Np\}^*}(\Xi) \subset R_{\{N\}}(\Xi),$$

где Ξ — класс R_{α}-множеств. Следовательно, класс R_{α}-множеств инвариантен относительно операции $R_{\{Np\}^*}$.

Пусть λ — класс трансфинитных индексов $\{\beta(x)\}$, Ξ — класс всех множеств, представимых в виде $[\beta(x) = \Omega]$, где $\beta(x) \in \lambda$. Класс λ называется *регулярным* по отношению к классу множеств Ξ, если для всяких двух функций $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$, входящих в λ,

$$[\beta_1(x) \geqslant \beta_2(x)] \in \Xi,$$

и *вполне регулярным*, если, сверх того, для всяких двух множеств $E_1 \in \Xi$ и $E_2 \in \Xi$ можно подобрать два индекса $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ таких, что

$$E_1 = [\beta_1(x) = \Omega], \quad E_2 = [\beta_2(x) = \Omega],$$

и равенство $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ выполняется только для точек $x \in E_1 \cdot E_2$ [см. (9), (6)].

ТЕОРЕМА 3. *Если N — жесткая база операции Φ_N, λ — класс вполне регулярных трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ, находящемуся во вполне правильном отношении с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N, то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что каждая точка множества $\Phi_N(\{E_n\})$ является точкой не более чем N — p-значности последовательности $\{E_n\}$, найдется такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$ при любом n и каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ является точкой не более чем N—p-значности последовательности множеств $(\{H_n\})$.*

Доказательство. Так как класс трансфинитных индексов λ вполне регулярен по отношению к классу множеств Ξ, то в этом классе выполняется первая теорема отделимости [см. (6), (9)]. А так как класс Ξ находится во вполне правильном отношении с базой N и инвариантен относительно операции Φ_N, то он инвариантен и относительно операции $\Phi_{[Np]^*}$ и всех операций $\Phi_{[Np]^{*n}}$. Тогда на основании теоремы А. А. Ляпунова [см. (6), (9) *] в классе множеств Ξ будет выполняться вторая теорема кратной отделимости по отношению к операции $\Phi_{[Np]^*}$.

Так как из выполнения для данного класса множеств первой теоремы об обыкновенной отделимости и второй теоремы о кратной отделимости следует выполнение первой теоремы кратной отделимости [см. (10),

* Эта теорема гласит: если λ — класс регулярных трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ и Φ_N — δs-операция такая, что класс множеств Ξ инвариантен относительно всех δs-операций Φ_{N^n}, то для всякой последовательности $\{E_n\}$ множеств класса Ξ найдется последовательность $\{H_n\}$ множеств класса $C\Xi$ такая, что

$$H_n \supset E_n - \Phi_{N^n}(\{E_m\}) \text{ и } \Phi_N(\{H_n\}) = 0.$$

теорема IV], то в классе множеств Ξ выполнится первая теорема кратной отделимости по отношению к операции $\Phi_{[Np]^*}$.

Согласно условию теоремы,

$$\Phi_{[Np]^*}(\{E_n\}) = 0.$$

Следовательно, существует последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$ таких, что

$$H_n \supset E_n \text{ и } \Phi_{[Np]^*}(\{H_n\}) = 0.$$

Это значит, что каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ является точкой не более чем $N - p$-значности последовательности множеств $\{H_n\}$, что и требовалось доказать.

Так как R^α-индексы таблиц BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) вполне регулярны по отношению к классу R_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств), то имеет место

Следствие. *Если N — жесткая база R^α-операции и $\mathcal{E} = \{E_{n_1,\ldots,n_k}\}$ — таблица R_α-множеств (или $R_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что каждая точка множества $R\{N\}(\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\})$ есть точка не более чем $\{N\}$ — p-значности таблицы $\mathcal{E}$, то существует таблица $\mathcal{E}' = \{H_{n_1,\ldots,n_k}\}$ BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что $H_{n_1,\ldots,n_k} \supset E_{n_1,\ldots,n_k}$ и каждая точка множества $R\{N\}(\{H_{n_1,\ldots,n_k}\})$ есть точка не более чем $\{N\}$ — p-значности таблицы $\mathcal{E}'$.*

2. Пусть N — жесткая база некоторой δs-операции.

Точки x называются точками N-конечнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, если они являются точками $N - p$-значности данной последовательности множеств при любом натуральном числе p.

Обозначим через N^{**} множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере счетное число различных цепей базы N.

Через $\Phi_{N^{**}}$ будем обозначать δs-операцию, которая отбирает точки, входящие не менее чем в счетное число ядер δs-операции Φ_N, т. е. точки, получаемые Φ_N-операцией, но не являющиеся точками N-конечнозначности. Через $\Phi_{N^{**}n}$ будем обозначать операцию, отбирающую ядра тех цепей операции $\Phi_{N^{**}}$, которые содержат натуральное число n.

ТЕОРЕМА 4. *Если класс Ξ и база N находятся во вполне правильном отношении, то*

$$\Phi_{N^{**}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi)$$

и

$$\Phi_{N^{**}n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Доказательство. Действительно,

$$\Phi_{N^{**}}(\{E_n\}) = \prod_{p=1}^{\infty} \Phi_{[Np]^*}(\{E_n\}), \tag{2}$$

где $\{E_n\}$ — любая последовательность множеств класса Ξ. Так как класс множеств Ξ находится во вполне правильном отношении с базой N, то, на основании теоремы 1,

$$\Phi_{[Np]^*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

Следовательно, согласно соотношению (2),

$$\Phi_{N^{**}}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

В силу формулы (2),

$$\Phi_{N^{**}n}(\{E_n\}) = \prod_{p=1}^{\infty} \Phi_{[Np]^{*}n}(\{E_n\}).$$

Согласно теореме 2,

$$\Phi_{[Np]^{*}n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),$$

следовательно,

$$\Phi_{N^{**}n}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $R_{\{N\}^{**}}$ операцию, которая отбирает точки, входящие не менее чем в счетное число ядер $R_{\{N\}}$-цепей, т. е. точки, получаемые $R_{\{N\}}$-операцией, но не являющиеся точками $\{N\}$-конечнозначности.

Следствие. *Если N — жесткая база R^{α}-операции, то класс R_{α}-множеств инвариантен относительно операции $R_{\{N\}^{**}}$, а также относительно всех операций $R_{\{N\}^{**}n_1 \ldots n_k}$, отбирающих ядра тех цепей операции $R_{\{N\}^{**}}$, которые содержат кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.*

Действительно, так как класс R_{α}-множеств Ξ и операция $R_{\alpha\{N\}}$ находятся во вполне правильном отношении, то

$$R_{\{N\}^{**}}(\Xi) \subset R_{\{N\}}(\Xi),$$

а так как класс R_{α}-множеств инвариантен относительно $R_{\{N\}}$-операции, то он инвариантен и относительно операции $R_{\{N\}^{**}}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если N — жесткая база операции Φ_N, λ — класс вполне регулярных трансфинитных индексов по отношению к классу множеств Ξ, находящемуся во вполне правильном отношении с базой N и инвариантному относительно операции Φ_N, то для всякой последовательности множеств $\{E_n\}$ класса Ξ таких, что каждая точка множества $\Phi_N(\{E_n\})$ является точкой N-конечнозначности последовательности множеств $\{E_n\}$, найдется такая последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$, что $H_n \supset E_n$ при любом n и каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ является точкой не более чем N-конечнозначности последовательности множеств $\{H_n\}$.*

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы, в классе Ξ выполняется первая теорема отделимости [см. ([6])]. А так как класс Ξ находится во вполне правильном отношении с базой N и инвариантен относительно операции Φ_N, то он инвариантен и относительно операции $\Phi_{N^{**}}$ и относительно всех операций $\Phi_{N^{**}n}$. Тогда на основании теоремы А. А. Ляпунова [см. ([6]), ([9])] в классе множеств Ξ будет выполняться вторая теорема кратной отделимости по отношению к операции $\Phi_{N^{**}}$. Отсюда будет следовать выполнение в классе Ξ первой теоремы кратной отделимости по отношению к операции $\Phi_{N^{**}}$ [см. ([10]), теорема IV].

Согласно условию теоремы,

$$\Phi_{N^{**}}(\{E_n\}) = 0.$$

Следовательно, существует последовательность множеств $\{H_n\}$ класса $B\Xi$ таких, что

$$H_n \supset E_n \text{ и } \Phi_{N^{**}}(\{H_n\}) = 0.$$

Это значит, что каждая точка множества $\Phi_N(\{H_n\})$ является точкой N-конечнозначности.

Следствие. *Если N — жесткая база R^α-операции и $\mathscr{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ есть таблица R_α-множеств (или $R_{\alpha\beta}$-множеств)] такая, что каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ является точкой $\{N\}$-конечнозначности таблицы множеств $\mathscr{E}$, то существует таблица $\mathscr{E}' = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что $H_{n_1 \ldots n_k} \supset E_{n_1 \ldots nk}$ и каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{H_{n_1 \ldots nk}\})$ является точкой $\{N\}$-конечнозначности.*

Сталинградский педагогический институт
им. А. С. Серафимовича

Поступило
29. I. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kantorovitch L. and Livenson E., Memoir on the analytical operations and projective sets (I), Fund. Math., t. XVIII (1932), 214-279.

[2] Kantorovitch L. and Livenson E., Memoir on the analytical operations and projective sets (II), Fund. Math., t. XX (1933), 54-97.

[3] Ляпунов А. А., Об R-множествах. Доклады Ак. наук СССР, т. 58, № 9 (1947), 1887-1890.

[4] Ляпунов А. А. R-множества, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. XL, 1953.

[5] Ляпунов А. А., О классификации R-множеств, Математ. сборник, т. 32 (74), № 2 (1953), 255-262.

[6] Ляпунов А. А., Отделимость и неотделимость R-множеств, Матем. сборник, т. 32 (74), № 3 (1954), 515-532.

[7] Ляпунов А. А., О признаках вырождения для R-множеств, Изв. Ак. наук СССР сер. матем., 17 (1953), 563-578.

[8] Очан Ю. С., О перместимости δs-операций, Математ. сборник, т. 10 (52), № 3 (1942), [151-163.

[9] Ляпунов А. А., О кратной отделимости для δs-операций, Доклады Ак. наук СССР, т. 53, № 5 (1946), 399-402.

[10] Козлова З. И., Взаимоотношения между теоремами кратной отделимости, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 389-404.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 133—190

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе строится теория интегральных преобразований с ядрами особого вида, являющихся естественным обобщением интегрального преобразования Фурье на системе лучей. Доказывается, что для них сохраняют силу основные положения теории Планшереля—Ватсона для интегралов Фурье.

Далее, дополняются результаты работы автора (9) о параметрическом представлении некоторых классов целых функций. Полученные в этом направлении теоремы представляют собой существенное развитие известной теоремы Палей — Винера (10) о целых функциях экспоненциального типа.

Введение

До опубликования работы М. Планшереля (1) в 1910 г. в теории классического интеграла Фурье были известны лишь теоремы о сходимости в обычном смысле. Планшерель показал, что теория интегралов Фурье имеет более законченный вид, если рассмотреть оператор Фурье в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$.

Для комплексной формы преобразования Фурье теория Планшереля утверждает следующее [см. (1), (2)]:

ТЕОРЕМА. *Пусть вещественная или комплексная функция* $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ *и пусть*

$$F(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(y) e^{-ixy} dy. \tag{1}$$

Тогда существует функция $F(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ *такая, что*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - F(x, \sigma)|^2 dx = 0. \tag{2}$$

Обратно, функция

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(y) e^{ixy} dy \tag{3}$$

в среднем сходится к $f(x)$, *т. е.*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x, \sigma)|^2 dx = 0; \tag{4}$$

при этом имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|^2 dy \tag{5}$$

и, кроме того, почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ *имеют место формулы:*

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}-1}{-ix} f(x)\, dx, \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}-1}{iy} F(y)\, dy. \tag{7}$$

Таким образом, теория Планшереля устанавливает, что существует полное равноправие между представимой интегралом Фурье функцией и континуальным аналогом последовательности ее констант Фурье — преобразованием Фурье этой функции.

Заметим, что функция

$$f(z, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} F(y) e^{izy} dx \tag{8}$$

— целая, порядка 1 и типа σ, поэтому утверждение (4) теории Планшереля одновременно устанавливает, что любая функция класса $L_2(-\infty, +\infty)$ может быть в среднем аппроксимирована целыми функциями экспоненциального типа, тип которых стремится к бесконечности.

Из теории Планшереля, в частности, вытекают следующие два результата [см. ([2]), гл. III, стр. 126—127] о преобразованиях Меллина, которыми мы часто будем пользоваться в настоящей работе.

ТЕОРЕМА А. *Пусть* $f(x) \in L_2(0, +\infty)$; *тогда интегралы*

$$F(s, a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x) x^{s-1} dx, \qquad a > 0 \qquad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

на линии $s = \frac{1}{2} + it\,(-\infty < t < +\infty)$ *при* $a \to +\infty$ *в среднем сходятся к некоторой функции* $F(s)$, *где* $F\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L_2(-\infty, +\infty)$, *а функции*

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} F(s) x^{-s} ds \tag{10}$$

на полуоси $(0, +\infty)$ *при* $a \to +\infty$ *в среднем сходятся к функции* $f(x)$. *При этом имеет место равенство Парсеваля:*

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt. \tag{11}$$

ТЕОРЕМА В. *Пусть* $f_1(x) \in L_2(0, +\infty)$ *и* $f_2(x) \in L_2(0, +\infty)$, *а* $F_1(s)$ *и* $F_2(s)$ $\left(s = \frac{1}{2} + it,\ -\infty < t + \infty\right)$ — *их преобразования Меллина в смы-*

сле теоремы А. *Тогда имеет место обобщенное равенство Парсеваля:*

$$\int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F_1(s) F_2(1-s)\, ds. \tag{12}$$

Для функций класса $L_2(0, +\infty)$ теория Планшереля формулируется для синус- и косинус-преобразований Фурье и имеет такой же законченный вид [см. (²), гл. III, а также теоремы 3 и 4 настоящей работы].

Существуют и другие преобразования типа синус- и косинус-преобразований для функций класса $L_2(0, +\infty)$ [см. (²), гл. VII]. Все эти преобразования характеризуются наличием двух функций $k(x)$ и $h(x)$ таких, что при некоторых условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, преобразование вида

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)\, k(xy)\, dx \tag{13}$$

в том или ином смысле обращается при помощи преобразования вида

$$f(x) = \int_0^\infty g(y)\, h(xy)\, dy. \tag{14}$$

Г. Ватсон (³) [см. также (²), гл. VIII] впервые построил общую теорию таких преобразований в классе $L_2(0, +\infty)$ для случая, когда $h(x) = k(x)$. Результаты Ватсона были развиты и дополнены И. Басбриджем (⁴), Е. Титчмаршем (⁵), М. Планшерелем (⁶) и другими. Случай несимметрических ядер, т. е. случай, когда $k(x) \not\equiv h(x)$, был исследован Кобером (⁷) [см. также (²), гл. VIII]. Из результатов Кобера отметим следующий:

ТЕОРЕМА. *Пусть функции* $K\left(\frac{1}{2}+it\right)$ *и* $H\left(\frac{1}{2}+it\right)$ *удовлетворяют условиям:*

1. $\sup\limits_{-\infty<t<+\infty} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| < +\infty, \quad \sup\limits_{-\infty<t<+\infty} \left| H\left(\frac{1}{2}-it\right)\right| < +\infty,$
2. $K\left(\frac{1}{2}+it\right). H\left(\frac{1}{2}-it\right) = 1, \quad -\infty < t < +\infty.$

Пусть, далее, $\frac{k(x)}{x}$ *и* $\frac{h(x)}{x}$ *— преобразования Меллина функций*

$$\frac{K\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}-it} \quad \text{и} \quad \frac{H\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}-it}.$$

Тогда заданная функция $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ *имеет два преобразования:*

$$g_h(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h(xy)}{y} f(y)\, dy, \qquad g_k(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k(xy)}{y} f(y)\, dy, \tag{15}$$

принадлежащих к классу $L_2(0, +\infty)$, *причем почти всюду на* $(0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k(xy)}{y} g_h(y)\, dy, \qquad f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h(xy)}{y} g_k(y)\, dy \tag{16}$$

и имеет место равенство

$$\int_0^\infty g_k(x)\, g_h(x)\, dx = \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx. \tag{17}$$

В работе автора [8] на основе асимптотических свойств целой функции

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \quad \left(-\infty < \mu < \infty,\ \rho \geqslant \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

была построена теория обобщенных преобразований с несимметрическими ядрами вида e^{-z^ρ} и $E_\rho(z;\ \mu)$ и была доказана следующая теорема о представлении функций в смысле обычной точечной сходимости.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция* $\varphi(\nu)$ *непрерывна на полуоси* $[0, +\infty]$, *имеет ограниченную вариацию на любом отрезке* $[0, R]$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|\, x^{\mu\rho-1}\, dx < +\infty, \quad \rho \geqslant \frac{1}{2}, \quad 0 < \mu \leqslant \rho^{-1}. \tag{19}$$

Обозначим

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\nu^\rho z^\rho}\, \varphi(\nu)\, \nu^{\mu\rho-1}\, d\nu \tag{20}$$

и

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \Phi\left(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right) t^{\mu\rho-1}\, dt + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \Phi\left(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right) t^{\mu\rho-1}\, dt \right\}. \tag{21}$$

Тогда:

а) *если* $u > 0$ *и при* $\rho = \frac{1}{2}$ $\mu = 1$, *а при* $\rho > \frac{1}{2}$ $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$, *то*

$$\varphi(u) = \lim_{\sigma \to +\infty} G(u, \sigma, \rho, \mu); \tag{22}$$

б) *если при* $\rho = \frac{1}{2}$ $\mu = 1$, *а при* $\rho > \frac{1}{2}$ $0 < \mu \leqslant 1$, *то*

$$\frac{1}{2\rho}\varphi(+0) = \lim_{\sigma \to \infty} G(0, \sigma, \rho, \mu); \tag{23}$$

в) *если при* $\rho \geqslant 1$ $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$, *то для любого* $w \neq 0$, $|\arg w| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}$,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} G(w, \sigma, \rho, \mu) = 0. \tag{24}$$

Результат этой теоремы позволил получить представление непрерывных функций, заданных на произвольной системе лучей, исходящих из начала координат комплексной плоскости. Таким образом был построен интегральный аппарат, являющийся естественным обобщением интеграла Фурье.

В настоящей работе строится теория прямых и обратных преобразований с ядрами вида e^{-z^ρ}, $E_\rho(z;\ \mu)$ в классе L_2.

Рассматривая поведение таких преобразований в комплексной области, мы строим здесь интегральный аппарат, являющийся естественным обобщением интеграла Фурье, для представления функций, принадлежащих к классу L_2, на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат.

Полученный интегральный аппарат позволяет доказать, что для произвольной конечной системы лучей $\{L\}$, исходящих из одной точки комплексной плоскости, можно построить целые функции нормального типа и определенного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, сходящиеся в среднем к заданной функции, принадлежащей к классу L_2 на $\{L\}$.

Таким образом обобщается приведенная выше теорема Планшереля, согласно которой функции класса $L_2(-\infty, +\infty)$ могут быть в среднем аппроксимированы целыми функциями экспоненциального типа.

Полученные теоремы об интегральном преобразовании в классах L_2 с ядрами вида e^{-z^ρ}, $E_\rho(z; \mu)$ позволяют существенно дополнить ряд результатов работы автора [9] о представлении целых функций, интегрируемых по лучам, исходящим из одной точки комплексной плоскости.

Таким образом, получен ряд теорем о параметрическом представлении определенных классов целых функций конечного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и нормального типа. Эти теоремы являются естественными обобщениями известной теоремы Палей и Винера [см. [10]] о параметрическом представлении целых функций экспоненциального типа, принадлежащих к классу $L_2(-\infty, +\infty)$.

Настоящая работа содержит четыре параграфа.

В § 1 изучаются некоторые свойства функции

$$E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu+1\right) x^{\mu-1} \quad \left(\rho \geqslant \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ и вычисляется ее преобразование Меллина. Затем устанавливаются некоторые тождества между преобразованиями Меллина функций

$$E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu+1\right) x^{\mu-1} \text{ и } \frac{e^{\pm ix}-1}{\pm ix}.$$

В § 2, на основании результатов § 1, устанавливаются прямые и обратные теоремы типа приведенной выше теоремы Кобера о преобразованиях в классах $L_2(0, +\infty)$ с ядрами

$$y^\mu E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right) x^{\mu-1} \text{ и } \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm ix}.$$

В § 3 устанавливается сходимость в среднем обобщенных преобразований и строится аппарат интеграла типа Фурье в классе L_2 для произвольной конечной системы лучей, исходящих из одной точки комплексной плоскости. Далее доказывается теорема о приближении в среднем целыми функциями на данной системе лучей.

В § 4 определяются классы целых функций A_σ, B_σ, C_σ, $D_\sigma(p)$ и получаются параметрические представления для указанных классов.

§ 1. Вспомогательные преобразования и тождества

1°. Некоторые свойства функции $E_\rho(z;\ \mu)$. Как в настоящем параграфе, так и во всей данной работе мы существенно будем опираться на асимптотические свойства целой функции, определяемой рядом Тейлора вида

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}, \tag{1.1.1}$$

где $\rho > 0$ и $-\infty < \mu < +\infty$ — произвольные параметры.

Легко видеть, что при любом μ целая функция $E_\rho(z;\ \mu)$ имеет порядок ρ и тип 1. Отметим также, что целая функция $E_\rho(z;\ 1)$ известна под названием функции Миттаг-Лефлера и в литературе обозначается через $E_{\frac{1}{\rho}}(z)$.

Асимптотические свойства функции $E_\rho(z;\ \mu)$ в различных частях плоскости z при $|z| \to \infty$ были изучены в работе ([11]). В работе автора ([8]) указанные асимптотические свойства были несколько уточнены в том смысле, что мы имеем полные данные о поведении функции $E_\rho(z;\ \mu)$ $\left(\rho > \frac{1}{2}\right)$ при любом значении параметра μ в замкнутой плоскости z.

Мы приводим здесь формулировку основных асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$, доказательство которых содержится в работе ([8]).

ЛЕММА 1. *Пусть* $\rho > \frac{1}{2}$ *и число* β *определяется из следующих условий:*

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \pi \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < \rho \leqslant 1, \\ &\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \frac{\pi}{\rho} \quad \text{при} \quad \rho \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Тогда:

а) *если* $|\arg z| \leqslant \beta$, *то при* $|z| \to \infty$

$$E_\rho(z;\ \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} + O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{1.1.3}$$

б) *если* $|\arg z| \geqslant \beta$, *то при* $|z| \to \infty$

$$E_\rho(z;\ \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1.1.4}$$

При этом отметим, что при определенном выборе параметра μ в формулах (1.1.3) и (1.1.4) член $O\left(\frac{1}{z}\right)$ может быть заменен членом вида $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Что касается асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$ при $\rho = \frac{1}{2}$, то здесь уже при любом μ мы не имеем представления о ее поведении в замкнутой плоскости z. В этом случае лишь известно, что если $|\arg z| < \pi$, то при $|z| \to \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} e^{z^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1.1.5}$$

Но в частном случае, когда $\mu = 1$ или $\mu = 2$, очевидно, что

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ 1) = \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad E_{\frac{1}{2}}(z;\ 2) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

и, таким образом, нам известно поведение функций $E_{\frac{1}{2}}(z;\ 1)$ и $E_{\frac{1}{2}}(z;\ 2)$ во всей замкнутой плоскости z.

Обозначим при $x \geqslant 0$

$$e_\rho(x;\ \alpha) = E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1\right) x^\mu \tag{1.1.6}$$

и докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Если* $\rho > \frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *то при* $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$

$$\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} \in L_2(0,\ +\infty). \tag{1.1.7}$$

Доказательство. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы при $0 \leqslant x \leqslant \delta$ имело место соотношение:

$$\left| E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1\right)\right| \leqslant \frac{2}{\Gamma(\mu + 1)}; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi. \tag{1.1.8}$$

Тогда при $0 \leqslant x \leqslant \delta$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ будем иметь:

$$\left|\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x}\right| \leqslant \frac{2}{\Gamma(\mu + 1)} x^{\mu - 1}. \tag{1.1.9}$$

Но $\mu > \frac{1}{2}$ по условию, поэтому из (1.1.9) следует, что

$$\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} \in L_2(0,\ \delta) \tag{1.1.10}$$

для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Покажем теперь, что если $R_0 > 0$ — достаточно большое число, то при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$

$$\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} \in L_2(R_0,\ +\infty). \tag{1.1.11}$$

Очевидно, что из (1.1.10) и (1.1.11) будет следовать утверждение (1.1.7) леммы.

Пусть β определяется из условий (1.1.2). Если $\beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \beta$, то, по асимптотической оценке (1.1.4) леммы 1, при $x \geqslant R_0 > 0$ найдем:

$$\left|\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x}\right| \leqslant x^{\mu - 1} \frac{C_1}{x^{\frac{1}{\rho}}} = C_1 x^{\mu - \frac{1}{\rho} - 1}, \tag{1.1.12}$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от x.

Из (1.1.12), в силу условия $\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, следует, что при $\beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \beta$

$$\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} \in L_2(R_0;\ +\infty). \tag{1.1.11'}$$

Пусть теперь $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant \beta$ или $2\pi - \beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$; тогда, по оценке (1.1.3) леммы 1, при $x \geqslant R_1 > 0$ будем иметь:

$$\left| \frac{e_\rho(x; \alpha)}{x} \right| \leqslant x^{\mu-1} \left(\rho x^{-\mu} + \frac{C_2}{x^{\frac{1}{\rho}}} \right), \tag{1.1.13}$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от x.

Так как $x^{-1} \in L_2(R_1, +\infty)$ и, в силу условия $\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ леммы, $x^{\mu-1-\frac{1}{\rho}} \in L_2(R_1, +\infty)$, то из (1.1.3) заключаем, что

$$\frac{e_\rho(x; \alpha)}{x} \in L_2(R_1, +\infty) \tag{1.1.11''}$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant \beta$ или $2\pi - \beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

Из (1.1.11'), (1.1.11'') следует (1.1.11), и таким образом лемма доказана.

В дальнейшем мы дополним результат этой леммы и покажем, что утверждение (1.1.7) справедливо и в том случае, когда $\rho = \frac{1}{2}$.

2°. Преобразование Меллина некоторых функций. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *При* $0 < \operatorname{Re} s < 1$ *имеют место формулы*:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{1-s} \cos \frac{\pi s}{2}, \tag{1.2.1}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{1-s} \sin \frac{\pi s}{2}, \tag{1.2.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pm ix} - 1}{\pm ix} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{1-s} e^{\pm i \frac{\pi}{2} s}. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. Известно [см. ([12])], что при $-1 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\int_0^\infty \sin x x^{s-1} dx = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}, \tag{1.2.4}$$

откуда следует, что при $0 < \operatorname{Re} s < 2$ и, тем более, при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ имеют место равенства:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} x^{s-1} dx = \Gamma(s-1) \sin \frac{\pi}{2}(s-1) = \frac{\Gamma(s)}{1-s} \cos \frac{\pi s}{2},$$

т. е. формула (1.2.1).

Для доказательства формулы (1.2.2) заметим, что из (1.2.4) для любого $t > 0$ получим:

$$\int_0^\infty \sin tx . x^{s-1} dx = t^{-s} \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}. \tag{1.2.4'}$$

Пусть $0<\varepsilon<1$ — любое фиксированное число, тогда при $t\geqslant\varepsilon$ для всякого $A\geqslant 0$

$$\left|\int_0^A \sin tx\,dx\right|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}. \tag{1.2.5}$$

Из (1.2.5), по известному признаку равномерной сходимости несобственных интегралов [см. ([12]), стр. 701], будет следовать, что для любого $0<\sigma<1$ интеграл

$$\int_1^\infty \sin tx.\,x^{\sigma-1}dx \tag{1.2.6}$$

равномерно сходится для значений $t\geqslant\varepsilon$. Но очевидно, что при $0<\sigma<1$ интеграл

$$\int_0^1 \sin tx.\,x^{\sigma-1}dx \tag{1.2.6'}$$

равномерно сходится для всех значений $t\geqslant 0$. Поэтому при $0<\sigma<1$ интеграл

$$\int_0^\infty \sin tx.\,x^{\sigma-1}dx \tag{1.2.6''}$$

равномерно сходится для значений параметра $t\geqslant\varepsilon$ и, следовательно, при $0<\operatorname{Re}s<1$ интеграл

$$\int_0^\infty \sin tx.\,x^{s-1}dx$$

равномерно сходится для значений параметра $t\geqslant\varepsilon$. Таким образом, полагая $0<\operatorname{Re}s<1$ и интегрируя формулу (1.2.4′) по t в пределах $(\varepsilon, 1)$, получим, поменяв слева порядок интегрирования:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\varepsilon x-\cos x}{x}x^{s-1}dx=(1-\varepsilon^{1-s})\,\frac{\Gamma(s)}{1-s}\sin\frac{\pi s}{2}. \tag{1.2.7}$$

Далее, если $\operatorname{Re}s=\sigma$ и $0<\sigma<1$, то имеем оценку:

$$\left|\int_0^\infty\frac{1-\cos\varepsilon x}{x}\,x^{s-1}dx\right|\leqslant 2\int_0^\infty \sin^2\frac{\varepsilon x}{2}\,x^{\sigma-2}\,dx=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\sigma}\int_0^\infty \sin^2 u,\,u^{\sigma-2}du, \tag{1.2.8}$$

при этом интеграл справа, очевидно, сходится. Из (1.2.8) следует, что при $0<\operatorname{Re}s<1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\frac{1-\cos\varepsilon x}{x}x^{s-1}dx=0. \tag{1.2.9}$$

Из (1.2.7) и (1.2.9) следует формула (1.2.2).

Что касается формулы (1.2.3), то легко видеть, что она является следствием формул (1.2.1) и (1.2.2).

3°. Асимптотическое поведение одного интеграла. Для дальнейшего нам необходимо выяснить асимптотическое поведение

интеграла

$$U(p)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{pe^{i\psi}-i(1-s)\psi}\,d\psi,\quad 0<\operatorname{Re} s<1,\tag{1.3.1}$$

когда $p\to+\infty$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *При* $0<\operatorname{Re} s<1$

$$\lim_{p\to+\infty} p^{s-1}U(p)=\frac{2\pi}{\Gamma(2-s)}.\tag{1.3.2}$$

Доказательство. Имеем:

$$U(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{i(n-1+s)\psi}\,d\psi=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\,\frac{\sin(n-1+s)\frac{\pi}{2}}{n-1+s}.\tag{1.3.3}$$

Разобьем ряд (1.3.3) на сумму двух рядов, в которых суммирование производится соответственно по четным и по нечетным значениям n, тогда будем иметь:

$$U(p)=2\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{2n}}{(2n)!}\,\frac{\sin\left(\pi n-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi s}{2}\right)}{2n-1+s}+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{\sin\left(\pi n+\frac{\pi s}{2}\right)}{2n+s}=2\,\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}-$$

$$-2\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{2n}}{(2n)!\,(2n-1+s)}+2\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+s)}=$$

$$=2\,\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}-2\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n+s-2}\,dx+$$

$$+2\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n+s-1}\,dx=2\,\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}-$$

$$-2\cos\frac{\pi s}{2}\int_0^1 x^{s-2}(\cos px-1)\,dx+2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 x^{s-2}\sin px\,dx=2\,\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}-$$

$$-2p^{1-s}\cos\frac{\pi s}{2}\int_0^p\frac{\cos x-1}{x}\,x^{s-1}\,dx+2p^{1-s}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^p\frac{\sin x}{x}\,x^{s-1}\,dx.\tag{1.3.4}$$

Так как $0<\operatorname{Re} s<1$, то из (1.3.4) следует, что

$$\lim_{p\to+\infty}p^{s-1}U(p)=2\cos\frac{\pi s}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x}\,x^{s-1}\,dx+$$

$$+2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,x^{s-1}\,dx.\tag{1.3.5}$$

Из (1.3.5), в силу формул (1.2.1) и (1.2.2), получим:

$$\lim_{p\to+\infty} p^{s-1}U(p) = 2\cos\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma(s)}{1-s}\sin\frac{\pi s}{2} + $$
$$+ 2\sin\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma(s)}{1-s}\cos\frac{\pi s}{2} = 2\frac{\Gamma(s)}{1-s}\sin\pi s,$$

откуда, по формуле дополнения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s},$$

следует утверждение (1.3.2).

Проведем в плоскости z разрез по лучу $\arg z = \alpha$, где $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ $\left(\rho > \frac{1}{2}\right)$.

Рассмотрим в разрезанной таким образом плоскости z ту ветвь функции $z^{\rho(s+\mu-1)-1}$ $\left(s = \frac{1}{2} + it,\ -\infty < t < +\infty\right)$, которая на полуоси $0 < x < +\infty$ принимает значения $\exp\{[\rho(s+\mu-1)-1]\log x\}$ и обозначим через l_R контур $|z| = R$, лежащий в указанной плоскости с разрезом $\arg z = \alpha$. Тогда справедлива

ЛЕММА 5. *Если* $\rho > \frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *то при* $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < \infty)$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{l_R} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz = \frac{2\pi i}{\Gamma(2-s)}. \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Обозначим через $l_R^{(1)}$, $l_R^{(2)}$ и $l_R^{(3)}$ соответственно те дуги окружности $|z| = R$, пробегаемые в положительном направлении, на которых $\arg z$ изменяется в пределах

$$\left[-2\pi + \alpha,\ -\frac{\pi}{2\rho}\right],\quad \left[-\frac{\pi}{2\rho},\ \frac{\pi}{2\rho}\right],\quad \left[\frac{\pi}{2\rho},\ \alpha\right].$$

Очевидно, имеем:

$$\int_{l_R} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz = \int_{l_R^{(1)}} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz +$$
$$+ \int_{l_R^{(2)}} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz + \int_{l_R^{(3)}} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz. \tag{1.3.7}$$

Вычислим пределы трех интегралов, стоящих справа в формуле (1.3.7), которые мы обозначим соответственно через $Y_1(R)$, $Y_2(R)$ и $Y_3(R)$.

Имеем тождество:

$$Y_2(R) = \int_{l_R^{(2)}} \{E_\rho(z;\ \mu+1) - \rho z^{-\mu\rho} e^{z^\rho}\}\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz +$$
$$+ \rho \int_{l_R^{(2)}} e^{z^\rho} z^{\rho(s-1)-1} dz = Y_4(R) + Y_5(R). \tag{1.3.8}$$

Так как $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, то при $R \geqslant R_0$, в силу оценки (1.1.3) леммы 1, имеем:

$$|Y_4(R)| \leqslant R^{\rho\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} \frac{C_1}{R} = C_1 R^{\rho\left(\mu - \frac{1}{2}\right) - 1} \quad (C_1 > 0),$$

откуда, в силу условия $\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, заключаем, что

$$\lim_{R \to +\infty} Y_4(R) = 0. \tag{1.3.9}$$

Далее, для интеграла $Y_5(R)$ после замены $z = Re^{i\varphi}$ получим выражение

$$Y_5(R) = iR^{\rho(s-1)}\rho \int_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{+\frac{\pi}{2\rho}} e^{R^\rho e^{i\rho\varphi} + i\rho(s-1)\varphi}\, d\varphi =$$

$$= iR^{\rho(s-1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{R^\rho e^{i\psi} - i(1-s)\psi}\, d\psi = iR^{\rho(s-1)} U(R^\rho), \tag{1.3.10}$$

а из (1.3.10) и предельной формулы (1.3.2) леммы 4 найдем:

$$\lim_{R \to +\infty} Y_5(R) = \frac{2\pi i}{\Gamma(2-s)}. \tag{1.3.11}$$

Из (1.3.8), (1.3.9) и (1.3.11) следует, что

$$\lim_{R \to +\infty} Y_2(R) = \frac{2\pi i}{\Gamma(2-s)}. \tag{1.3.12}$$

Докажем, что

$$\lim_{R \to +\infty} Y_1(R) = \lim_{R \to +\infty} Y_3(R) = 0. \tag{1.3.13}$$

Так как соответствующие оценки при доказательствах вполне аналогичны, то мы ограничимся лишь установлением второго из предельных равенств (1.3.13).

Заметив, что в интеграле $Y_3(R)$ $\arg z$ изменяется в пределах $\left[\frac{\pi}{2\rho}, \alpha\right]$, где $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, получаем, что при $\alpha = \frac{\pi}{2\rho}$ $Y_3(R) = 0$ при всяком R. Если же $\frac{\pi}{2\rho} < \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, то разберем отдельно три случая:

1) $\frac{\pi}{2\rho} < \alpha \leqslant \beta$,

2) $\beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \beta$,

3) $2\pi - \beta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$,

где число β имеет тот же смысл, что и в лемме 1.

В случае 1) мы опять напишем тождество вида (1.3.8) для дуги $l_R^{(3)}$:

$$Y_3(R) = \int\limits_{l_R^{(3)}} \left\{E_\rho(z; \mu+1) - \rho z^{-\mu\rho} e^{z^\rho}\right\} z^{\rho(s+\mu-1)-1}\, dz + \\ + \rho \int\limits_{l_R^{(3)}} e^{z^\rho} z^{\rho(s-1)-1} dz = Y_6(R) + Y_7(R).$$

Так как оценка (1.1.3) леммы 1 справедлива при $|\arg z| \leqslant \beta$, то снова будем иметь:

$$\lim_{R\to+\infty} Y_6(R) = 0.$$

Что касается интеграла $Y_7(R)$, то заметим, что при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $|z| = R$,

$$\operatorname{Re} z^\rho = R^\rho \cos\beta\rho < 0,$$

так как из определения (1.1.2) числа β следует, что $\frac{\pi}{2} < \beta\rho < 0$ при любом $\rho > \frac{1}{2}$. Поэтому имеет место оценка:

$$|Y_7(R)| \leqslant \rho \int\limits_{\frac{\pi}{2\rho}}^{\alpha} R^{\rho\left(\frac{1}{2}-1\right)}\, d\varphi = \rho\left(\alpha - \frac{\pi}{2\rho}\right) R^{-\frac{\rho}{2}},$$

откуда получаем, что $\lim\limits_{R\to+\infty} Y_7(R) = 0$. Таким образом, в случае 1) действительно

$$\lim_{R\to+\infty} Y_3(R) = 0. \qquad (1.3.13')$$

В случае 2) используем оценку (1.1.4) леммы 1; тогда при $R \geqslant R^0$ имеем

$$|Y_3(R)| \leqslant R^{\rho\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} \frac{C_2}{R} = C_2 R^{\rho\left(\mu-\frac{1}{2}\right)-1},$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от R. Из этой оценки, в силу того что $\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, получим равенство (1.3.13'):

В случае 3) оценки, проделанные для случая 1), полностью повторяются, и мы снова получим равенство (1.3.13').

Из (1.3.7) и предельных равенств (1.3.12) и (1.3.13) следует утверждение (1.3.6) леммы.

4°. Преобразование Меллина функции $E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha}\, \mu+1)\, x^{\mu-1}$.

По лемме 2, при $\rho > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$

$$e_\rho(x; \alpha)\, x^{-1} \in L_2(0, +\infty)$$

для любых значений α из отрезка $\left[\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$.

По теореме А из теории преобразований Меллина, приведенной во введении нашей статьи, следует, что на линии

$$s = \frac{1}{2} + it \quad (-\infty < t < +\infty)$$

интегралы

$$\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{e_\rho(x;\alpha)}{x} x^{s-1}dx, \quad a>0, \tag{1.4.1}$$

при $a \to +\infty$ сходятся в среднем квадратичном к некоторой функции.

Однако мы покажем здесь, что при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{e_\rho(x;\alpha)}{x} x^{s-1}dx, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho},$$

сходится в обычном смысле, и вычислим его значение.

Докажем одну из основных лемм этого параграфа.

ЛЕММА 6. *При* $\rho > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *для значений* $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ *имеет место формула*

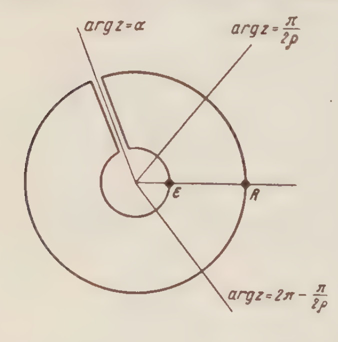
$$\int\limits_0^\infty E_\rho(re^{i\alpha};\ \mu+1)\, r^{\rho(s+\mu-1)-1}\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\rho\alpha(s+\mu-1)\right]}}{1-e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}} \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right). \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1}$$

в плоскости z, разрезанной по лучу $\arg z = \alpha$, где $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$; при этом выбор ветви функции $z^{\rho(s+\mu-1)-1}$ тот же, что и в n° 3.



Обозначим через $L(R;\varepsilon)$ замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении и образованный окружностями

$$l_\varepsilon : |z| = \varepsilon \quad (0<\varepsilon<1), \quad l_R : |z| = R \quad (R>1)$$

и двумя краями разреза $\arg z = \alpha$ ($\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R$) (см. рис.). По теореме о вычетах, имеем:

$$\int\limits_{L(R;\varepsilon)} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1}\,dz = 0. \tag{1.4.3}$$

Напишем эту формулу в развернутом виде, учитывая выбор ветви функции $z^{\rho(s+\mu-1)-1}$ в нашей разрезанной плоскости.

Имеем:

$$e^{-i(2\pi-\alpha)\rho(s+\mu-1)} \int\limits_\varepsilon^R E_\rho(re^{i\alpha};\ \mu+1)\, r^{\rho(s+\mu-1)-1}\,dr +$$

$$+\int\limits_{l_R \circlearrowleft} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz -$$

$$-\, e^{i\alpha\rho(s+\mu-1)} \int\limits_{\varepsilon}^{R} E_\rho(re^{i\alpha};\ \mu+1)\, r^{\rho(s+\mu-1)-1} dr +$$

$$+\int\limits_{l_\varepsilon \circlearrowright} E_\rho(z;\mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz = 0. \qquad (1.4.4)$$

Заметим, что при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, если $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, имеет место оценка (1.1.8), поэтому для таких ε

$$\left|\int\limits_{l_\varepsilon} E_\rho(z;\mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz\right| \leqslant \frac{2}{\Gamma(\mu+1)}\, 2\pi\varepsilon^{\rho\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}.$$

Отсюда, в силу условия $\mu > \frac{1}{2}$, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{l_\varepsilon \circlearrowright} E_\rho(z;\mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1} dz = 0. \qquad (1.4.5)$$

Совершая предельный переход в (1.4.4.), когда $\varepsilon \to 0$, в силу (1.4.5) получим тождество:

$$e^{i\alpha\rho(s+\mu-1)} \{e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)} - 1\} \int\limits_0^R E_\rho(re^{i\alpha};\ \mu+1)\, r^{\rho(s+\mu-1)-1}\, dr =$$

$$= -\int\limits_{l_R \circlearrowleft} E_\rho(z;\ \mu+1)\, z^{\rho(s+\mu-1)-1}\, dz; \qquad (1.4.6)$$

при этом интеграл в левой части (1.4.6) абсолютно сходится при любом конечном R, так как, по условию, $\mu > \frac{1}{2}$.

Перейдя к пределу при $R \to +\infty$ в обеих частях тождества (1.4.6), в силу формулы (1.3.6.) леммы 5, получаем формулу (1.4.2.).

Обозначим

$$\frac{\mathscr{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s} = \int\limits_0^\infty \frac{e_\rho(x;\alpha)}{x}\, x^{s-1}\, dx = \int\limits_0^\infty \mathscr{E}_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\mu+1)\, x^{s+\mu-2}\, dx; \quad (1.4.7)$$

тогда, как нетрудно видеть, после замены переменной $r = x^{\frac{1}{\rho}}$ формула (1.4.2) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\mathscr{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s} = \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s)}\, \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\rho\alpha(s+\mu-1)\right]}}{1-e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}}. \qquad (1.4.8)$$

Отметим, что эта формула получена нами при значениях $\rho > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ для любого $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

Для дальнейших целей выясним поведение функции $\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\ \alpha\right)$ при $t \to \pm\infty$. Имеет место

ЛЕММА 7. *Если* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, *то для всех значений* $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ *существует постоянное число* M *такое, что*

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\ \alpha\right)\right| \leqslant M \quad \left(-\infty < t < +\infty\right). \tag{1.4.9}$$

Доказательство. Заметим сначала, что из формулы дополнения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

при $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$ следует:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm it\right)\right| = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}} > \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}. \tag{1.4.10}$$

Поэтому из (1.4.8) имеем:

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\ \alpha\right)\right| \leqslant \frac{2\pi\rho}{\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{\pi}{2}|t|}\, \frac{e^{\alpha\rho t}}{|1 - e^{2\pi\rho t}|}. \tag{1.4.11}$$

Пусть $t \to +\infty$; тогда из (1.4.11) находим:

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\alpha\right)\right| \leqslant M_1 e^{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\rho - 2\pi\rho\right)t},$$

где M_1 — постоянная, и так как, в силу условия $\alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, $\frac{\pi}{2} + \alpha\rho - 2\pi\rho \leqslant 0$, то

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\alpha\right)\right| \leqslant M_1 \text{ при } t \to +\infty. \tag{1.4.12}$$

Пусть теперь $t \to -\infty$; тогда из (1.4.11) следует, что

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\alpha\right)\right| \leqslant M_2 e^{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\rho\right)|t|},$$

где M_2 — постоянная. Но $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2\rho}$, поэтому

$$\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it;\alpha\right)\right| \leqslant M_2 \text{ при } t \to -\infty. \tag{1.4.12$'$}$$

Из (1.4.12) и (1.4.12′) следует утверждение (1.4.9) нашей леммы.

Отметим, что мы доказали лемму для всех значений $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, несмотря на то, что формула (1.4.8) была нами установлена при $\rho > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$.

Это обстоятельство будет использовано для дополнения результатов лемм 2 и 6 в случае, когда $\rho = \frac{1}{2}$.

Из доказанной леммы легко следует, что при $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$

$$\frac{\mathcal{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L_2(-\infty, +\infty). \tag{1.4.13}$$

Следует отметить, что при $\rho > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ утверждение (1.4.13) является простым следствием из формулы (1.4.2) и леммы 2, если применить теорему A.

5°. Некоторые оценки. Приведем некоторые оценки, которые в следующем пункте будут использованы для распространения результатов лемм 2 и 6 на случай, когда $\rho = \frac{1}{2}$.

Обозначим

$$R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1} + \mu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.5.1}$$

и заметим, что $R_n \geqslant \mu > \frac{1}{2}\,(n \geqslant 0)$.

ЛЕММА 8. *При* $s = R_n e^{i\varphi}$, $n \geqslant n_0$ *имеют место оценки:*

$$\left|\frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \sqrt{2}\exp\{\rho R_n[(\pi - \alpha)\sin\varphi - \pi|\sin\varphi|\,]\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}\exp\{\rho R_n(\pi - \alpha)\sin\varphi\}, & \text{если } |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{1.5.2}$$

для любого $\rho > 0$.

Доказательство. Для $s = R_n^{i\varphi} e^{i\varphi}$ имеем:

$$|1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}|^2 = e^{-4\pi\rho R n \sin\varphi} + 1 - 2\,e^{-2\pi\rho R_n \sin\varphi}\sin 2\pi\rho(R_n\cos\varphi - \mu) =$$

$$= e^{-2\pi\rho R_n \sin\varphi}\,\{e^{2\pi\rho R_n \sin\varphi} + e^{-2\pi\rho R_n \sin\varphi} -$$

$$- 2\cos 2\pi\rho(R_n\cos\varphi - \mu)\} = e^{-2\pi\rho R_n \sin\varphi} f(\varphi). \tag{1.5.3}$$

Если $\frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то из определения функции $f(\varphi)$ следует, что

$$f(\varphi) \geqslant e^{2\pi\rho R_n|\sin\varphi|} - 2. \tag{1.5.4}$$

Если $n \geqslant n_0$, то из (1.5.4) заключаем, что

$$f(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}\,e^{2\pi\rho R_n|\sin\varphi|},\quad \frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1.5.4'}$$

Далее, для всех φ при $s = R_n e^{i\varphi}$ имеем:

$$\left|e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}\right| = e^{-\alpha\rho R_n \sin\varphi}. \tag{1.5.5}$$

Из оценок (1.5.4′), (1.5.5) и из формулы (1.5.3) следует первая оценка леммы.

Для установления второй из оценок заметим, что функция $f(\varphi)$, определенная в (1.5.3), четна в отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому достаточно оценить снизу функцию $f(\varphi)$ в отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Имеем:

$$f'(\varphi) = 2\pi\rho R_n \{[e^{2\pi\rho R_n \sin\varphi} - e^{-2\pi\rho R_n \sin\varphi}] \cos\varphi -$$
$$- 2\sin 2\pi\rho (R_n \cos\varphi - \mu) \sin\varphi\} \geqslant 4\pi\rho R_n \{2\pi\rho R_n \cos\varphi -$$
$$- 2\sin 2\pi\rho (R_n \cos\varphi - \mu)\} \sin\varphi.$$

Отсюда следует, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, если $n \geqslant n_0$ достаточно большое, $f'(\varphi) \geqslant 0$. Поэтому, в силу четности функции $f(\varphi)$, для $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем:

$$f(\varphi) \geqslant f(0) = 2\{1 - \cos 2\pi\rho (R_n - \mu)\} = 4\sin^2 \pi\rho (R_n - \mu) =$$
$$= 4\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = 4. \tag{1.5.6}$$

Из (1.5.3) и (1.5.6), в силу (1.5.5), получим вторую оценку леммы.

ЛЕММА 9. *При* $s = \mathrm{Re}^{i\varphi}$, *когда* $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, *имеем*:

$$\log|\Gamma(\mathrm{Re}^{i\varphi})| = R\cos\varphi \log R - R\cos\varphi -$$
$$- \frac{1}{2}\log R - R\varphi \sin\varphi + O(1), \tag{1.5.7}$$

где $O(1)$ *равномерно ограничена для всех значений* $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$ *при* $R \to +\infty$.

Доказательство. Известно [см. ([13])], что для любого $\varepsilon > 0$ в области $|\arg s| \leqslant \pi - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ имеет место формула

$$\log\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi -$$
$$- \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{(s+t)^2}\, dt + 2\pi i m(s), \tag{1.5.8}$$

где $-\frac{1}{8} \leqslant \psi(t) \leqslant 0$, а $m(s)$ — целое число.

Положив в (1.5.8) $s = \mathrm{Re}^{i\varphi}$ и беря вещественные части, получим (1.5.7).

Из лемм 8 и 9 получается следующая оценка, которая будет непосредственно использована нами ниже.

Обозначим при $s = R_n e^{i\varphi}$

$$F(\varphi; R_n) = \left|\frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}}\right|. \tag{1.5.9}$$

ЛЕММА 10. *При* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, *когда* $n \geqslant n_0$, *имеют место оценки*:

$$F(\varphi; R_n) < C_1\sqrt{R_n}\left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} \quad \text{при } \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{1.5.10}$$

$$F(\varphi; R_n) < C_2\sqrt{R_n}\left(\frac{C_3 e}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} \quad \text{при } \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \tag{1.5.10'}$$

где C_1, C_2 *и* C_3 — *постоянные, не зависящие от* R_n *и* φ.

Доказательство. Из оценки (1.5.7) следует, что при $s = R_n e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{|\Gamma(R_n e^{i\varphi})|} < M_1 \sqrt{R_n} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi} e^{R_n \frac{\pi}{2} |\sin\varphi|}, \tag{1.5.11}$$

где M_1 — постоянная, не зависящая от R_n и φ.

Из первой оценки (1.5.2) леммы 8 следует, что при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $s = R_n e^{i\varphi}$, $n \geqslant n_0$

$$\left| \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}} \right| \leqslant \sqrt{2} e^{-\alpha\rho R_n \sin\varphi}, \tag{1.5.12}$$

а при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{4}$

$$\left| \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}} \right| \leqslant \sqrt{2} e^{\rho R_n (\alpha - 2\pi) |\sin\varphi|} \tag{1.5.13}$$

Заметив, что $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, из оценок (1.5.11), (1.5.12) и (1.5.13) получим оценку (1.5.10).

Из оценки (1.5.11) и из второй оценки (1.5.2) при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ получим для $n \geqslant n_0$:

$$F(\varphi;\ R_n) \leqslant \frac{M_1}{2} \sqrt{R_n} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi} e^{R_n \left[\rho(\pi - \alpha) + \frac{\pi}{4}\right] \sin\varphi}, \tag{1.5.14}$$

а для $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 0$ получим:

$$|F(\varphi;\ R_n)| \leqslant \frac{M_1}{2} \sqrt{R_n} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi} e^{R_n \left[\rho(\pi - \alpha) + \frac{\pi}{4}\right] |\sin\varphi|}. \tag{1.5.15}$$

Из последних двух оценок и следует оценка (1.5.10′) леммы.

6°. Распространение результатов лемм 2 и 6 на случай $\rho = \frac{1}{2}$. В пункте 4 мы получили формулу:

$$\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1) x^{s+\mu-2} dx =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\rho(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}} \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right), \tag{1.6.1}$$

справедливую при любом $\rho > \frac{1}{2}$, если $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ для всех значений $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

Так как, по лемме 2, $E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha}, \mu + 1) x^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$ при указанных ограничениях на параметры ρ, μ и α, то, по теореме A, при $x > 0$

$$E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1) x^{\mu-1} =$$

$$= \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\rho(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}} x^{-s} ds. \tag{1.6.2}$$

Заменив переменную интегрирования $s = 1 - s_1$, напишем последнюю формулу в виде:

$$E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1) x^{\mu-1} =$$

$$= \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{2\pi\rho}{\Gamma(1+s_1)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s_1-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s_1-\mu)}} x^{s_1-1} ds_1. \tag{1.6.2'}$$

ЛЕММА 11. *При* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *для значений* $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ *имеет место формула*:

$$E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu + 1) x^{\mu-1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\rho(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}} x^{-s} ds \quad (x > 0). \tag{1.6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(s) = \frac{2\pi\rho}{\Gamma(1+s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\rho(s-\mu)\right]}}{1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}} x^{s-1} \tag{1.6.4}$$

в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}$, когда $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ и параметр α изменяется в промежутке $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$.

В полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}$ эта функция голоморфна, кроме нулей функции

$$1 - e^{2\pi i\rho(s-\mu)}, \tag{1.6.5}$$

где она имеет простые полюсы.

Функция (1.6.5) обращается в нуль в точках

$$s_k = k\rho^{-1} + \mu \quad (k = 0 \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

но в силу условия $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, из этих нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ лежат лишь нули

$$s_k = k\rho^{-1} + \mu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из (1.6.4) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k} \{\Phi(s)\} = \lim_{s \to s_k} (s - s_k)\,\Phi(s) = -x^{\mu-1} \frac{(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha})^k}{\Gamma(\mu + 1 + k\rho^{-1})}. \tag{1.6.6}$$

Пусть, как и в n^0 5,

$$R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1} + \mu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.6.7}$$

Обозначим через L_n контур области D_n, являющийся пересечением круга $|s| < R_n$ с полуплоскостью $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Функция $\Phi(s)$ голоморфна в области D_n, кроме точек $s_k = k\rho^{-1} + \mu$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где она имеет простые полюсы с вычетами (1.6.6). Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \Phi(s)\,ds = -x^{\mu-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha})^k}{\Gamma(\mu + 1 + k\rho^{-1})} \tag{1.6.8}$$

Обозначим через $\frac{1}{2} \pm iR_n^*$ точки пересечения окружности $|s| = R_n$ с прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$; тогда, очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} R_n^* = \infty.$$

Напишем формулу (1.6.8) в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}+iR_n^*}^{\frac{1}{2}-iR_n^*} \Phi(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|s|=R_n \\ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}}} \Phi(s)\,ds = -x^{\mu-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha})^k}{\Gamma(\mu + 1 + k\rho^{-1})}. \tag{1.6.8'}$$

Обозначим

$$Y_n = \int_{\substack{|s|=R_n \\ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}}} \Phi(s)\,ds. \tag{1.6.9}$$

В силу обозначения (1.5.9) и определения (1.6.4) функции $\Phi(s)$, при $x > 0$ имеем:

$$|Y_n| \leqslant 2\pi\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi;\, R_n)\, x^{R_n \cos\varphi - 1}\, d\varphi.$$

Отсюда, используя оценки (1.5.10) и (1.5.10′), получим:

$$|Y_n| \leqslant \frac{C_4}{x}\sqrt{R_n}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{C_3xe}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ex}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}d\varphi\right\}, \qquad (1.6.10)$$

где C_3 и C_4 — постоянные, не зависящие от n.

Выберем $n \geqslant n_1$ настолько большим, чтобы при фиксированном $x > 0$ мы имели:

$$\frac{C_3xe}{R_n} \leqslant \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} \text{ и } \frac{ex}{R_n} \leqslant e^{-1}. \qquad (1.6.11)$$

Тогда, очевидно, при $n \geqslant n_1$

$$\max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}} \left(\frac{C_3xe}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} \leqslant \frac{1}{2^{R_n}}. \qquad (1.6.12)$$

Одновременно при $n \geqslant n_1$ будем иметь:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ex}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}d\varphi \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n\cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R_n\varphi}\,d\varphi < \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}R_n\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2R_n}. \qquad (1.6.13)$$

Из (1.6.10) и оценок (1.6.12) и (1.6.13) получим, что при $n \geqslant n_1$

$$|Y_n| \leqslant \frac{C_4}{x}\sqrt{R_n}\left\{\frac{1}{2^{R_n}} + \frac{\pi}{2R_n}\right\}, \qquad (1.6.14)$$

откуда следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0. \qquad (1.6.15)$$

Отсюда и из тождества (1.6.8′) выводим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\Phi(s)\,ds = x^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha})^n}{\Gamma(\mu+1+n\rho^{-1})} =$$

$$= x^{\mu-1}E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha}, \mu+1). \qquad (1.6.16)$$

Заметим, что из формул (1.4.7) и (1.6.4), определяющих соответственно функции $\mathscr{E}_\rho(x;\alpha)$ и $\Phi(s)$, следует, что

$$\Phi(s) = \frac{\mathscr{E}_\rho(1-s;\alpha)}{s}x^{s-1};$$

поэтому после замены $1 - s = s_1$ предельное равенство (1.6.16) напишется в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\frac{\mathcal{E}_\rho(s_1;\alpha)}{1-s_1}x^{-s_1}ds_1=x^{\mu-1}E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1).\quad(1.6.16')$$

Формула (1.6.3) леммы будет доказана, если мы покажем, что равенство (1.6.16′) сохраняется, если в его левой части числа R_n^* могут быть заменены любыми числами a_n, удовлетворяющими условию

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty.$$

Положим, что $\{a_n\}$ — такая последовательность и обозначим

$$V(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s}x^{-s}ds.\qquad(1.6.17)$$

Для данного $n\geqslant 1$ число K_n определим из условия

$$R_{K_n}^*\leqslant a_n<R_{K_n+1}^*$$

и заметим, что по определению

$$R_n^*=\sqrt{R_n^2-\frac{1}{4}},$$

где

$$R_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\rho^{-1}+\mu.$$

Отсюда легко видеть, что при $n\geqslant N$

$$R_{n+1}^*-R_n^*<2\rho^{-1}.\qquad(1.6.18)$$

Из (1.6.17) по лемме 7 имеем:

$$|V(a_n)-V(R_{K_n}^*)|\leqslant\frac{1}{\pi}\max_{-\infty<t<+\infty}\left|\mathcal{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it;\alpha\right)\right|x^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{a_n}^{R_{K_n+1}^*}\frac{dt}{\left|\frac{1}{2}-it\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_1}{\sqrt{x}}\,\frac{R_{K_n+1}^*-R_{K_n}^*}{a_n},\qquad(1.6.19)$$

где M_1 — постоянная. Из (1.6.16), (1.6.18) и (1.6.19) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}V(a_n)=x^{\mu-1}E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1)\quad(x>0),$$

и лемма полностью доказана.

Докажем теперь лемму, являющуюся конечной целью пунктов 5 и 6.

ЛЕММА 12. *Если* $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, *то для всех значений* α *из отрезка* $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right]$

$$E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1)x^{\mu-1}=\frac{e_\rho(x;\alpha)}{x}\in L_2(0;\ +\infty).$$

Кроме того, имеет место формула

$$\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu+1)\, x^{s+\mu-2} dx = \int_0^\infty \frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} x^{s-1} dx =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{\Gamma(2-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\rho(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}} = \frac{\mathscr{E}_\rho(s;\ \alpha)}{1-s} \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right), \qquad (1.6.20)$$

причем в случае $\rho = \frac{1}{2}$ *интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем на линии* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Утверждения этой леммы в случае, когда $\rho > \frac{1}{2}$, содержатся в леммах 2 и 6, если иметь в виду обозначения (1.1.6), (1.4.7) и формулу (1.4.8). Таким образом, остается установить справедливость леммы для случая $\rho = \frac{1}{2}$.

Формула (1.6.3) леммы 11 в этом случае принимает вид:

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2;\ \mu+1)\, x^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}(s;\ \pi)}{1-s} x^{-s} dx \quad (x > 0), \quad (1.6.21)$$

но по лемме 7

$$\left|\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + it;\ \pi\right)\right| \leqslant M \quad (-\infty < t < +\infty),$$

поэтому

$$\frac{\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + it;\ \pi\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L_2(-\infty,\ +\infty). \qquad (1.6.22)$$

Из (1.6.21) и (1.6.22), по теореме A, заключаем, что

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2;\ \mu+1)\, x^{\mu-1} \in L_2(0,\ \infty).$$

Поэтому из (1.6.3), по теореме A, следует, что на $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$

$$\frac{\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}(s;\ \pi)}{1-s} = \underset{a\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} E_{\frac{1}{2}}(-x^2;\ \mu+1)\, x^{s+\mu-1} dx. \qquad (1.6.23)$$

Лемма полностью доказана.

7°. Тождества для преобразований Меллина двух частных функций. Для дальнейшего нам нужно установить неко-

торые тождества, которым удовлетворяют преобразования Меллина следующих функций:

$$\frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x} = E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu+1)\, x^{\mu-1} \ \text{ и } \ \frac{h^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{e^{\pm ix}-1}{\pm ix}. \tag{1.7.1}$$

В лемме 12 было доказано, что при $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ и для всех значений $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$ существует интеграл

$$\frac{\mathscr{E}_\rho(s;\ \alpha)}{1-s} = \int\limits_0^\infty \frac{e_\rho(x;\ \alpha)}{x}\, x^{s-1}dx \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right), \tag{1.7.2}$$

вообще говоря, в смысле сходимости в среднем на линии $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$; при этом в случае $\rho > \frac{1}{2}$ интеграл существует в обычном смысле. Мы имеем, что при указанных ограничениях, налагаемых на параметры ρ, μ и α, справедлива формула

$$\mathscr{E}_\rho(s;\ \alpha) = \frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\rho(s+\mu-1)\right]}}{1 - e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}} \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right). \tag{1.7.3}$$

Обозначим, далее,

$$\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} = \int\limits_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(x)}{x}\, x^{s-1}dx, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1; \tag{1.7.4}$$

тогда, по формуле (1.2.3) леммы 3,

$$H^{(\pm)}(s) = \Gamma(s)\, e^{\pm i\frac{\pi}{2}s}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1. \tag{1.7.5}$$

Установим некоторые тождества, которым удовлетворяют функции $\mathscr{E}_\rho(s;\ \alpha)$ и $H^{(\pm)}(s)$ при указанных выше ограничениях, налагаемых на параметры ρ, μ, α и на s.

ЛЕММА 13. *При* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *когда* $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$, *справедливо тождество*:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right) H^{(-)}(s) + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right) H^{(+)}(s) = 2\pi\rho \tag{1.7.7}$$

или эквивалентное ему тождество

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right) H^{(-)}(1-s) + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s;\ 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right) H^{(+)}(1-s) = 2\pi\rho. \tag{1.7.7}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно установить лишь тождество (1.7.7), так как тождество (1.7.6) получится отсюда заменой $s = 1 - s_1$, при которой прямая $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ переходит в прямую $\operatorname{Re} s_1 = \frac{1}{2}$.

Из формулы (1.7.3) получим:

$$\mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho}\right) = -\frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(s+\mu)}}{1 - e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}}, \tag{1.7.8}$$

$$\mathscr{E}_\rho\left(s; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right) = \frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)} \frac{e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(s+\mu)}}{1 - e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}}. \tag{1.7.8'}$$

Из (1.7.8) и (1.7.8′) следует равенство

$$e^{i\frac{\pi}{2}(s+\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho}\right) + e^{-i\frac{\pi}{2}(s+\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right) e^{i(1-s)\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)},$$

умножив которое на $e^{-i\pi}\Gamma(1-s)$, получаем:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}(1-s)} \Gamma(1-s) + $$
$$+ e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right) e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)} \Gamma(1-s) = 2\pi\rho. \tag{1.7.9}$$

Но по формуле (1.7.5), при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$

$$H^{(\pm)}(1-s) = \Gamma(1-s) e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-s)}; \tag{1.7.5'}$$

отсюда и из (1.7.9) следует тождество (1.7.6).

Если $\rho \geqslant 1$, то имеет место второе основное тождество между функциями $\mathscr{E}_\rho(s; \alpha)$ и $H^{(\pm)}(s)$.

ЛЕММА 14. *При* $\rho \geqslant 1$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *когда* $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$, *для значений параметра* ω, *удовлетворяющих условию*

$$0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \tag{1.7.10}$$

справедливо тождество

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho} + \omega\right) H^{(+)}(1-s) + $$
$$+ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{\rho} + \omega\right) H^{(-)}(1-s) = 0 \tag{1.7.11}$$

или эквивалентное ему тождество

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(1-s; \frac{\pi}{2\rho} + \omega\right) H^{(+)}(s) + $$
$$+ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \mathscr{E}_\rho\left(1-s; \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{\rho} + \omega\right) H^{(-)}(s) = 0. \tag{1.7.12}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно установить лишь тождество (1.7.11). Из условия (1.7.10) следует, что

$$\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \omega \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{\rho} + \omega \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$$

и поэтому фигурирующие в доказываемом нами тождестве значения

$$\mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho} + \omega\right) \text{ и } \mathscr{E}_\rho\left(s; \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{\rho} + \omega\right)$$

имеют смысл и могут быть вычислены по формуле (1.7.3.)

Из формулы (1.7.3), в силу (1.7.8), имеем:

$$\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)=\frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)}\,\frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\omega\rho\right)(s+\mu-1)\right]}}{1-e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}}=$$

$$=-\frac{2\pi\rho}{\Gamma(1-s)}\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(s+\mu)}}{1-e^{-i2\pi\rho(s+\mu-1)}}\,e^{-i\omega\rho(s+\mu-1)}=$$

$$=\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}\right)e^{-i\omega\rho(s+\mu-1)}. \tag{1.7.13}$$

Из этой формулы получим:

$$\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)=e^{-i(\pi+\omega\rho)(s+\mu-1)}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}\right)=$$

$$=-e^{-i\pi(s+\mu)}\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}+\omega\right). \tag{1.7.14}$$

Умножим обе части (1.7.14) на $e^{-i\pi+i\frac{\pi}{2}(s+\mu)}\cdot\Gamma(1-s)$; тогда будем иметь:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)}\,\Gamma(1-s)+$$

$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathcal{E}_\rho\left(s;\,\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)e^{-i\frac{\pi}{2}(1-s)}\,\Gamma(1-s)=0,$$

откуда, в силу (1.7.5′), следует тождество (1.7.11).

В заключение этого параграфа приведем еще одну простую лемму.

ЛЕММА 15. *Функция* $H^{(\pm)}(s)$ *равномерно ограничена на линии* $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$:

$$\left|H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\leqslant\sqrt{2\pi}. \tag{1.7.15}$$

Доказательство. Мы имели:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}}\qquad(|t|<+\infty),$$

откуда, в силу формулы (1.7.5), следует:

$$\left|H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{\mp\frac{\pi}{2}t}}{\sqrt{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\pi}{2}(|t|\pm t)}\leqslant\sqrt{2\pi}.$$

§ 2. Прямые и обратные преобразования в классе L_2 с ядрами типа Фурье

На основании результатов § 1, в настоящем параграфе будет построена теория прямых и обратных преобразований в классе L_2 с ядрами вида

$$\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\quad\text{и}\quad y^\mu E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\,\mu+1\right)x^{\mu-1}.$$

1°. Преобразование в классе L_2 с ядром вида $\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}$ и его обращение. Как в этом пункте, так и на протяжении всего параграфа на параметры ρ и μ накладываются условия:

$$\rho\geqslant\frac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}. \tag{2.1.1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $g(y)$ из класса $g(y)\,y^{\mu-1}\in L_2(0,+\infty)$ формула*

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g(y)\,y^{\mu-1}dy \tag{2.1.2}$$

определяет почти всюду функции $f^{(+)}(x)$ и $f^{(-)}(x)$, принадлежащие к классу $L_2(0,+\infty)$.

Двойственная формула

$$g(y)\,y^{\mu-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^{\mu}\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx\right]+\right.$$

$$\left.+\,e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^{\mu}\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx\right]\right\} \tag{2.1.3}$$

также имеет место почти всюду на $(0,+\infty)$; при этом имеет место формула Парсеваля

$$\int_0^\infty |g(y)|\,y^{2\mu-2}\,dy=\rho\int_0^\infty |f^{(+)}(x)|^2dx+\rho\int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2\,dx. \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$G(s)=\int_0^\infty y^{\mu-1}g(y)\,y^{s-1}\,dy; \tag{2.1.5}$$

тогда, по теореме A,

$$G\left(\frac{1}{2}+it\right)\in L_2(-\infty,\,+\infty).$$

Но, по лемме 15,

$$\left|H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\leqslant\sqrt{2\pi},$$

поэтому имеем также:

$$(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)G\left(\frac{1}{2}-it\right)\in L_2(-\infty,\,+\infty). \tag{2.1.6}$$

Если обозначить:

$$f^{(\pm)}(x;\,a)=\frac{(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}H^{(\pm)}(s)\,G(1-s)\,x^{-s}ds, \tag{2.1.7}$$

то, по теореме A, существует предел в среднем

$$f^{(\pm)}(x)=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,f^{(\pm)}(x;\,a)=$$

$$=\frac{(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}H^{(\pm)}(s)\,G(1-s)\,x^{-s}\,ds, \tag{2.1.8}$$

причем

$$f^{(\pm)}(x) \in L_2(0;\ +\infty). \tag{2.1.9}$$

Из (2.1.7) имеем:

$$\int_0^x f^{(\pm)}(u;\, a)\, du = \frac{(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} H^{(\pm)}(s)\, G(1-s)\, \frac{x^{1-s}}{1-s}\, ds,$$

откуда, в силу (2.1.8) и (2.1.9), после предельного перехода, когда $a \to +\infty$, получим формулу:

$$\int_0^x f^{(\pm)}(u)\, du = \frac{(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}\, G(1-s)\, x^{1-s}\, ds. \tag{2.1.10}$$

Здесь интеграл справа существует в обычном смысле.

Но из формулы

$$\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s} = \int_0^\infty \frac{e^{\pm iy}-1}{\pm iy}\, y^{s-1} dy$$

для любого $x > 0$ заменой переменного $y = xy_1$ получим:

$$\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}\, x^{1-s} = \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\, y^{s-1} dy \qquad (0 < \operatorname{Re} s < 1). \tag{2.1.11}$$

Следовательно,

$$\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}\, x^{1-s}$$

есть преобразование Меллина функции

$$\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}.$$

В силу этого замечания и теоремы B, из (2.1.10) следует, что

$$\int_0^x f^{(\pm)}(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\, g(y)\, y^{\mu-1} dy,$$

т. е. почти всюду на $(0,\ +\infty)$

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\, \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\, g(y)\, y^{\mu-1} dx. \tag{2.1.12}$$

Обозначим

$$F^{(\pm)}(s) = \int_0^\infty f^{(\pm)}(x)\, x^{s-1} dx. \tag{2.1.13}$$

Из (2.1.8) мы имеем также

$$(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}} H^{(\pm)}(s)\, G(1-s) = \int_0^\infty f^{(\pm)}(x)\, x^{s-1} dx; \tag{2.1.14}$$

при этом обе формулы (2.1.13) и (2.1.14) справедливы на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$.

Из (2.1.13) и (2.1.14) следует функциональное уравнение

$$F^{(\pm)}(s)=(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}(s)\,G(1-s) \tag{2.1.15}$$

или эквивалентное ему уравнение

$$F^{(\pm)}(1-s)=(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}(1-s)\,G(s), \tag{2.1.15'}$$

также справедливое на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$.

В лемме 13 было доказано, что имеет место уравнение

$$\begin{aligned}2\pi\rho=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;\frac{\pi}{2\rho}\right)H^{(-)}(1-s)+\\+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)H^{(+)}(1-s).\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Умножим обе части (2.1.16) на $G(s)$; тогда, в силу (2.1.15), будем иметь:

$$\begin{aligned}(2\pi\rho)^{\frac{1}{2}}G(s)=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;\frac{\pi}{2\rho}\right)F^{(-)}(1-s)+\\+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F^{(+)}(1-s)\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$.

Обозначим

$$g(y;a)\,y^{\mu-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}G(s)\,y^{-s}ds;$$

тогда

$$\int_0^y g(u;a)\,u^{\mu-1}du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{G(s)}{1-s}\,y^{1-s}ds. \tag{2.1.18}$$

Но, по теореме A,

$$g(y)\,y^{\mu-1}=\underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}}\,g(y;a)\,y^{\mu-1},$$

поэтому из (2.1.18) следует, что интеграл

$$\int_0^y g(u)\,u^{\mu-1}du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G(s)}{1-s}\,y^{1-s}ds \tag{2.1.19}$$

существует и конечен.

Разделим обе части тождества (2.1.17) на

$$(2\pi\rho)^{\frac{1}{2}}(1-s)\,y^{s-1}2\pi i$$

и проинтегрируем по линии $s=\frac{1}{2}+it$; тогда, в силу (2.1.19), получим:

$$\int_0^y g(u)\,u^{\mu-1}\,du=(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;\frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}F^{(-)}(1-s)\,y^{1-s}ds+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}F^{(+)}(1-s)\,y^{1-s}\,ds\right\}.\qquad(2.1.20)$$

Но в лемме 12 было доказано, что когда $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, то для всех значений α из отрезка $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right]$ для $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$ имеем:

$$\frac{\mathcal{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s}=\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1)\,x^{s+\mu-2}dx.\qquad(2.1.21)$$

Отсюда для любого $y>0$ заменой $x=yx_1$ получим:

$$\frac{\mathcal{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s}y^{1-s}=y^\mu\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1)\,x^{s+\mu-2}\,dx,\qquad(2.1.21')$$

причем (2.1.21') имеет место на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$ в смысле теоремы A.

Из формулы (2.1.21'), по теореме B, следуют равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;\frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}F^{(-)}(1-s)\,y^{1-s}ds=$$

$$=y^\mu\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx\qquad(2.1.22)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}F^{(+)}(1-s)\,y^{1-s}ds=$$

$$=y^\mu\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx.\qquad(2.1.23)$$

Из формул (2.1.22) и (2.1.23) находим, что

$$\int_0^y g(u)\,u^{\mu-1}\,du = (2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}y^{\mu}\int_0^{\infty}E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}y^{\mu}\int_0^{\infty}E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx\right\},$$

откуда следует двойственная формула (2.1.3) теоремы.

Докажем теперь равенство Парсеваля (2.1.4).

Почти всюду на $(0,+\infty)$ мы имели

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g(y)\,y^{\mu-1}dy. \tag{2.1.12}$$

Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{ixy}-1}{iy}\,g(y)\,y^{\mu-1}\,dy; \tag{2.1.12'}$$

тогда по теореме Планшереля $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$, и имеет место равенство

$$\rho\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx = \int_0^{\infty}|g(y)|^2y^{2\mu-2}dy. \tag{2.1.24}$$

Из определения функций $f^{(\pm)}(x)$ и из формулы (2.1.12') следует, что

$$f(x) = \begin{cases} f^{(+)}(x) & \text{при } x>0,\\ f^{(-)}(-x) & \text{при } x<0.\end{cases} \tag{2.1.25}$$

Из (2.1.24) и (2.1.25) следует формула Парсеваля (2.1.4) теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение приведем обобщенное равенство Парсеваля для двух функций.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $g_1(y)$ *и* $g_2(y)$ — *функции, определенные на* $(0,+\infty)$, *причем* $g_1(y)\,y^{\mu-1}$, $g_2(y)\,y^{\mu-1}\in L_2(0,+\infty)$.

Если

$$f_1^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g_1(y)\,y^{\mu-1}dy \tag{2.1.26}$$

и

$$f_2^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g_2(y)\,y^{\mu-1}\,dy, \tag{2.1.27}$$

то справедливо равенство:

$$\rho^{-1}\int_0^{\infty}g_1(y)\,g_2(y)\,y^{2\mu-2}\,dy = \int_0^{\infty}f_1^{(+)}(x)\overline{f_2^{(+)}(x)}\,dx + \int_0^{\infty}f_1^{(-)}(x)\overline{f_2^{(-)}(x)}\,dx. \tag{2.1.28}$$

Доказательство следует из (2.1.4) обычным методом, поэтому мы его опускаем.

2°. Некоторые следствия из теоремы 1. При частных значениях параметров ρ и μ теорема 1 содержит некоторые известные результаты теории интегралов Фурье [см. ([2]), гл. III].

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 16. *Если* $g(y)\,y^{\mu-1}\in L_2(0,\ +\infty)$ *и*

$$f^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g(y)\,y^{\mu-1}\,dy, \tag{2.2.1}$$

то

$$\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty f^{(+)}(x)\,\overline{f^{(-)}(x)}\,dx=0. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Из (2.2.1) следует, что

$$f^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^0\frac{e^{ixy}-1}{iy}\,g(-y)(-y)^{\mu-1}\,dy. \tag{2.2.1'}$$

Из (2.2.1) и (2.2.1′) заключаем, что функции $\sqrt{\rho}\,f^{(\pm)}(x)$ являются преобразованиями Фурье функций, обращающихся в нуль соответственно на $(0,\ +\infty)$ и $(-\infty,\ 0)$. Поэтому по обобщенной формуле Парсеваля для преобразований Фурье будем иметь:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^{(+)}(x)\,\overline{f^{(-)}(x)}\,dx=0. \tag{2.2.3}$$

Формулу (2.2.3) можно представить в виде

$$\int\limits_0^\infty f^{(+)}(x)\,\overline{f^{(-)}(x)}\,dx+\int\limits_0^\infty f^{(+)}(-x)\,\overline{f^{(-)}(-x)}\,dx=0, \tag{2.2.3'}$$

но из (2.2.1) получаем, что

$$f^{(+)}(-x)=f^{(-)}(x)\ \text{и}\ f^{(-)}(-x)=f^{(+)}(x); \tag{2.2.4}$$

отсюда и из (2.2.3′) следует наше утверждение (2.2.2).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\varphi(y)\in L_2(0,\ +\infty)$, *тогда формула*

$$\Phi_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\varphi(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy \tag{2.2.5}$$

определяет почти всюду функцию, также принадлежащую к классу $L_2(0,\ +\infty)$. *Двойственная формула*

$$\varphi(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dy}\int\limits_0^\infty\Phi_c(x)\frac{\sin xy}{x}\,dx \tag{2.2.6}$$

также имеет место почти всюду; при этом имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty|\varphi(y)|^2\,dy=\int\limits_0^\infty|\Phi_c(x)|^2\,dx. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Утверждения теоремы следуют из теоремы 1 при $\rho = \frac{1}{2}$ и $\mu = 1$ $\left(\text{отметим, что при } \rho = \frac{1}{2} \text{ параметр } \mu \text{ может изменяться в силу условия (2.1.1) в пределах } \frac{1}{2} < \mu < \frac{5}{2}\right)$.

Действительно, при $\rho = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$ имеем:

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2 y^2;\ 2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xy)^{2n}}{\Gamma(2+2n)} = \frac{\sin xy}{xy}. \tag{2.2.8}$$

Положим в теореме 1 $g(y) = \varphi(y)$ и обозначим

$$f^{(+)}(x) + f^{(-)}(x) = \sqrt{2}\,\Phi_c(x); \tag{2.2.9}$$

тогда из формулы (2.1.2) получим (2.2.5). В этом случае, в силу (2.2.8), формула (2.1.3) принимает вид:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} [f^{(-)}(x) + f^{(+)}(x)]\, dx,$$

откуда, в силу (2.2.9), следует формула (2.2.6).

Из (2.2.2) и (2.2.9) выводим, что

$$2\int_0^{\infty} |\Phi_c(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |f^{(+)}(x)|^2 dx + \int_0^{\infty} |f^{(-)}(x)|^2 dx, \tag{2.2.10}$$

а отсюда, в силу обозначения $g(y) = \varphi(y)$, и из (2.1.4) следует формула (2.2.7). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\varphi(y) \in L_2(0, +\infty)$; тогда формула*

$$\Phi_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \varphi(y) \frac{1 - \cos xy}{y}\, dy \tag{2.2.11}$$

определяет почти всюду функцию, также принадлежащую к классу $L_2(0; +\infty)$. Двойственная формула

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \Phi_s(x) \frac{1 - \cos xy}{x}\, dx \tag{2.2.12}$$

также имеет место почти всюду; при этом имеет место равенство:

$$\int_0^{\infty} |\varphi(y)|^2 dy = \int_0^{\infty} |\Phi_s(x)|^2 dx. \tag{2.2.13}$$

Доказательство. Заметив, что при $\rho = \frac{1}{2}$ и $\mu = 2$

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2 y^2;\ 3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xy)^{2n}}{\Gamma(3+2n)} = \frac{1 - \cos xy}{x^2 y^2}, \tag{2.2.14}$$

положим $g(y)\, y = \varphi(y)$ и рассмотрим результат теоремы 1 в частном случае, когда $\rho = \frac{1}{2}$ и $\mu = 2$.

Обозначим

$$i\,[f^{(-)}(x)-f^{(+)}(x)]=\sqrt{2}\,\Phi_s(x); \tag{2.2.15}$$

тогда из формулы (2.1.2) для функции $\Phi_s(x)$ получим представление (2.2.11).

Далее, в силу (2.2.14), в рассматриваемом случае, когда $\rho=\frac{1}{2}$ и $\mu=2$, формула (2.1.3) принимает вид:

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{1-\cos xy}{x}\,[if^{(-)}((x)-if^{(+)}(x)]\,dx,$$

откуда, в силу (2.2.15), получим (2.2.12).

Из (2.2.15) и (2.2.2) следует, что

$$2\int_0^\infty|\Phi_s(x)|^2\,dx=\int_0^\infty|f^{(+)}(x)|^2\,dx+\int_0^\infty|f^{(-)}(x)|^2\,dx,$$

откуда, в силу обозначения $g(y)\,y=\varphi(y)$ и формулы (2.1.4), получим равенство (2.2.13) теоремы.

3°. Преобразование в классе L_2 с ядром вида $y^\mu E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}$ и его обращение. Теперь мы рассмотрим обратную задачу — преобразование в классе L_2 с ядром вида

$$y^\mu E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}$$

и его обращение. Имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Для любой функции $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ формула*

$$g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}f(x)\,dx\right\}, \tag{2.3.1}$$

где $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, определяет почти всюду на $(0,+\infty)$ функции $g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}$, принадлежащие к классу $L_2(0,+\infty)$.

Двойственная формула

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}\,dy+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{e^{ixy}-1}{iy}\,g^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}\,dy\right\} \tag{2.3.2}$$

также имеет место почти всюду на $(0,+\infty)$. Существуют постоянные $M_1>0$ и $M_2>0$, не зависящие от функции $f(x)$ и $g^{(\pm)}(y)$, такие, что

$$\int_0^\infty|g^{(\pm)}(y)|^2\,y^{2\mu-2}\,dy\leqslant M_1\int_0^\infty|f(x)|^2\,dx \tag{2.3.3}$$

и

$$\int_0^\infty|f(x)|^2\,dx\leqslant M_2\left\{\int_0^\infty|g^{(+)}(y)|^2\,y^{2\mu-2}\,dy+\int_0^\infty|g^{(-)}(y)\,y^{2\mu-2}\,dy\right\}. \tag{2.3.4}$$

Доказательство. По теореме A, существует предел в среднем на линии $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$:

$$F(s)=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,x^{s-1}\,dx,$$

причем

$$F\left(\frac{1}{2}+it\right)\in L_2(-\infty,\ +\infty).$$

Из леммы 7 следует, что при $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$ функции

$$\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F\left(\frac{1}{2}-it\right)\ \text{и}\ \mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F\left(\frac{1}{2}-it\right)$$

принадлежат к классу $L_2(-\infty,\ +\infty)$.

Если обозначить

$$\begin{gathered}
g^{(+)}(y;\ a)\,y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,y^{-s}\,ds,\\
g^{(-)}(y;\ a)\,y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,y^{-s}\,ds,
\end{gathered}\tag{2.3.5}$$

то, по теореме A, существуют пределы в среднем:

$$g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,g^{(+)}(y;\ a)\,y^{\mu-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,y^{-s}\,ds,\tag{2.3.6}$$

$$g^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,g^{(-)}(y;\ a)\,y^{\mu-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,y^{-s}\,ds,\tag{2.3.6$'$}$$

причем

$$y^{\mu-1}g^{(\pm)}(y)\in L_2(0,\ +\infty).\tag{2.3.7}$$

Из (2.3.5) имеем:

$$\int\limits_0^y g^{(+)}(u;\ a)\,u^{\mu-1}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,\frac{y^{1-s}}{1-s}\,ds,\tag{2.3.8}$$

$$\int\limits_0^y g^{(-)}(u;\ a)\,u^{\mu-1}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s)\,\frac{y^{1-s}}{1-s}\,ds,\tag{2.3.8$'$}$$

откуда, в силу (2.3.6) и (2.3.6′), после предельного перехода, когда $a \to +\infty$, получим формулы:

$$\int_0^y g^{(+)}(u)\,u^{\mu-1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}\,F(1-s)\,y^{1-s}\,ds, \tag{2.3.9}$$

$$\int_0^y g^{(-)}(u)\,u^{\mu-1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathcal{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)}{1-s}\,F(1-s)\,y^{1-s}\,ds, \tag{2.3.9′}$$

причем интегралы справа сходятся в обычном смысле.

Но из формулы (2.1.21′), справедливой на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$ в смысле средней сходимости, по теореме B имеем из (2.3.9) и (2.3.9′):

$$\int_0^y g^{(+)}(u)\,u^{\mu-1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,y^{\mu}\int_0^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}\,y^{\frac{1}{\rho}}\,e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f(x)\,dx, \tag{2.3.10}$$

$$\int_0^y g^{(-)}(u)\,u^{\mu-1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,y^{\mu}\int_0^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}\,y^{\frac{1}{\rho}}\,e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f(x)\,dx. \tag{2.3.10′}$$

Из (2.3.10) и (2.3.10′) следует формула (2.3.1) для функций $g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}$.

Обозначим

$$G^{(\pm)}(s) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}\,y^{s-1}\,dy \quad \left(s=\frac{1}{2}+it\right). \tag{2.3.11}$$

Из (2.3.6) и (2.3.6′) следует, что при $s=\frac{1}{2}+it$

$$\begin{aligned}(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s) &= \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}\,y^{s-1}\,dy,\\ (2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s) &= \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}\,y^{s-1}\,dy.\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Из формул (2.3.11) и (2.3.12) следуют функциональные уравнения:

$$\begin{aligned}G^{(+)}(s) &= (2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s),\\ G^{(-)}(s) &= (2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(1-s),\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

справедливые на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$.

Уравнения (2.3.13) эквивалентны следующим:

$$G^{(+)}(1-s)=(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F(s),$$
$$G^{(-)}(1-s)=(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F(s), \tag{2.3.13'}$$

также справедливым на линии $s=\frac{1}{2}+it$.

В лемме 13 было доказано, что на линии $s=\frac{1}{2}+it$ имеет место уравнение:

$$2\pi\rho=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)H^{(-)}(s)+$$
$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(1-s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)H^{(+)}(s). \tag{2.3.14}$$

Умножим обе части (2.3.14) на $F(s)$; тогда, в силу (2.3.13′), будем иметь:

$$(2\pi\rho)^{\frac{1}{2}}F(s)=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}H^{(-)}(s)G^{(+)}(1-s)+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}H^{(+)}(s)G^{(-)}(1-s). \tag{2.3.15}$$

Обозначим

$$f(x;\ a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}F(s)x^{-s}\,ds;$$

тогда

$$\int\limits_0^x f(u;\ a)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{F(s)}{1-s}x^{1-s}\,ds; \tag{2.3.16}$$

но, по теореме A,

$$\underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}}\, f(u;\ a)=f(u),$$

поэтому из (2.3.16) следует, что существует интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{F(s)}{1-s}x^{1-s}\,ds=\int\limits_0^x f(u)\,du. \tag{2.3.17}$$

Разделим обе части тождества (2.3.15) на

$$(2\pi\rho)^{\frac{1}{2}}(1-s)x^{s-1}2\pi i \qquad (x>0)$$

и проинтегрируем по линии $s=\frac{1}{2}+it$; тогда, в силу (2.3.17), получим:

$$\int_0^x f(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(-)}(s)}{1-s}G^{(+)}(1-s)\,x^{1-s}\,ds+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(+)}(s)}{1-s}G^{(-)}(1-s)\,x^{1-s}\,ds\right\}. \tag{2.3.18}$$

Но для любого $x>0$ мы имели формулу (2.1.11), поэтому, по теореме B, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}G^{(\mp)}(1-s)\,x^{1-s}\,ds=\int_0^\infty\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}\,dy. \tag{2.3.19}$$

Из (2.3.18) и (2.3.19) выводим:

$$\int_0^x f(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}\,dy+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty\frac{e^{ixy}-1}{iy}g^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}\,dy\right\}, \tag{2.3.20}$$

откуда следует двойственная формула (2.3.2) теоремы.

Переходим к доказательству утверждений (2.3.3) и (2.3.4) теоремы.

Для преобразований Меллина $G^{(\pm)}(s)$ функций $g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}$ выше были получены формулы (2.3.13), откуда, по теореме A, выводим:

$$\int_0^\infty|g^{(+)}(y)|^2\,y^{2\mu-2}\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)F\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2dt,$$

$$\int_0^\infty|g^{(-)}(y)|^2\,y^{2\mu-2}\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)F\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2dt. \tag{2.3.21}$$

Но, по лемме 7, для любого $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$ при всех значениях α из отрезка $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right]$ имеем:

$$(2\pi\rho)^{-\frac{1}{2}}\left|\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2}+it\right);\ \alpha)\right|\leqslant M\quad(-\infty<t<+\infty), \tag{2.3.22}$$

где M_1 — константа, не зависящая от t и α.

Из (2.3.21) и (2.3.22) следует, что

$$\int_0^\infty |g^{(\pm)}(y)|^2 y^{2\mu-2}\,dy \leqslant M^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2 dt, \qquad (2.3.22')$$

а так как, по теореме A,

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt, \qquad (2.3.23)$$

то из (2.3.22′) и (2.3.23) получаем оценку (2.3.3) теоремы.

Наконец, из тождества (2.3.15) имеем, что на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$

$$2\pi\rho\,|F(s)|^2 \leqslant 2\,|H^{(-)}(s)|^2\,|G^{(+)}(1-s)|^2 + 2\,|H^{(+)}(s)|^2\,|G^{(-)}(1-s)|^2,$$

откуда, в силу леммы 15, интегрированием получим:

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|G^{(+)}\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|G^{(-)}\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2 dt. \qquad (2.3.24)$$

Отсюда, разделив обе части (2.3.24) на 2π, по теореме A найдем:

$$\rho \int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \leqslant 2 \int_0^{+\infty} |g^{(+)}(y)|^2 y^{2\mu-2}\,dy + 2\int_0^\infty |g^{(-)}(y)|^2 y^{2\mu-2}\,dy,$$

т. е. мы получили оценку (2.3.4) теоремы.

4°. Два случая равенства Парсеваля в теореме 5. Вопрос о том, имеет ли место равенство Парсеваля для двойственных функций $f(x)$ и $g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}$ теоремы 5 при произвольных значениях параметров ρ и μ, подчиненных лишь условию $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, пока остается открытым.

Однако для значений $\rho=\frac{1}{2}$ и $\rho=1$ при соответствующем подборе параметра μ для двойственных функций $f(x)$ и $g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}$ равенство Парсеваля справедливо. Рассмотрим эти случаи, известные также в классической теории интегралов Фурье в классе L_2.

ТЕОРЕМА 6. а) *Если* $\rho=\frac{1}{2}$, *а* $\mu=1$ *или* $\mu=2$, *то для функций* $f(x)$ *и* $g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}$ *теоремы* 5 *имеет место равенство Парсеваля*:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g^{(+)}(y)|^2 y^{2\mu-2}\,dy + \int_0^\infty |g^{(-)}(y)|\,y^{2\mu-2}\,dy. \qquad (2.4.1)$$

б) *Если* $\rho=1$ *и* $\mu=1$, *то имеет место равенство*

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g^{(+)}(y)|^2\,dy + \int_0^\infty |g^{(-)}(y)|^2\,dy. \qquad (2.4.2)$$

Доказательство. а) Пусть $\rho = \frac{1}{2}$, тогда двойственные формулы (2.3.1) и (2.3.2) теоремы 5 примут вид:

$$g^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \left\{ y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\frac{1}{2}}(-x^2y^2;\ \mu+1)\, x^{\mu-1} f(x)\, dx \right\} \quad (2.4.3)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixy}-1}{-iy} g(y)\, y^{\mu-1}\, dy + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{ixy}-1}{iy} g(y)\, y^{\mu-1}\, dy \right\}, \quad (2.4.4)$$

где, по (2.4.3), $g(y) = g^{(+)}(y) = g^{(-)}(y)$.

Если $\mu = 1$, то, учитывая формулу

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2y^2;\ 2) = \frac{\sin xy}{xy},$$

мы из (2.4.3) и (2.4.4) получим двойственные формулы

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} f(x)\, dx \quad (2.4.5)$$

и

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y} g(y)\, dy, \quad (2.4.6)$$

выражающие результат теоремы 3 из теории классического интеграла Фурье. В данном случае равенство (2.2.7) теоремы 3 принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_0^{\infty} |g(y)|^2\, dy,$$

а так как $g(y) = g^{(+)}(y) = g^{(-)}(y)$, то отсюда следует равенство (2.4.1) теоремы 6 для значения $\mu = 1$.

Если же $\mu = 2$, то, в силу формулы

$$E_{\frac{1}{2}}(-x^2y^2;\ 3) = \frac{1-\cos xy}{x^2y^2},$$

двойственные формулы (2.4.3) и (2.4.4) принимают вид:

$$g(y)\, y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos xy}{x} f(x)\, dx, \quad (2.4.7)$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos xy}{y} g(y)\, y\, dy, \quad (2.4.8)$$

где $g(y)\, y \in L_2(0, +\infty)$.

Но двойственные формулы (2.4.7) и (2.4.8) выражают собой результат теоремы 4. Поэтому в нашем случае равенство (2.2.13) теоремы 4 принимает вид:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g(y)|^2 y^2\,dy.$$

Так как $g^{(+)}(y) = g^{(-)}(y) = g(y)$, то отсюда следует равенство (2.4.2) теоремы 6 при значении $\mu = 2$.

б) Заметим, что при $\rho = \mu = 1$

$$E_1(z;\,2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(2+n)} = \frac{e^z - 1}{z}\,. \tag{2.4.9}$$

Поэтому в нашем случае двойственные формулы (2.3.1) и (2.3.2) теоремы 5 принимают вид:

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm ix} f(x)\,dx, \tag{2.4.10}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,g^{(+)}(y)\,dy + \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{ixy}-1}{iy}\,g^{(-)}(y)\,dy\right\}. \tag{2.4.11}$$

Из формулы (2.4.10) по известной теореме Планшереля получим равенство (2.4.2), точно так же, как это было сделано в конце доказательства теоремы 1.

§ 3. Сходимость в среднем обобщенных преобразований. Приближение целыми функциями на лучах в комплексной области

В настоящем параграфе мы дополним результат теоремы 1 и докажем основную теорему о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0, +\infty)$ целыми функциями порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, тип которых стремится к бесконечности. В конце параграфа приводится общая теорема о приближении в среднем к функциям, принадлежащим к классу L_2 на лучах в комплексной области, целыми функциями, тип которых стремится к бесконечности.

Приводимые результаты представляют собой естественное развитие теоремы Планшереля, утверждающей возможность приближения в среднем к функциям, принадлежащим к $L_2(-\infty, +\infty)$ (т. е. принадлежащим к классу L_2 на двух лучах, исходящих из одной точки и составляющих угол π), целыми функциями порядка $\rho = 1$, тип которых стремится к бесконечности.

1°. Дополнение теоремы 1. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Для любой функции* $g(y)$ *из класса* $g(y)\,y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$, *если* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *имеет место предельное соотношение:*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^{\infty}\left|g(y) - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^{\sigma} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx\right|^2 y^{2\mu-2}\,dy = 0, \quad (3.1.1)$$

где, как и в теореме 1,

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g(y)\,y^{\mu-1}\,dy \in L_2(0, +\infty). \qquad (3.1.2)$$

Доказательство. В дополнение к обозначениям теоремы 1 введем следующие обозначения: пусть для любого $\sigma > 0$

$$f_\sigma^{(\pm)}(x) = \begin{cases} f^{(\pm)}(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при } x > \sigma, \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

$$g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^{\mu}\int_0^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(\mp)}(x)\,dx\right\}, \quad (3.1.4)$$

$$g_\sigma^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^{\mu}\int_0^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f_\sigma^{(\mp)}(x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^{\mu}\int_0^{\sigma} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(\mp)}(x)\,dx\right\}. \qquad (3.1.5)$$

Заметим, что так как функции $f^{(\mp)}(x)$ и $f_\sigma^{(\mp)}(x)$ принадлежат к классу $L_2(0, +\infty)$ по теореме 1, то по теореме 5,

$$g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$$

и при любом $\sigma > 0$

$$g_\sigma^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty).$$

Далее, так как

$$[g^{(\pm)}(y) - g_\sigma^{(\pm)}(y)]\,y^{\mu-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^{\mu}\int_\sigma^{\infty} E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(\mp)}(x)\,dx\right\}, \qquad (3.1.6)$$

то, по неравенству (2.3.3) теоремы 5, из (3.1.6) имеем:

$$\int_0^{\infty}|g^{(\pm)}(y) - g_\sigma^{(\pm)}(y)|^2\,y^{2\mu-2}\,dy \leqslant M_1\int_\sigma^{\infty}|f^{(\mp)}(x)|^2\,dx, \qquad (3.1.7)$$

где M_1 — константа, не зависящая от σ.

Из (3.1.7) следует, что

$$g^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1} = \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\; g_\sigma^{(\pm)}(y)\,y^{\mu-1}. \qquad (3.1.8)$$

Но из формулы (2.1.3) теоремы 1 и из обозначений (3.1.4) следует, что

$$g(y)\,y^{\mu-1}=\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}g^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}g^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}\right\}. \quad (3.1.9)$$

Если мы обозначим

$$g_\sigma(y)\,y^{\mu-1}=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}g_\sigma^{(+)}(y)\,y^{\mu-1}+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}g_\sigma^{(-)}(y)\,y^{\mu-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^\mu\int_0^\sigma E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx\right]+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^\mu\int_0^\sigma E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\,x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx\right]\right\}, \quad (3.1.10)$$

то из (3.1.8) получим:

$$g(y)\,y^{\mu-1}=\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l. i. m.}}\ g_\sigma(y)\,y^{\mu-1}. \quad (3.1.11)$$

Утверждение теоремы (3.1.1) легко следует из (3.1.11), если заметить, что

$$\frac{d}{dy}\left[y^\mu E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu+1)\right]=\frac{d}{dy}\left[y^\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)^n}{\Gamma(\mu+1+n\rho^{-1})}\right]=$$

$$=\frac{d}{dy}\left[\int_0^y\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t^{\frac{1}{\rho}}x^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\right)t^{\mu-1}\,dt\right]=$$

$$=\frac{d}{dy}\int_0^y E_\rho(t^{\frac{1}{\rho}}x^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)\,t^{\mu-1}\,dt=y^{\mu-1}E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu). \quad (3.1.12)$$

2°. **Приближение в среднем на луче $(0,+\infty)$ целыми функциями порядка $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, тип которых стремится к бесконечности.** Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$. Если $g_1(y)$ — произвольная функция из класса*

$$\int_0^\infty|g_1(y)|^2\,y^{2\mu\rho-\rho-1}\,dy<+\infty, \quad (3.2.1)$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{e^{\pm ixy^\rho}-1}{\pm iy^\rho}\,g_1(y)\,y^{\mu\rho-1}\,dy \quad (3.2.2)$$

принадлежат к классу $L_2(0,+\infty)$.

Целые функции порядка ρ и типа $\sigma>0$, определяемые по формуле

$$G_\sigma(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}ze^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)\,x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx+$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}ze^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)\,x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx, \quad (3.2.3)$$

сходятся в среднем к $g_1(y)$, *когда* $\sigma \to +\infty$, *в смысле*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |g_1(y)-G_\sigma(y)|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1}\,dy=0. \qquad (3.2.4)$$

В случае, когда $\rho \geqslant 1$, *для функций* $G_\sigma(z)$ *справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |G_\sigma(ye^{i\varphi})|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1}\,dy=0, \qquad \frac{\pi}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}. \qquad (3.2.5)$$

Доказательство. Формула (3.2.4) легко следует из теоремы 7. Действительно, обозначая $g(y)=g_1(y^{\frac{1}{\rho}})$, из (3.2.1) получим, что $g(y)\,y^{\mu-1}\in L_2(0,+\infty)$. Отсюда, по теореме 1, следует, что функция

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy_1}-1}{\pm iy_1}g(y_1)\,y_1^{\mu-1}\,dy_1 \qquad (3.2.6)$$

принадлежит к классу $L_2(0,+\infty)$. Из (3.2.6) простой заменой переменного $y_1=y^\rho$ получим представление (3.2.2).

Для функции $g(y)$ имеет место утверждение (3.1.1) теоремы 7. Заменой переменного из (3.1.1) получим (3.2.4), если примем во внимание обозначение (3.2.3).

Остается установить, что при $\rho\geqslant 1$ справедлива также формула (3.2.5).

По лемме 14, при $\rho\geqslant 1$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, когда $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$, имеет место тождество

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)H^{(-)}(1-s)+$$
$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\,\mathcal{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)H^{(+)}(1-s)=0 \qquad (3.2.7)$$

для значений параметра ω, удовлетворяющих условию

$$0\leqslant\omega\leqslant 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right).$$

Как в теореме 1, обозначая для $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$

$$G(s)=\int_0^\infty g(y)\,y^{\mu-1}y^{s-1}\,dy,$$

$$F^{(\pm)}(s)=\int_0^\infty f^{(\pm)}(x)\,x^{s-1}\,dx,$$

получим:

$$F^{(\pm)}(1-s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}G(s)\,H^{(\pm)}(1-s). \qquad (3.2.8)$$

Умножив обе части (3.2.7) на $G(s)$, из (3.2.8) найдем:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)F^{(+)}(1-s)+$$
$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)F^{(-)}(1-s)=0. \qquad (3.2.9)$$

Разделим это уравнение на

$$2\pi i(1-s)y^{s-1} \quad (y>0)$$

и проинтегрируем по линии $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$; тогда получим:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}-i\infty}\frac{\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)}{1-s}y^{1-s}F^{(+)}(1-s)\,ds+$$
$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathscr{E}_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)}{1-s}y^{1-s}F^{(-)}(1-s)\,ds=0. \quad (3.2.10)$$

Но, согласно формуле (2.1.21′), для любого $\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}$ и $y>0$ равенство

$$\frac{\mathscr{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s}y^{1-s}=y^\mu\int_0^\infty E_\rho(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\ \mu+1)\,x^{s+\mu-2}\,dx$$

имеет место на линии $s=\frac{1}{2}+it\ (-\infty<t<+\infty)$ в смысле теоремы А.

Поэтому, согласно теореме В, тождество (3.2.10) принимает вид:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}y^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}+\omega\right)};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx+$$
$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}y^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}+\omega\right)};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx=0. \quad (y>0) \quad (3.2.11)$$

Это значит, что для любого $\varphi=\frac{\pi}{\rho}+\omega$, $\frac{\pi}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}$, почти всюду на $(0,+\infty)$ имеет место тождество:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx\right]+$$
$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu+1\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)\,dx\right]=0. \quad (3.2.12)$$

Пусть для любого $\sigma > 0$

$$f_\sigma^{(\pm)}(x) = \begin{cases} f^{(\pm)}(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \sigma, \\ 0 & \text{при } x > \sigma. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Обозначим, далее,

$$F^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} = \frac{d}{dy}\left\{ y^\mu \int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu+1\right) x^{\mu-1} f^{(\pm)}(x)\, dx \right\}, \tag{3.2.14}$$

$$F_\sigma^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} = \frac{d}{dy}\left[y^\mu \int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu+1\right) x^{\mu-1} f_\sigma^{(\pm)}(x)\, dx \right] =$$

$$= \frac{d}{dy}\left[y^\mu \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu+1\right) x^{\mu-1} {}^{(\pm)}(x)\, dx \right] =$$

$$= y^{\mu-1} \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} {}^{i\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu\right) x^{\mu-1} f^{(\pm)}(x)\, dx. \tag{3.2.15}$$

Отметим, что в формулах (3.2.12) — (3.2.15) параметр φ может изменяться в отрезке $\left[\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$, при этом, по теореме 5, имеем:

$$F^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1}, \quad F_\sigma^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty).$$

Точно так же, как при доказательстве теоремы 7, заключаем, что

$$F^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} = \underset{\sigma \to +\infty}{\text{l. i. m.}}\, F_\sigma^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1}. \tag{3.2.16}$$

В силу тождества (3.2.12.), почти всюду на $(0, +\infty)$ имеем:

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F^{(+)}(y)\, y^{\mu-1} + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F^{(-)}(y)\, y^{\mu-1} = 0, \tag{3.2.17}$$

поэтому из (3.2.16) и (3.2.17) следует, что

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\text{l. i. m.}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F_\sigma^{(+)}(y)\, y^{\mu-1} + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F_\sigma^{(-)}(y)\, y^{\mu-1} \right\} = 0. \tag{3.2.18}$$

Но, в силу (3.2.15) и (3.2.3),

$$\left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F_\sigma^{(+)}(y)\, y^{\mu-1} + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} F_\sigma^{(-)}(y)\, y^{\mu-1} \right\} =$$

$$= \left[e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu\right) x^{\mu-1} f^{(+)}(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2\rho}\right)}; \mu\right) x^{\mu-1} f^{(-)}(x)\, dx \right] y^{\mu-1} =$$

$$= G_\sigma\left(y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi}\right) y^{\mu-1} (2\pi\rho)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.19}$$

Поэтому, в силу (3.2.18) и (3.2.19), имеем:

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty \left|G_\sigma\left(y_1^{\frac{1}{\rho}}e^{i\varphi}\right)y_1^{\mu-1}\right|^2 dy_1 = 0 \tag{3.2.20}$$

при $\frac{\pi}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}$

Утверждение (3.2.5) теоремы получается из (3.2.20) простой заменой переменного интегрирования $y_1^{\frac{1}{\rho}}=y$.

Теорема полностью доказана.

3°. Общая теорема об аппроксимации целыми функциями на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат. Обозначим через $\{L\}$ совокупность лучей

$$\begin{gathered} l_k:\ \arg z=\varphi_k \quad (k=1,2,\ldots,n), \\ 0=\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_n<2\pi, \end{gathered} \tag{3.3.1}$$

исходящих из начала координат.

Обозначим, далее,

$$\alpha=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right\}. \tag{3.3.2}$$

ТЕОРЕМА 9. *Пусть* $\rho\geqslant\alpha$ *и* $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$. *Для произвольной функции* $F(z)$, *определенной на* $\{L\}$ *и удовлетворяющей условию*

$$\int_{\{L\}}|F(z)|^2|z|^{2\mu\rho-\rho-1}d|z|<+\infty, \tag{3.3.3}$$

существуют целые функции $G_\sigma(z)$ *порядка* ρ *и типа* σ, *для которых*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{\{L\}}|F(z)-G_\sigma(z)|^2|z|^{2\mu\rho-\rho-1}d|z|=0. \tag{3.3.4}$$

Доказательство. Из условия (3.3.3) следует, что

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi_k})|^2 r^{2\mu\rho-\rho-1}dr<+\infty \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

откуда, как в теореме 8, заключаем, что функции

$$f_k^{(\pm)}(x)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixr^\rho}-1}{\pm ir^\rho}F(re^{i\varphi_k})r^{\mu\rho-1}dr \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{3.3.5}$$

принадлежат к классу $L_2(0,+\infty)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} G_\sigma^{(k)}(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}ze^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}-\varphi_k\right)};\mu\right)x^{\mu-1}f_k^{(-)}(x)dx\Big\}+ \\ +e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}ze^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho}+\varphi_k\right)};\mu\right)x^{\mu-1}f_k^{(+)}(x)\,dx\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Очевидно, $G_\sigma^{(k)}(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ есть целая функция порядка ρ и типа σ. По теореме 8, имеем:

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |F(re^{i\varphi_k})-G_\sigma^{(k)}(re^{i\varphi_k})|^2 r^{2\mu\sigma-\rho-1}\,dr=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.3.7}$$

и

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |G_\sigma^{(k)}(re^{i\varphi})|^2 r^{2\mu\rho-\rho-1}\,dr=0, \quad |\varphi-\varphi_k|\geqslant\frac{\pi}{\rho} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{3.3.8}$$

Но, по условию,

$$\rho\geqslant\alpha=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right\},$$

поэтому из (3.3.8), в частности, следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |G_\sigma^{(k)}(re^{i\varphi_j})|^2 r^{2\mu\rho-\rho-1}\,dr=0 \quad (j\neq k,\ i, k=1, 2, \ldots, n). \tag{3.3.9}$$

Обозначим

$$G_\sigma(z)=\sum_{k=1}^n G_\sigma^{(k)}(z);$$

тогда из (3.3.7) и (3.3.9) будет следовать:

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty |F(re^{i\varphi_k})-G_\sigma(re^{i\varphi_k})|^2\, r^{2\mu\rho-\rho-1}\,dr=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{3.3.10}$$

т. е. утверждение (3.3.4) теоремы.

Покажем, что теорема 9 содержит в виде частного случая одно из основных утверждений теории Планшереля из классической теории интегралов Фурье, о котором говорилось во введении.

Именно, покажем, что если $F(y)\in L_2(-\infty, +\infty)$, то, обозначая

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}F(y)\,dy, \tag{3.3.11}$$

$$G_\sigma(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{+\sigma}e^{ixz}f(x)\,dx, \tag{3.3.12}$$

будем иметь:

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(y)-G_\sigma(y)|^2\,dy=0. \tag{3.3.13}$$

Рассмотрим результат теоремы 9 в частном случае $k=2$, когда $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, и поэтому $\alpha=1$. Исследуем случай, когда $\varphi=\mu=1$.

Если $F(y) \in L_2(-\infty, +\infty)$, то, по теореме 9, функции

$$f_1^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} F(y)\, dy, \tag{3.3.14}$$
$$f_2^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_1^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} F(-y)\, dy$$

принадлежат к классу $L_2(0, +\infty)$.

Соответствующие целые функции $G_c^{(k)}(z)$ $(k = 1, 2)$ в силу (3.3.6) и того обстоятельства, что $E_1(z;\ 1) = e^z$, примут вид:

$$G_\sigma^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma e^{ixz} f_1^{(-)}(x)\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma e^{-ixz} f_1^{(+)}(x)\, dx, \tag{3.3.15}$$
$$G_\sigma^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma e^{-ixz} f_2^{(-)}(x)\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma e^{ixz} f_2^{(+)}(x)]\, dx.$$

Из (3.3.15) имеем:

$$G_\sigma(z) = G_\sigma^{(1)}(z) + G_\sigma^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{ixz} [f_1^{(-)}(x) + f_2^{(+)}(x)] dx. \tag{3.3.16}$$

Но из формул (3.3.14) следует, что

$$f_1^{(-)}(x) + f_2^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} F(y)\, dy + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{ixy} - 1}{iy} F(-y)\, dy \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} F(y)\, dy.$$

Таким образом, обозначая

$$f_1^{(-)}(x) + f_2^{(+)}(x) = f(x),$$

мы для целой функции (3.3.16) получим представление (3.3.12), а поэтому, по теореме 9, будет иметь место (3.3.13).

В заключение заметим, что, таким образом, теорема 9 содержит аппарат интегралов типа Фурье для представления функций на произвольной системе лучей, исходящих из одной точки комплексной плоскости.

§ 4. Параметрическое представление некоторых классов целых функций

Теоремы об обобщенных преобразованиях, доказанные в § 2, позволяют существенно дополнить ряд результатов работы автора (9) о представлении целых функций конечного порядка и нормального типа, интегрируемых по лучам в комплексной области.

В этом параграфе устанавливается, что полученные нами в указанной работе представления являются параметрическими представлениями для соответствующих классов целых функций.

1°. Параметрическое представление целых функций нормального типа, интегрируемых по лучам. Обозначим через A_σ совокупность целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1}\,dt < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{4.1.1}$$

ТЕОРЕМА 10. *Класс A_σ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление*

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(vz;\ \mu)\,\psi(v)\,v^{\mu\rho-1}\,dv, \tag{4.1.2}$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *и*

$$\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\psi(v)|^2 v^{\rho-1}\,dv < +\infty. \tag{4.1.3}$$

Доказательство. В теореме 3 работы [9] было доказано, что произвольная функция $f(z) \in A_\sigma$ допускает представление вида (4.1.2), где $\psi(v)$ — некоторая функция из класса (4.1.3).

Таким образом, нам остается установить, что любая функция $f(z)$, представимая формулой вида (4.1.2) при условии (4.1.3), когда $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, является целой функцией порядка ρ и типа σ и удовлетворяет условиям (4.1.1).

Из (4.1.2), в силу (4.1.3) и неравенства Шварца, получим:

$$|f(z)| \leqslant \left\{\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\psi(v)|^2 v^{\rho-1}\,dv\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |E_\rho(vz;\ \mu)|^2 v^{2\mu\rho-\rho-1}\,dv\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left|E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}|z|;\ \mu\right)\right|, \tag{4.1.4}$$

где C_1 — постоянная. Из определения (4.1.2) функции $f(z)$ и из оценки (4.1.4) следует, что она целая, порядка ρ и типа σ.

Нам остается доказать, что для функции $f(z)$ сходятся интегралы (4.1.1).

Из (4.1.2) имеем:

$$f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho\left(tve^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)\psi(v)\,v^{\mu\rho-1}\,dv, \tag{4.1.5}$$

откуда после замены $t = y^{\frac{1}{\rho}}$, $v = x^{\frac{1}{\rho}}$ получим:

$$f\left(y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right) = \frac{1}{\rho}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right)\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right) x^{\mu-1}\,dx, \qquad (4.1.6)$$

причем условие (4.1.3) примет вид:

$$\int_0^\sigma \left|\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^2 dx < +\infty. \qquad (4.1.3')$$

В силу формулы (3.1.12), будем иметь:

$$f\left(y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right) y^{\mu-1} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1\right) x^{\mu-1}\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right) dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu \int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1\right) x^{\mu-1}\varphi(x)\,dx\right\}, \qquad (4.1.7)$$

где $\varphi(x) = \psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)$ при $0 \leqslant x \leqslant \sigma$ и $\varphi(x) = 0$ при $x > \sigma$ и, очевидно, в силу (4.1.3′),

$$\varphi(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Из (4.1.7), в силу того что $\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$, по теореме 5 заключаем:

$$\int_0^\infty \left|f\left(y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2 y^{2\mu-2}\,dy < +\infty. \qquad (4.1.8)$$

Но после замены $y^{\frac{1}{\rho}} = t$ условие (4.1.8) принимает вид (4.1.1) и таким образом теорема полностью доказана.

Обозначим через B_σ класс целых функций порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(te^{i\alpha})|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1}\,dt < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right) \qquad (4.1.9)$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

Для целых функций класса B_σ имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 11. *Класс B_σ совпадает с классом целых функций $f(z)$, допускающих представление в виде*

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(vz; \mu)\,\psi(v)\,v^{\mu\rho-1}\,dv, \qquad (4.1.10)$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *и*

$$\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\psi(v)|^2 v^{\rho-1} dv < +\infty. \tag{4.1.11}$$

Доказательство. То обстоятельство, что любая функция $f(z) \in B_\sigma$ допускает представление вида (4.1.10) при условии (4.1.11), доказано в теореме 3 (bis) работы автора ([9]).

Таким образом, нам остается установить справедливость обратного утверждения, что любая функция $f(z)$ вида (4.1.10) при условии (4.1.11) принадлежит к классу B_σ. То, что эта функция целая, порядка ρ и типа $\leqslant \sigma$, устанавливается точно так же, как и в теореме 10. Остается показать, что при условии (4.1.11) функция $f(z)$, определяемая по (4.1.10), удовлетворяет также и условию (4.1.9).

После замены $t = y^{\frac{1}{\rho}}$, $v = x^{\frac{1}{\rho}}$ из формулы (4.1.10) имеем:

$$f\left(y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{\rho}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha};\ \mu\right) \psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right) x^{\mu-1} dx, \tag{4.1.12}$$

где, в силу (4.1.11),

$$\int_0^\sigma |\psi(x^{\frac{1}{\rho}})|^2 dx < +\infty. \tag{4.1.13}$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x^{\frac{1}{\rho}})$ при $0 \leqslant x \leqslant \sigma$ и $\varphi(x) = 0$ при $x > \sigma$; тогда, в силу (4.1.13), $\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$.

Обозначим

$$F(s) = \underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \varphi(x) x^{s-1} dx \quad \left(s = \frac{1}{2} + it\right);$$

тогда известно, что

$$F\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Из леммы 7 следует, что при $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$

$$\mathscr{E}_\rho\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right) F\left(\frac{1}{2} - it\right) \in L_2(-\infty, +\infty)$$

для любого $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$.

Обозначим

$$y^{\mu-1} g(y; \alpha; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \mathscr{E}_\rho(s; \alpha) F(1-s) y^{-s} ds; \tag{4.1.14}$$

тогда, по теореме А, существует предел в среднем

$$y^{\mu-1}g(y;\alpha)=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, g(y;\alpha;a)\,y^{\mu-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\mathscr{E}_\rho(s;\alpha)\,F(1-s)\,y^{-s}ds \tag{4.1.15}$$

для $\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}$; при этом

$$g(y;\alpha)\,y^{\mu-1}\in L_2(0,+\infty). \tag{4.1.16}$$

Как при доказательстве теоремы 5, из (4.1.15) получим:

$$\int\limits_0^y g(u;\alpha)\,u^{\mu-1}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\mathscr{E}_\rho(s;\alpha)}{1-s}F(1-s)\,y^{1-s}ds, \tag{4.1.17}$$

откуда, в силу теоремы В, следует:

$$\int\limits_0^y g(u;\alpha)\,u^{\mu-1}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,y^\mu\int\limits_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\mu+1\right)x^{\mu-1}\varphi(x)\,dx.$$

Поэтому почти всюду на $(0,+\infty)$

$$g(y;\alpha)\,y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu\int\limits_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\mu+1\right)x^{\mu-1}\varphi(x)\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu\int\limits_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\mu+1\right)x^{\mu-1}\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)dx\right\}=$$

$$=y^{\mu-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int\limits_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\mu\right)x^{\mu-1}\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)dx, \tag{4.1.18}$$

в силу формулы (3.1.12).

Но интеграл справа в (4.1.18) сходится в обычном смысле, следовательно, на $(0,+\infty)$ имеем:

$$g(y;\alpha)\,y^{\mu-1}=y^{\mu-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int\limits_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha};\mu\right)x^{\mu-1}\psi\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)dx \tag{4.1.18'}$$

при $\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}$.

Из (4.1.12) и (4.1.18′) выводим:

$$y^{\mu-1}f\left(y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha}\right)=\frac{1}{\rho}\sqrt{2\pi\rho}\,g(y;\alpha)\,y^{\mu-1},$$

откуда, в силу (4.1.16), следует:

$$\int\limits_0^\infty\left|f\left(y^{\frac{1}{\rho}}e^{i\alpha}\right)\right|^2y^{2\mu-2}dy<+\infty\quad\left(\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{4.1.19}$$

Из (4.1.19) заменой переменного $y^{\frac{1}{\rho}} = t$ получим, что для функции $f(z)$ выполняется условие (4.1.9). Теорема доказана.

2°. Обобщение теоремы Палей и Винера. Отнесем к классу C_σ все целые функции $f(z)$ порядка ρ $(1 \leqslant \rho < 2)$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых существуют интегралы

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{\pm \frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\rho}\right) i}\right)\right|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1} dt \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right). \qquad (4.2.1)$$

ТЕОРЕМА 12. *Класс C_σ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_{-\sigma^{\frac{1}{\rho}}}^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(izv; \mu)\, \psi(v)\, v^{\mu\rho-1}\, dv, \qquad (4.2.2)$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ *и*

$$\int_{-\sigma^{\frac{1}{\rho}}}^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\psi(v)|^2\, |v|^{\rho-1}\, dv < +\infty. \qquad (4.4.3)$$

Доказательство. В теореме 5 работы (9) было доказано, что при $\mu > \frac{1}{2}$ функции класса C_σ представляются в виде (4.2.2), где $\psi(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию (4.2.3).

То обстоятельство, что при условии (4.2.3) функция $f(z)$, представляемая в виде (4.2.2), целая, порядка ρ и типа σ, устанавливается так же, как в теореме 10. Таким образом, нужно лишь доказать, что эта функция удовлетворяет также условиям конечности интегралов (4.2.1).

Действительно, по теореме 11, при условии

$$\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\psi(v)|^2\, v^{\mu\rho-1}\, dv < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

функция

$$f_1(z) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(izv; \mu)\, \psi(v)\, v^{\mu\rho-1}\, dv$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |f_1(te^{i\alpha})|^2\, t^{2\mu\rho-\rho-1} dt < +\infty, \quad \left|\alpha + \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}. \qquad (4.2.4)$$

Аналогично, при

$$\int\limits_{-\sigma^{\frac{1}{\rho}}}^{0} |\psi(v)|^2 |v|^{\mu\rho-1} dv < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

функция

$$f_2(z) = \int\limits_{-\sigma^{\frac{1}{\rho}}}^{0} E_\rho(izv; \mu)\, \psi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\infty |f_2(te^{i\alpha})|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1} dt < +\infty, \quad \left|\alpha - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}. \tag{4.2.5}$$

Но

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

и поэтому из (4.2.4) и (4.2.5) следует, что для функции $f(z)$ имеет место неравенство:

$$\int\limits_0^\infty |f(te^{i\alpha})|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1} dt < +\infty, \tag{4.2.6}$$

когда α одновременно удовлетворяет двум условиям:

$$\left|\alpha + \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} \ \text{ и } \ \left|\alpha - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}. \tag{4.2.6'}$$

Условия (4.2.6'), в частности, имеют место, если

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда и следует утверждение о конечности интегралов (4.2.1). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы в частном случае, когда $\rho = \mu = 1$, следует, что класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty, \tag{4.2.7}$$

совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ivz} \psi(v)\, dv, \tag{4.2.8}$$

где $\psi(v) \in L_2(-\sigma, \sigma)$. Это утверждение составляет содержание известной теоремы Палей и Винера ([10]).

Не останавливаясь на других возможных обобщениях теоремы Палей и Винера, приведем теоремы о параметрическом представлении целых функций целого порядка $p \geqslant 1$ и нормального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих обычным условиям интегрируемости по лучам.

Обозначим через $D_\sigma(p)$ $(p \geqslant 1)$ класс целых функций $f(z)$ порядка $p \geqslant 1$ и нормального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{p}\right)}\right)\right|^2 t^{2\mu p-p-1}\,dt < +\infty$$
$$\left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2}+\frac{1}{p},\ n = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1\right). \quad (4.2.9)$$

ТЕОРЕМА 13. *Класс* $D_\sigma(p)$ *совпадает с множеством целых функций* $f(z)$, *представимых в виде*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-\sigma^{\frac{1}{p}}}^{\sigma^{\frac{1}{p}}} E_p\left(ze^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{p}\right)}v;\ \mu\right)\psi_k(v)\,v^{\mu p-1}\,dv, \quad (4.2.10)$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2}+\frac{1}{p}$ *и*

$$\int_{-\sigma^{\frac{1}{p}}}^{\sigma^{\frac{1}{p}}} |\psi_k(v)|^2 |v|^{p-1}\,dv < +\infty \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1). \quad (4.2.11)$$

Доказательство. В теореме 5 * работы автора ([9]) доказано, что при $\mu > \frac{1}{2}$ любая целая функция порядка $p \geqslant 1$ и типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющая условиям (4.2.9), представляется в виде (4.2.10), где $\psi_k(v)$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ — некоторая функция из класса (4.2.11).

Докажем теперь обратное утверждение, что при условии (4.2.11) функция (4.2.10) — целая, порядка p, типа $\leqslant \sigma$ и удовлетворяет условиям (4.2.9). То, что функция (4.2.10) — целая, порядка p и типа $\leqslant \sigma$, — очевидно.

Обозначим

$$f_k(z) = \int_{-\sigma^{\frac{1}{p}}}^{\sigma^{\frac{1}{p}}} E_p\left\{ze^{i\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{p}\right)\pi}v;\ \mu\right\}\psi_k(v)\,v^{\mu p-1}\,dv; \quad (4.2.12)$$

тогда имеем:

$$f_k(te^{i\alpha}) = \int_{-\sigma^{\frac{1}{p}}}^{\sigma^{\frac{1}{p}}} E_p\left\{te^{i\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{p}\right)\pi+i\alpha}v;\ \mu\right\}\psi_k(v)\,v^{\mu p-1}\,dv. \quad (4.2.13)$$

Из (4.2.13), в силу теоремы 10, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве предыдущей теоремы, заключаем:

$$\int_0^\infty |f_k(te^{i\alpha})|^2\, t^{2\mu p-p-1}\,dt < +\infty, \quad (4.2.14)$$

* В доказательство этой теоремы вкрались незначительные опечатки.

если α одновременно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{p}\right)\pi+\alpha\right|\geqslant\frac{\pi}{2p} \text{ и } \left|\left(-\frac{1}{2}+\frac{k}{p}\right)\pi+\alpha\right|\geqslant\frac{\pi}{2p}. \tag{4.2.15}$$

Но мы имеем

$$f(z)=\sum_{k=0}^{p-1} f_k(z),$$

поэтому

$$\int_0^\infty |f(te^{i\alpha})|^2 t^{2\mu p-p-1}\,dt<+\infty, \tag{4.2.16}$$

если α одновременно удовлетворяет условиям (4.2.15) при $k=0,1,2,\ldots$ $\ldots,p-1$. Однако нетрудно видеть, что только при

$$\alpha=-\pi\left(\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{p}\right) \quad (n=0,1,\ldots,2p-1)$$

условия (4.2.15) удовлетворяются одновременно для всех $k=0,1,2,\ldots$ $\ldots,p-1$. Отсюда и следует доказательство теоремы.

Очевидно, при $p=\mu=1$ доказанная теорема содержит известный результат Палей и Винера, о котором говорилось выше.

Сектор математики АН Армянской ССР
и Ереванский госуниверситет им. В. М. Молотова

Поступило
12. I. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Plancherel M., Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, Rendiconti di Palermo, 30 (1910), 289—335.

[2] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, гл. III, М., 1948.

[3] Watson G. N., General transforms, Proc. London Math. Soc., (2)35 (1933), 179—187.

[4] Busbridge I. W., On general transforms with kernels of the Fourier type, Journ. London Math. Soc., 9 (1934), 179—187.

[5] Titchmarsh E. C., A proof of a theorem of Watson, Journ. of London Math. Soc., 8 (1933), 217—220.

[6] Plancherel M., Sur les formules de réciprocité du type de Fourier, Journ. of London Math. Soc., 8 (1933), 220—226.

[7] Kober H., Eine Verallgemeinerung der Transformation vom Fourier-Typ, The Quarterly Journ. of Math., 8, № 31(1937), 172—185.

[8] Джрбашян М. М., Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 427—448.

[9] Джрбашян М. М., Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сборник, 33(75) : 3 (1953), 485—530.

[10] Paley R. and Wiener N., Fourier Transforms in the complex domain, N. Y., 1934.

[11] Fry Cleota G. and Hugens H. K., Asymptotic developments of certain integral functions, Duke Math. Journ., 9 (1942), 791—802.

[12] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. II, М., 1948.

[13] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 191

ЗАМЕЧАНИЕ Ю. Л. ШМУЛЬЯНА ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Ю. М. ГАВРИЛОВА «О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ»*

Теорема 1 статьи Ю. М. Гаврилова в более общем виде может быть сформулирована так:

Пусть A_1 — *положительно определенная, а* A_2 — *симметрическая матрицы. Для того чтобы спектр произведения* $A_1^{-1}A_2$ *лежал в интервале* $(-1, 1)$, *необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $A_1 + A_2$ *и* $A_1 - A_2$ *были положительно определенными.*

Эта теорема может быть доказана более просто следующим образом.

Оператор $A_1^{-1}A_2$ будет симметрическим в скалярном произведении

$$[x, y] = (A_1x, y).$$

Действительно,

$$[A_1^{-1}A_2x, y] = (A_2x, y) = (x, A_2y) = (A_1x, A_1^{-1}A_2y) = [x, A_1^{-1}A_2y].$$

Отсюда вытекает вещественность спектра $A_1^{-1}A_2$ и существование базиса из собственных векторов $A_1^{-1}A_2$ с вещественными компонентами. Если спектр $A_1^{-1}A_2$ лежит в интервале $(-1, 1)$, то

$$-[x, x] < [A_1^{-1}A_1x, x] < [x, x] \quad (x \neq 0).$$

Отсюда

$$-(A_1x, x) < (A_2x, x) < (A_1x, x)$$

или

$$((A_1 \pm A_2)x, x) > 0.$$

Необходимость доказана. Достаточность следует из обратимости рассуждений.

---

* Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 87—94.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 193—200

Д. К. ФАДДЕЕВ

К ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Вводятся новые группы гомологий, определяемые группой и заданной в ней подгруппой и обобщающие брауэровские системы факторов в теории алгебр. С их помощью изучается связь между группами гомологий группы и подгруппы в случае, когда индекс и порядок группы взаимно просты.

1°. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, $\mathfrak{a}$ — аддитивно записанная $\mathfrak{G}$-операторная абелева группа. $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ и $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ обозначают, соответственно, группы (неоднородных) цепей, циклов, границ и гомологий при граничном операторе δ, действующем на n-мерную цепь f по формуле:

$$(\delta f)_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}} = f_{x_2, \ldots, x_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_{x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}} + \\ + (-1)^{n+1} f^{x_{n+1}}_{x_1, \ldots, x_n}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathfrak{G}.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ есть подгруппа $\mathfrak{G}$. Выделим в группе цепей (циклов, границ, гомологий) подгруппу следующим образом. b-цепью будем называть цепь, удовлетворяющую следующим требованиям:

$$(b_1) \qquad f_{yx_1, x_2, \ldots, x_n} = f_{x_1, x_2, \ldots, x_n},$$

$$(b_2) \qquad f_{x_1, \ldots, x_i y, x_{i+1}, \ldots, x_n} = f_{x_1, \ldots, x_i, y x_{i+1}, \ldots, x_n},$$

$$(b_3) \qquad f_{x_1, x_2, \ldots, x_n y} = f^{y}_{x_1, \ldots, x_n}$$

при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{H}$.

Нуль-мерными b-цепями будем считать элементы $\mathfrak{a}$, остающиеся инвариантными при применении операторов из $\mathfrak{H}$.

Если сопоставить обычным способом [см. (1)] n-мерным неоднородным цепям $(n+1)$-мерные однородные, то b-цепям окажутся сопоставленными цепи F, обладающие, кроме правой $\mathfrak{G}$-однородности

$$F_{x_1 x, x_2 x, \ldots, x_{n+1} x} = F^{x}_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}},$$

еще левой $\mathfrak{H}$-однородностью по каждому аргументу:

$$F_{y_1 x_1 y_2 x_2, \ldots, y_{n+1} x_{n+1}} = F_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}}$$

при $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathfrak{G}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathfrak{H}$.

Такие цепи рассматривал Р. Брауэр в связи с теорией алгебр при $n+1=3$ [см., например, (2), § 133].

Очевидно, что n-мерные b-цепи образуют группу; обозначим ее через

$C_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. b-цепи, являющиеся циклами, будем называть b-циклами. Группу b-циклов обозначим через $Z_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.

Установим, что граница b-цепи есть b-цепь. Пусть

$$f \in C_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a}), \quad n \geqslant 1.$$

Тогда

$$(\delta f)_{x_1, \ldots, x_{n+1}} = f_{x_2, \ldots, x_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_{x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}} + (-1)^{n+1} f_{x_1, \ldots, x_n}^{x_{n+1}}.$$

Требование (b_1) для δf выполняется в силу (b_1) для f. Требование (b_2) выполняется для δf в силу (b_2) для f, с использованием (b_1) при $i = 1$ и (b_3) при $i = n$. Наконец, (b_3) для δf выполняется в силу (b_3) для f. Легко проверить справедливость утверждения и при $n = 0$.

Группу границ b-цепей будем обозначать через $B_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ и фактор-группу $Z_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a}) / B_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ — через $H_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.

Если $\mathfrak{H}$ есть нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то значения b-цепей, в силу (b_1) и (b_2), зависят лишь от классов смежности, которым принадлежат аргументы. Далее, в силу (b_3), значения b-цепей принадлежат подгруппе $\mathfrak{a}^{\mathfrak{H}}$ элементов $\mathfrak{a}$, остающихся инвариантными при применении операторов из $\mathfrak{H}$. Поэтому группа $H_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ изоморфна $H^n(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, \mathfrak{a}^{\mathfrak{H}})$.

Каждому классу b-гомологий $\omega \in H_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ естественно сопоставляется класс гомологий $\lambda\omega = \omega + B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \in H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Очевидно, что λ осуществляет гомоморфное отображение $H_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ в $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Этот гомоморфизм мы будем называть подъемом.

Цель данной работы заключается в следующем. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа порядка $g = hk$, $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа, порядок h и индекс k которой взаимно просты. Как известно,

$$gH^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = 0.$$

В силу взаимной простоты h и k, группа $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ разлагается в прямую сумму двух подгрупп $H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ и $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ так, что $kH_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = 0$ и $hH_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = 0$, и такое разложение единственно. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *$H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ изоморфна некоторой подгруппе $H_0^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ группы $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Группа $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ есть прямое слагаемое $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Изоморфизм $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ на $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ осуществляется оператором ограничения ι, сопоставляющим каждой цепи $f \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ цепь $\iota f \in C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ со значениями*

$$(\iota f)_{y_1, \ldots, y_n} = f_{y_1, \ldots, y_n} \quad (y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{H}).$$

Далее, $H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ изоморфна $H_{\mathfrak{b}}^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Изоморфизм осуществляется подъемом λ.

Частный случай этой теоремы, когда $\mathfrak{H}$ есть нормальный делитель $\mathfrak{G}$, установлен в работе Хохшильда и Серре ([3]).

Из первого утверждения теоремы 1 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Если $\mathfrak{G}$ — конечная группа, то $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ изоморфна прямой сумме групп $H_0^n(\mathfrak{P}, \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{P}$ — силовские подгруппы $\mathfrak{G}$, взятые по одной для каждого простого делителя порядка g группы $\mathfrak{G}$.*

Действительно, $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ есть прямая сумма своих p_i-компонент, где

$g = p_1^{\lambda_1} \dots p_m^{\lambda_m}$. Каждая из них, в силу теоремы 1, изоморфна $H_0^n(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{P}_i$ есть силовская p_i-подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

В случае, если $\mathfrak{a}$ — периодическая группа (а также для некоторых других случаев) теорема 2 установлена в работе автора [4].

2°. Докажем первое утверждение теоремы. Легко видеть, что оператор ограничения ι отображает $H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ в 0. Действительно, если $\omega \in H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, то $k\omega = 0$ и, следовательно, $k(\iota\omega) = 0$. Но и $h\iota\omega = 0$, ибо $\iota\omega \in H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, и порядок $\mathfrak{H}$ равен h. Следовательно, $\iota\omega = 0$.

Введем в рассмотрение группу $\mathfrak{j}$ функций f на классах смежности ρ в разложении $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$ со значениями в $\mathfrak{a}$. В группе $\mathfrak{j}$ определим операторы из $\mathfrak{G}$ по формуле:

$$f^x(\rho) = [f(\rho x^{-1})]^x \text{ при } x \in \mathfrak{G}.$$

Группа $\mathfrak{j}$ содержит подгруппу $\mathfrak{a}'$ константных функций f_a, т. е. таких, что $f_a(\rho) = a$ при всех ρ. Группа $\mathfrak{a}'$, очевидно, операторно изоморфна $\mathfrak{a}$.

Известно [см. [5]], что $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ изоморфна $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Изоморфизм осуществляется «оператором ограничения» η, сопоставляющим цепи $F \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ цепь $\eta F \in C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ со значениями

$$(\eta F)_{y_1, \dots, y_n} = F_{y_1, \dots, y_n}(\rho_0),$$

где $\rho_0 = \mathfrak{H}$, $y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{H}$.

Определим некоторое гомоморфное отображение σ группы $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ в группу $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Пусть $f \in Z^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ и $F \in Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$, причем $f = \eta F$. Равным или гомологичным f соответствуют гомологичные F. Далее, положим

$$(\bar{\sigma} F)_{x_1, \dots, x_n} = u \sum_\rho F_{x_1, \dots, x_n}(\rho),$$

где u — такое целое число, что $ku + hv = 1$. Ясно, что $\bar{\sigma}\delta = \delta\bar{\sigma}$, так что $\bar{\sigma}$ отображает циклы в циклы, границы в границы и, следовательно, гомологичные циклы в гомологичные. Если $\omega \in H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, то через $\sigma\omega$ обозначим тот класс гомологий из $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, которому принадлежит $\bar{\sigma} F$, где F — цикл, для которого $\eta F = f$ принадлежит ω. В силу сказанного выше, $\sigma\omega$ не зависит от выбора f и F. Очевидно, что σ есть гомоморфизм $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ в $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Образ при гомоморфизме σ входит в $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, ибо из $h\omega = 0$ следует $h\sigma\omega = 0$.

Рассмотрим цепочку отображений

$$H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \xrightarrow{\iota} H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}) \xrightarrow{\sigma} H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}).$$

Покажем, что $\sigma\iota = 1$ (на $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$). Пусть $\omega \in H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ и f — цикл из класса ω. В качестве цикла F, для которого $\eta F = \iota f$, можно взять константный цикл со значениями

$$F_{x_1, \dots, x_n}(\rho) = f_{x_1, \dots, x_n}.$$

Далее,

$$(\bar{\sigma} F)_{x_1, \dots, x_n} = u \sum_\rho F_{x_1, \dots, x_n}(\rho) = ukf_{x_1, \dots, x_n}.$$

Следовательно, $\sigma\iota\omega = uk\omega = \omega - vh\omega = \omega$, т. е. $\sigma\iota = 1$.

Отсюда заключаем, что ι есть изоморфное отображение $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ в $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Образ $H_i^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ при отображении ι (совпадающий с образом всей группы $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ при отображении ι, ибо $\iota H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) = 0$) обозначим через $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Классы гомологий, составляющие $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, состоят из циклов группы $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{a}$, продолжимых до циклов группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{a}$.

Рассмотрим оператор $\iota\sigma$. Он отображает $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ на $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, причем элементы из $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ отображаются на себя. Следовательно

$$H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}) = H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}) + H_1^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}),$$

где $H_1^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ есть ядро отображения $\iota\sigma$. Действительно, если $\omega \in H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, то

$$\omega = \iota\sigma\omega + (\omega - \iota\sigma\omega).$$

Первое слагаемое принадлежит $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, второе — $H_1^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Очевидно, что

$$H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}) \cap H_1^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a}) = 0.$$

Итак, $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ есть прямое слагаемое в $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Первое утверждение теоремы 1 доказано полностью.

3°. Докажем, что подъем λ отображает $H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ в $H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Если $\mathfrak{H}$ есть подгруппа конечного индекса k группы $\mathfrak{G}$ (которая сейчас не предполагается конечной) и f есть b-цикл, то kf есть b-граница.*

Из этой леммы непосредственно следует, что λ отображает $H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ в $H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Действительно, если $\omega \in H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, то, в силу леммы, $k\omega = 0$. Следовательно, и $k\lambda\omega = 0$, т. е. $\lambda\omega \in H_e^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$.

Доказательство леммы. Пусть f есть b-цикл, т. е. f удовлетворяет требованиям (b_1), (b_2), (b_3), и $\delta f = 0$. Тогда

$$f_{x_2, \ldots, x_{n+1}} = f_{x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1} f_{x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}} + (-1)^n f_{x_1, \ldots, x_n}^{x_{n+1}}. \qquad (1)$$

В силу (b_1), $f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, рассматриваемая как функция от первого аргумента x_1, зависит лишь от класса смежности ρ в разложении $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$, которому принадлежит x_1. Обозначим через g цепь со значениями

$$g_{x_2, \ldots, x_n} = \sum_{x_1} f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}.$$

При суммировании предполагается, что x_1 пробегает систему представителей по одному из каждого класса смежности. Покажем, что g есть b-цепь.

Действительно,

$$g_{yx_2, \ldots, x_n} = \sum_{x_1} f_{x_1, yx_2, \ldots, x_n} = \sum_{x_1} f_{x_1y, x_2, \ldots, x_n} = g_{x_2, \ldots, x_n},$$

ибо x_1y пробегает систему представителей из классов смежности.

Далее,

$$g_{x_2, \ldots, x_i y, x_{i+1}, \ldots, x_n} =$$
$$= \sum_{x_1} f_{x_1, x_2, \ldots, x_i y, x_{i+1}, \ldots, x_n} = \sum_{x_1} f_{x_1, \ldots, x_i, y x_{i+1}, \ldots, x_n} =$$
$$= g_{x_2, \ldots, x_i, y x_{i+1}, \ldots, x_n}.$$

Наконец,

$$g_{x_2, \ldots, x_n y} = \sum_{x_1} f_{x_1, x_2, \ldots, x_n y} = \sum_{x_1} f^{y}_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = g^{y}_{x_2, \ldots, x_n}.$$

Таким образом g удовлетворяет всем требованиям (b_1), (b_2), (b_3).

Просуммируем обе части равенства (1), предполагая, что x_1 пробегает систему представителей по одному из каждого класса смежности, и примем во внимание, что $x_1 x_2$ тоже пробегает систему представителей из классов смежности. Получим:

$$k f_{x_2, \ldots, x_{n+1}} = g_{x_2, \ldots, x_{n+1}} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} g_{x_2, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}} +$$
$$+ (-1)^n g^{x_{n+1}}_{x_2, \ldots, x_n},$$

т. е. $kf = \delta g$, что и требовалось доказать.

4°. Докажем, что λ отображает $H^n_b(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ на $H^n_e(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Для этого достаточно доказать, что каждый цикл из $H^n_e(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ гомологичен b-циклу.

Пусть $f \in \omega \in H^n_e(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Тогда $\iota\omega = 0$, и, следовательно, $\iota f = \delta g$, $g \in C^{n-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Построим цепь $g_1 \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ так, что $\iota g_1 = g$; это, очевидно, можно сделать. Тогда

$$\iota(f - \delta g_1) = \iota f - \delta \iota g_1 = 0.$$

Таким образом f гомологичен циклу $f - \delta g_1$, обращающемуся в 0, если все аргументы принадлежат $\mathfrak{H}$. Поэтому можно предположить с самого начала, что $\iota f = 0$. Легко видеть, что при $n = 1$ каждый такой цикл f, для которого $\iota f = 0$, есть b-цикл. Действительно, по определению одномерного цикла, $f_{x_2} - f_{x_1 x_2} + f^{x_2}_{x_1} = 0$.

Положим $x_1 = y \in \mathfrak{H}$, $x_2 = x$. Получим $f_x = f_{yx}$. Положим теперь $x_2 = y \in \mathfrak{H}$, $x_1 = x$. Получим $f_{xy} = f^{y}_{x}$. Таким образом f есть действительно b-цикл, и для $n = 1$ наше утверждение доказано.

Дальнейшее доказательство будем проводить по индукции, для осуществления которой будет нужна следующая

ЛЕММА. *Любая $\mathfrak{G}$-операторная абелева группа $\mathfrak{a}$ может быть погружена, в качестве допустимой подгруппы, в $\mathfrak{G}$-операторную абелеву группу $\mathfrak{b}$, для которой все $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{b}) = 0, n \geqslant 1$, $\mathfrak{H}$ — любая подгруппа $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. В качестве $\mathfrak{b}$ возьмем группу функций от одного аргумента, определенных на $\mathfrak{G}$ со значениями в $\mathfrak{a}$ (т. е. группу одномерных цепей). Операторы определим по формуле

$$f^x(z) = [f(zx^{-1})]^x \quad (x, z \in \mathfrak{G}).$$

Группа $\mathfrak{b}$ содержит, в качестве допустимой подгруппы, группу константных функций, которая, очевидно, операторно изоморфна группе $\mathfrak{a}$.

Докажем, что все $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{b}) = 0$. Пусть $f \in Z^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. Тогда

$$f_{y_2, \ldots, y_{n+1}}(z) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_{y_1, \ldots, y_i y_{i+1}, \ldots, y_{n+1}}(z) +$$
$$+ (-1)^{n+1} [f_{y_1, \ldots, y_n}(z y_{n+1}^{-1})]^{y_{n+1}} = 0, \quad y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathfrak{H}, \quad z \in \mathfrak{G}. \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{G} = \sum \rho = \sum \mathfrak{H}\bar{\rho}$ — разложение $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$, ρ — система представителей из классов смежности.

Пусть $z^{-1} = y\bar{\rho}$ и, следовательно, $z = \bar{\rho}^{-1} y^{-1}$. Обозначим через $g_{y_1, \ldots, y_{n-1}}$ функцию от z со значениями

$$g_{y_1, \ldots, y_{n-1}}(z) = [f_{y_1, \ldots, y_{n-1}, y}(\bar{\rho}^{-1})]^{y^{-1}}.$$

Заменим в равенстве (2) z на $\bar{\rho}^{-1}$, y_{n+1} — на y и осуществим автоморфизм y^{-1}. Мы получим:

$$g_{y_2, \ldots, y_n}(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g_{y_1, \ldots, y_i y_{i+1}, \ldots, y_n}(z) +$$
$$+ (-1)^n [f_{y_1, \ldots, y_n y}(\bar{\rho}^{-1})]^{y^{-1}} + (-1)^{n+1} f_{y_1, \ldots, y_n}(z) = 0.$$

С другой стороны,

$$g^{y_n}_{y_1, \ldots, y_{n-1}}(z) = [g_{y_1, \ldots, y_{n-1}}(\bar{\rho}^{-1} y^{-1} y_n^{-1})]^{y_n} = [f_{y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n y}(\bar{\rho}^{-1})]^{y^{-1}}.$$

Итак, предпоследнее слагаемое в левой части предыдущего равенства есть $(-1)^n g^{y_n}_{y_1, \ldots, y_{n-1}}(z)$, и, следовательно, $f = (-1)^n \delta g$, что и требовалось доказать.

Допустим что (в условиях теоремы 1) уже доказано, что каждый цикл $f \in Z^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ такой, что $\iota f = 0$, гомологичен b-циклу при любой группе $\mathfrak{a}$ и в этом предположении докажем то же самое для n-мерных циклов.

Пусть $f \in Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ и $\iota f = 0$, $n \geqslant 2$. Погрузим $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{b}$, согласно лемме. Тогда $f = \delta g$, где $g \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$. Так как $\iota f = 0$, то $\delta(\iota g) = 0$, т. е. $\iota g \in Z^{n-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. В силу свойств $\mathfrak{b}$, $\iota g = \delta q$, где $q \in C^{n-2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. Построим $q_1 \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ так, что $\iota q_1 = q$. Тогда $\iota(g - \delta q_1) = 0$ и $f = \delta(g - \delta q_1)$.

Таким образом можно считать, что $f = \delta g$, $g \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ и $\iota g = 0$.

Сделаем теперь естественный гомоморфизм $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, обозначая класс смежности, содержащий $b \in \mathfrak{b}$, через $\bar{b}$. Распространим этот гомоморфизм на группу цепей, обозначив через $\bar{g}$ цепь из $C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ со значениями

$$(\bar{g})_{x_1, \ldots, x_{n-1}} = \overline{g_{x_1, \ldots, x_{n-1}}}.$$

Ясно, что $\overline{\delta g} = \delta\bar{g}$ и $\iota\bar{g} = \overline{\iota g}$. Применив этот гомоморфизм к равенству $f = \delta g$, получим $\delta\bar{g} = 0$. Далее, из $\iota g = 0$ следует $\iota\bar{g} = 0$. В силу индукционного предположения,

$$\bar{g} = \tilde{p} + \delta\tilde{q},$$

где

$$\tilde{p} \in Z_b^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a}), \quad q \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a}).$$

Найдем цепь $q \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ такую, что $\bar{q} = \tilde{q}$. Это, очевидно, мож-

но сделать. Тогда $f = \delta g = \delta(g - \delta q)$ и $\overline{g - \delta q} = \tilde{p} \in Z_b^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$. Итак, можно считать, что $f = \delta g$, $g \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ и $\bar{g} \in Z_b^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$.

Рассмотрим некоторое специальное сопоставление элементам $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ элементов $\mathfrak{b}$.

Это сопоставление будем осуществлять независимо для каждого класса сопряженных элементов по отношению к автоморфизмам $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, порождаемым элементами $\mathfrak{H}$. Пусть $\tilde{c} \in \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ — элемент, выбранный из одного такого класса, и пусть $\mathfrak{H}'$ есть совокупность всех элементов $\tau \in \mathfrak{H}$, для которых $\tilde{c}^{\tau} = \tilde{c}$. Индекс группы $\mathfrak{H}'$ в $\mathfrak{H}$ обозначим через h'.

Выберем произвольно элемент $c \in \mathfrak{b}$ так, что $\bar{c} = \tilde{c}$, и положим

$$\pi(\tilde{c}) = h' \sum_{\tau \in \mathfrak{H}'} c^{\tau}.$$

Ясно, что $\overline{\pi(\tilde{c})} = h\tilde{c}$ и $[\pi(\tilde{c})]^{\tau} = \pi(\tilde{c})$ при $\tau \in \mathfrak{H}'$. Далее, при любом $y \in \mathfrak{H}$ положим $\pi(\tilde{c}^{y}) = [\pi(\tilde{c})]^{y}$.

Каждому элементу из класса сопряженных с $\tilde{c}$ окажется сопоставлен посредством π один элемент из $\mathfrak{b}$, ибо если $\tilde{c}^{y_1} = \tilde{c}^{y_2}$, то и

$$[\pi(\tilde{c})]^{y_1} = [\pi(\tilde{c})]^{y_2}.$$

Таким же образом π определяется на всех классах сопряженных элементов. Итак, нам удалось построить такое отображение π (конечно, не гомоморфное) группы $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ в группу $\mathfrak{b}$, что

1) если $\tilde{c}^{y} = \tilde{c}$, то $[\pi(\tilde{c})]^{y} = \pi(\tilde{c})$, 2) $\overline{\pi(\tau)} = h\tilde{c}$.

Построим теперь цепь $p \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ так, что

$$p_{x_1, \ldots, x_{n-1}} = v\pi(\bar{g}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}),$$

где, как и раньше, v — такое целое число, что $hu + kv = 1$.

Цепь p есть b-цепь. Действительно, равенства

$$p_{yx_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} = p_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}}$$

и

$$p_{x_1, \ldots, x_{i-1} y, x_i, \ldots, x_{n-1}} = p_{x_1, \ldots, x_{i-1}, yx_i, x_{n-1}}$$

вытекают из аналогичных равенств для $\bar{g}$, в силу однозначности отображения π, а равенство $p_{x_1, \ldots, x_{n-1} y} = p^{y}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$ вытекает из аналогичного равенства для $\bar{g}$, в силу свойства 1) отображения π. Далее,

$$\bar{p}_{x_1, \ldots, x_{n-1}} = hv\bar{g}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}.$$

Теперь легко завершить доказательство. Имеем:

$$f = hvf + kuf = \delta(hvg) + kuf = \delta p + \delta(hvg - p) + kuf.$$

Так как $\overline{hvg - p} = 0$, то $hvg - p \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ и $\delta(hvg - p) \in B^{n}(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$; kuf также принадлежит $B^{n}(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, δp, как граница b-цепи, есть b-цепь, и значения δp принадлежат $\mathfrak{a}$. Следовательно, $\delta p \in Z_b^{n}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.

Итак, цикл f гомологичен b-циклу δp.

5°. Остается доказать, что λ дает изоморфное отображение $H_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ на $H_e^n(\mathfrak{G}, a)$. Для этого достаточно доказать, что если b-цикл есть граница цепи из $C^n(\mathfrak{G}, a)$, то он является границей b-цепи.

Для доказательства введем оператор s в группе цепей $C^n(\mathfrak{G}, a)$ по формуле:

$$(sf)_{x_1, \ldots, x_n} = \sum_{y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathfrak{H}} f^{y_{n+1}}_{y_1 x_1 y_2^{-1},\ y_2 x_2 y_3^{-1}, \ldots,\ y_n x_n y_{n+1}^{-1}}.$$

Очевидно, что $sf \in C_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ и s есть гомоморфное отображение. Легко видеть, что $s\delta = h\delta s$. Действительно,

$$(s\delta f)_{x_1, \ldots, x_{n+1}} = \sum_{y_1, \ldots, y_{n+2}} [f^{y_{n+2}}_{y_2 x_2 y_3^{-1}, \ldots, y_{n+1} x_{n+1} y_{n+2}^{-1}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f^{y_{n+2}}_{y_1 x_1 y_2^{-1}, \ldots, y_i x_i x_{i+1} y_{i+2}^{-1}, \ldots, y_{n+1} x_{n+1} y_{n+2}^{-1}} +$$
$$+ (-1)^{n+1} f^{y_{n+1} x_{n+1}}_{y_1 x_1 y_2^{-1}, \ldots, y_n x_n y_{n+1}^{-1}}] =$$
$$= h \sum_{y_1, \ldots, y_{n+1}} [f^{y_{n+1}}_{y_1 x_2 y_2^{-1}, \ldots, y_n x_{n+1} y_{n+1}^{-1}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f^{y_{n+1}}_{y_1 x_1 y_2^{-1}, \ldots, y_i x_i x_{i+1} y_{i+1}^{-1}, \ldots, y_n x_{n+1} y_{n+1}^{-1}} +$$
$$+ (-1)^{n+1} f^{y_{n+1} x_{n+1}}_{y_1 x_1 y_2^{-1}, \ldots, y_n x_n y_{n+1}^{-1}}] = h(\delta s f)_{x_1, \ldots, x_{n+1}}.$$

Пусть $f \in Z_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ и $f = \delta g$, $g \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, a)$. Тогда $sf = h^{n+1} f$. Найдем целые числа u_1 и v_1 такие, что $h^{n+1} u_1 + k v_1 = 1$. Тогда

$$f = v_1 k f + u_1 h^{n+1} f = v_1 k f + u_1 s f = v_1 k f + u_1 s \delta g = v_1 k f + u_1 h \delta s g.$$

Но $v_1 k f \in B_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$ и $sg \in C_b^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$. Следовательно, $f \in B_b^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, a)$, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана полностью.

Поступило
18. II. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Eilenberg S., Mac Lane S., Cohomology theory in abstract groups, I, Ann. of Math., 48 (1947), 51—78.

[2] Ван дер Варден, Современная алгебра, II, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

[3] Hochschild G., Serre P., Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc., 74, N 1 (1953), 110—133.

[4] Фаддеев Д. К., Об одной теореме теории гомологий в группах, Доклады Ак. наук СССР, 92 (1953), 703—706.

[5] Фаддеев Д. К., К теории гомологий в группах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 17—22.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 201—232

Н. П. СОКОЛОВ

О ПУЧКАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ ТРОЙНИЧНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа представляет собой распространение полученных автором ранее [см. (1)] результатов применения пространственных матриц к исследованию вещественных кубических тройничных форм на случай пар и связанных с ними пучков этих форм.

Введение

В разделе I обобщается известная теория элементарных делителей квадратных λ-матриц на полиномиальные кубические матрицы. Имея в виду применение этой теории к пучкам плоских линий третьего порядка, автор ограничился рассмотрением полиномиальной кубической матрицы n-го порядка и пучка кубических n-арных форм над полем вещественных чисел в случае, когда $n=3$. Однако многие из определений и теорем § 1,3 сохраняют силу и в общем случае. Далее, указывается ряд алгебраических и арифметических инвариантов пары и связанного с ней пучка вещественных кубических тройничных форм.

Как геометрическая интерпретация полученных результатов, в разделе II рассматриваются регулярные пучки вещественных плоских линий третьего порядка. Для пучков с наивысшей характеристикой соответствующих полиномиальных кубических матриц дается полная классификация и указываются канонические виды их уравнений. Метод, применяемый при исследовании этого наиболее интересного случая, очевидно, может быть распространен и на остальные случаи.

Терминология и обозначения, употребляемые в настоящей работе согласованы с предыдущей работой (1).

РАЗДЕЛ I

ИНВАРИАНТЫ ПАРЫ И СВЯЗАННОГО С НЕЮ ПУЧКА ВЕЩЕСТВЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ ТРОЙНИЧНЫХ ФОРМ

§ 1. Симметрическая полиномиальная кубическая матрица над полем вещественных чисел и ее элементарные делители

Возьмем пучок вещественных кубических тройничных форм

$$\mu f + \nu\varphi, \tag{1.1}$$

где μ, ν — переменные параметры, а формы

$$f = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} A_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma, \quad \varphi = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} B_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha x_\beta x_\gamma \tag{1.2}$$

с соответствующими симметрическими кубическими матрицами

$$A = \| A_{\alpha\beta\gamma} \|, \quad B = \| B_{\alpha\beta\gamma} \| \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

образуют базис пучка.

Соответствующая пучку (1.1) матрица

$$\mathfrak{U}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B \tag{1.3}$$

является частным случаем симметрической полиномиальной кубической матрицы

$$M(\mu, \nu) = \| M_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \nu) \| \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \tag{1.4}$$

элементы которой — двойничные формы одной и той же степени от μ, ν над полем вещественных чисел.

Определение 1.1. Будем называть симметрическими вещественными элементарными преобразованиями матрицы $M(\mu, \nu)$ следующие операции *:

(а) умножение j-го сечения каждой ориентации на одно и то же произвольное, отличное от нуля вещественное число t;

(б) прибавление к i-му сечению каждой ориентации j-го сечения соответствующей ориентации, умноженного на один и тот же произвольный полином $\psi(\mu, \nu)$ с вещественными коэффициентами (i, j — любые из значений 1, 2, 3).

Операцию (а) будем сокращенно обозначать символом

$$\boxed{j} \cdot t,$$

а операцию (б) — символом

$$\boxed{i} + \boxed{j} \cdot \psi(\mu, \nu).$$

Замечание 1.1. Элементарными преобразованиями типов (а) и (б) можно совершить операцию

(в) $\boxed{i - j}$,

заключающуюся в перестановке i-го и j-го сечений каждой ориентации.

Замечание 1.2. Симметрические вещественные элементарные преобразования матрицы $M(\mu, \nu)$ равносильны линейным преобразованиям

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{3} a_{\alpha i}(\mu, \nu) X_i \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

соответствующей кубической формы, причем коэффициенты $a_{\alpha i}(\mu, \nu)$ этих преобразований являются, вообще говоря, полиномами от μ, ν над полем вещественных чисел, а детерминанты преобразований не зависят от μ, ν и отличны от нуля.

Определение 1.2. Две симметрические полиномиальные кубические матрицы над полем вещественных чисел будем называть проективно эквивалентными в вещественной области, если они переводятся друг в друга цепочкой симметрических вещественных элементарных преобразований **.

* Ср. ([2]), стр. 151, 152.

** Ср. ([3]), стр. 177.

Определение 1.3. Двумерным рангом матрицы $M(\mu, \nu)$ будем называть ранг прямоугольной полиномиальной матрицы

$$\left\| \begin{matrix} M_{111}(\mu,\nu) & M_{112}(\mu,\nu) & M_{113}(\mu,\nu) & M_{122}(\mu,\nu) & M_{123}(\mu,\nu) & M_{133}(\mu,\nu) \\ M_{112}(\mu,\nu) & M_{122}(\mu,\nu) & M_{123}(\mu,\nu) & M_{22}(\mu,\nu) & M_{223}(\mu,\nu) & M_{233}(\mu,\nu) \\ M_{113}(\mu,\nu) & M_{123}(\mu,\nu) & M_{133}(\mu,\nu) & M_{223}(\mu,\nu) & M_{233}(\mu,\nu) & M_{333}(\mu,\nu) \end{matrix} \right\|.$$

Трехмерным рангом матрицы $M(\mu, \nu)$ будем называть наивысший порядок не равных тождественно нулю кубических детерминантов, порождаемых этой матрицей.

Определение 1.4. Матрицу $M(\mu, \nu)$ будем называть регулярной, если ее ранг (двумерный или трехмерный) равен ее порядку, и иррегулярной — в противном случае.

Так же, как и для матрицы с постоянными элементами, имеет место

ТЕОРЕМА 1.1. *Ранг (двумерный и трехмерный) матрицы* $M(\mu, \nu)$ *является арифметическим инвариантом относительно симметрических вещественных элементарных преобразований этой матрицы.*

Кроме ранга существуют еще и другие величины, остающиеся неизменными при упомянутых выше преобразованиях матрицы $M(\mu, \nu)$. Чтобы показать это, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. *Наибольший общий делитель* $D_i(\mu, \nu)$ * *порождаемых матрицей* $M(\mu, \nu)$ *кубических детерминантов i-го порядка, где i не превышает трехмерного ранга r матрицы* $M(\mu, \nu)$, *остается неизменным при симметрических вещественных элементарных преобразованиях этой матрицы.*

Действительно, преобразование типа (а) матрицы $M(\mu, \nu)$, очевидно, не меняет полиномов $D_i(\mu, \nu)$. Преобразование же типа (б) приводит $M(\mu, \nu)$ к матрице

$$M'(\mu, \nu) = \| M'_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \nu) \| \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3),$$

где

$$\left.\begin{aligned} M'_{iii}(\mu,\nu) &= M_{iii}(\mu,\nu) + 3M_{iij}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu) + 3M_{ijj}(\mu,\nu)\,\psi^2(\mu,\nu) + \\ &\qquad + M_{jjj}(\mu,\nu)\,\psi^3(\mu,\nu), \\ M'_{iij}(\mu,\nu) &= M_{iij}(\mu,\nu) + 2M_{ijj}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu) + M_{jjj}(\mu,\nu)\,\psi^2(\mu,\nu), \\ M'_{iik}(\mu,\nu) &= M_{iik}(\mu,\nu) + 2M_{ijk}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu) + M_{jjk}(\mu,\nu)\,\psi^2(\mu,\nu), \\ M'_{ijj}(\mu,\nu) &= M_{ijj}(\mu,\nu) + M_{jjj}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu), \\ M'_{ijk}(\mu,\nu) &= M_{ijk}(\mu,\nu) + M_{jjk}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu), \\ M'_{ikk}(\mu,\nu) &= M_{ikk}(\mu,\nu) + M_{jkk}(\mu,\nu)\,\psi(\mu,\nu), \\ M'_{jjj}(\mu,\nu) &= M_{jjj}(\mu,\nu), \qquad M'_{jjk}(\mu,\nu) = M_{jjk}(\mu,\nu), \\ M'_{jkk}(\mu,\nu) &= M_{jkk}(\mu,\nu), \qquad M'_{kkk}(\mu,\nu) = M_{kkk}(\mu,\nu) \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

---

* Так как $D_i(\mu, \nu)$ является двойничной формой от μ и ν, определенной с точностью до постоянного множителя, то старший коэффициент у $D_i(\mu, \nu)$ берем равным единице.

(i, j, k — последовательность в некотором порядке цифр 1, 2, 3). Отсюда следует, что элементы матриц $M(\mu, \nu)$ и $M'(\mu, \nu)$ имеют один и тот же наибольший общий делитель $D_1(\mu, \nu)$, если $r > 0$.

Заметим, что преобразование типа (б) матрицы $M(\mu, \nu)$ вызывает симметрические вещественные элементарные преобразования симметрической полиномиальной квадратной матрицы 9-го порядка, составленной из всех кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых матрицею $M(\mu, \nu)$ [см. ([1])].

Следовательно, если $r > 1$, то наибольший общий делитель $D_2(\mu, \nu)$ этих детерминантов не меняется при упомянутом выше преобразовании матрицы $M(\mu, \nu)$. Нетрудно убедиться, наконец, в том, что преобразование типа (б) матрицы $M(\mu, \nu)$ сопровождается такого же рода преобразованием симметрической полиномиальной кубической матрицы 3-го порядка, составленной из всех кубических детерминантов 3-го порядка, порождаемых матрицею $M(\mu, \nu)$. Поэтому, если $r > 2$, то наибольший общий делитель $D_3(\mu, \nu)$ этих детерминантов также остается неизменным, когда $M(\mu, \nu)$ подвергается преобразованию типа (б).

Наибольшие общие делители $D_1(\mu, \nu), \ldots, D_r(\mu, \nu)$ являются рациональными инвариантами матрицы $M(\mu, \nu)$. Вместо них введем другие инварианты, вообще говоря, иррациональные, которые назовем элементарными делителями матрицы $M(\mu, \nu)$. Для их определения воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.3. *Наибольший общий делитель порождаемых матрицей $M(\mu, \nu)$ кубических детерминантов i-го порядка, где i не меньше двумерного и не больше трехмерного ранга r матрицы $M(\mu, \nu)$, делится на наибольший общий делитель кубических детерминантов $(i-1)$-го порядка, порождаемых той же матрицей.*

Теорема очевидна, так как для матрицы $M(\mu, \nu)$ всякий кубический детерминант i-го порядка, где $2 \leqslant i \leqslant r$, является линейным однородным выражением от кубических детерминантов $(i-1)$-го порядка.

Определение 1.4. Назовем линейным множителем матрицы $M(\mu, \nu)$, трехмерный ранг которой равен r, всякий линейный множитель $a\mu + b\nu$ наибольшего общего делителя $D_r(\mu, \nu)$ кубических детерминантов r-го порядка, порождаемых этой матрицей. Пусть l_i — показатель наивысшей степени этого множителя, входящей в разложение $D_i(\mu, \nu)$, причем $l_0 = 0$. Введем в рассмотрение целые неотрицательные числа e_i, определяемые равенствами

$$e_i = l_i - l_{i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Тогда те из выражений $(a\mu + b\nu)^{e_i}$, в которых показатели e_i отличны от нуля, будем называть элементарными делителями матрицы $M(\mu, \nu)$, соответствующими ее линейному множителю $a\mu + b\nu\mu$ [ср. ([4]), стр. 321].

Элементарные делители матрицы $M(\mu, \nu)$ могут быть как вещественными, так и мнимыми; в последнем случае их можно сгруппировать в комплексные пары.

Пусть

$$(a_1\mu + b_1\nu)^{e_1}, (a_2\mu + b_2\nu)^{e_2}, \ldots, (a_k\mu + b_k\nu)^{e_k}$$

— все элементарные делители матрицы $M(\mu, \nu)$, причем среди линейных множителей $a_j\mu + b_j\nu$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ могут быть и пропорциональные друг другу. В дальнейшем особенно важным является вопрос о показателях $e_1, e_2, \ldots, e_k$ степеней линейных множителей. Для обозначения этих показателей, не пользуясь явной формой элементарных делителей, введем символ $[e_1 e_2 \ldots e_k]$, который будем называть характеристикой матрицы $M(\mu, \nu)$ *. При этом в характеристике будем заключать в круглые скобки те из чисел $e_1, e_2, \ldots, e_k$, которые являются показателями степеней пропорциональных линейных множителей, и будем ставить черточку над каждым e_j, являющимся показателем степени мнимого линейного множителя. Если матрица $M(\mu, \nu)$ не имеет элементарных делителей, то будем говорить, что ее характеристика [0].

Из теорем 1.2 и 1.3 вытекает

ТЕОРЕМА 1.4. *Элементарные делители и характеристика матрицы* $M(\mu, \nu)$ *остаются неизменными* ** *при симметрических вещественных элементарных преобразованиях этой матрицы.*

§ 2. Присоединенная, смешанно-присоединенная и составная матрицы для симметрической полиномиальной кубической матрицы над полем вещественных чисел

Составим для матрицы (1.4) по известным правилам присоединенную матрицу $C(\mu, \nu)$ [см. ([1])]. Далее, из кубических детерминантов 3-го порядка порождаемых матрицей (1.4), образуем симметрическую полиномиальную кубическую матрицу 3-го порядка

$$\boldsymbol{M}(\mu, \nu) = \| \boldsymbol{M}_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \nu) \| \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

а из элементов матриц (1.4), (2.1) образуем для матрицы (1.4) смешанно-присоединенную матрицу $K(\mu, \nu)$ [см. ([1])].

Теперь из элементов матриц $C(\mu, \nu)$ и $K(\mu, \nu)$ можно составить относительные инварианты Аронгольда $S(\mu, \nu)$ веса 4 и $T(\mu, \nu)$ веса 6, затем относительный инвариант

$$R(\mu, \nu) = S^3(\mu, \nu) - T^2(\mu, \nu)$$

веса 12 и абсолютный инвариант

$$\boldsymbol{I}(\mu, \nu) = \frac{R(\mu, \nu)}{T^2(\mu, \nu)}$$

формы, соответствующей матрице (1.4).

При симметрических вещественных элементарных преобразованиях матрицы $M(\mu, \nu)$ относительные инварианты воспроизводятся, как в этом легко убедиться, с точностью до некоторых постоянных отличных от нуля вещественных множителей. Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 2.1. *Значения отношения* $\frac{\mu}{\nu}$, *при которых относительные инварианты* $S(\mu, \nu)$, $T(\mu, \nu)$, $R(\mu, \nu)$ *обращаются в нуль, яв-*

* Ср. ([5]), стр. 88, а также ([6]), стр. 336.

** Пропорциональные элементарные делители считаем одинаковыми.

ляются абсолютными, вообще говоря, иррациональными инвариантами, а кратности их — арифметическими инвариантами относительно симметрических вещественных элементарных преобразований матрицы $M(\mu, \nu)$.

При помощи инвариантов $S(\mu, \nu)$ и $T(\mu, \nu)$ образуем для матрицы (1.4) из матриц $C(\mu, \nu)$ и $K(\mu, \nu)$ составную матрицу

$$\mathfrak{C}(\mu, \nu) = T(\mu, \nu)\, C(\mu, \nu) - S(\mu, \nu)\, K(\mu, \nu).$$

Как и при рассмотрении вещественных кубических матриц с постоянными элементами [см. ([1])], нетрудно убедиться, что симметрические вещественные элементарные преобразования матрицы (1.4) вызывают такого же рода преобразования симметрических полиномиальных квадратных матриц 9-го порядка $C(\mu, \nu)$, $K(\mu, \nu)$, $\mathfrak{C}(\mu, \nu)$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. *Проективная эквивалентность в вещественной области двух симметрических полиномиальных кубических матриц 3-го порядка над полем вещественных чисел влечет за собой такого же рода эквивалентность соответствующих присоединенных, смешанно-присоединенных и составных матриц, являющихся симметрическими полиномиальными квадратными матрицами 9-го порядка.*

§ 3. Пары и связанные с ними пучки вещественных кубических тройничных форм

Возвратимся к пучку (1.1) вещественных кубических тройничных форм, построенному на базисе (1.2), с соответствующей полиномиальной матрицей (1.3).

Будем называть пучок (1.1) и пару форм (1.2) регулярными или иррегулярными, смотря по тому, будет ли соответствующая полиномиальная матрица (1.3) регулярной или иррегулярной.

Подвергая пару форм (1.2) вещественному невырожденному линейному преобразованию с постоянными, т. е. не зависящими от μ, ν коэффициентами, мы тем самым подвергаем матрицу (1.3) соответствующему ряду постоянных симметрических вещественных элементарных преобразований (т. е. преобразований, где в операциях типа (б) множитель $\psi(\mu, \nu) = \text{const}$). Тогда, согласно определению 1.2, полиномиальная матрица первой степени (1.3) переходит в проективно эквивалентную ей в вещественной области полиномиальную матрицу, которая будет, очевидно, также первой степени. Однако, ввиду ограничивающего общность операций типа (б) предположения, что множитель $\psi(\mu, \nu) = \text{const}$, возникает вопрос, могут ли быть получены при помощи рассматриваемых частных преобразований все полиномиальные матрицы первой степени, проективно эквивалентные в вещественной области данной матрице? Для частного случая регулярных симметрических полиномиальных матриц имеет место

ТЕОРЕМА 3.1 *. *Если две регулярные симметрические полиномиальные кубические матрицы первой степени над полем вещественных чисел*

* Ср. ([7]), стр. 123.

проективно эквивалентны в вещественной области, то они переводятся друг в друга цепочкой постоянных симметрических вещественных элементарных преобразований.

Действительно, если операция типа (б) приводит регулярную симметрическую полиномиальную матрицу

$$\mathfrak{U}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B$$

к полиномиальной кубической матрице первой степени

$$\mathfrak{U}'(\mu, \nu) = \| \mathfrak{U}'_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \nu) \| \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3),$$

то элементы последней выражаются через элементы матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ формулами, аналогичными формулам (1.5). Из этих формул следует, что множитель $\psi(\mu, \nu)$ может не быть постоянным тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{U}_{jjj}(\mu, \nu) \equiv 0, \quad \mathfrak{U}_{ijj}(\mu, \nu) \equiv 0, \quad \mathfrak{U}_{jjk}(\mu, \nu) \equiv 0,$$

$$\mathfrak{U}_{iij}(\mu, \nu) \equiv 0, \quad \mathfrak{U}_{ijk}(\mu, \nu) \equiv 0, \quad \mathfrak{U}_{jkk}(\mu, \nu) \equiv 0.$$

Но тогда ранг (двумерный или трехмерный) матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ будет меньше трех, и $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ будет иррегулярной матрицей, что противоречит предположению.

Определение 3.1. Две пары (или два пучка) вещественных кубических форм будем называть проективно эквивалентными в вещественной области, если от одной пары (или от одного пучка) можно перейти к другой паре (или к другому пучку) при помощи вещественного невырожденного линейного преобразования с постоянными коэффициентами.

Проективная эквивалентность в вещественной области любых двух пар (или пучков) вещественных кубических форм сопровождается такого же рода эквивалентностью соответствующих полиномиальных кубических матриц *.

Принимая во внимание теоремы 1.1, 1.4, 2.1, 2.2, заключаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. *Если две пары вещественных кубических тройничных форм f, φ и f_1, φ_1 проективно эквивалентны в вещественной области, то ранги (двумерные и трехмерные) соответствующих полиномиальных матриц $\mu A + \nu B$ и $\mu A_1 + \nu B_1$, их элементарные делители и характеристики ** — одни и те же, так же как одни и те же — значения отношения $\frac{\mu}{\nu}$, при которых соответствующие относительные инварианты $S(\mu, \nu)$, $T(\mu, \nu)$, $R(\mu, \nu)$ обращаются в нуль. При этом соответствующие абсолютные инварианты $I(\mu, \nu)$ тождественно равны и составленные для матриц $\mu A + \nu B$ и $\mu A_1 + \nu B_1$ присоединенные, смешанно-присо-*

---

* Эта эквивалентность — строгая, т. е. полиномиальные матрицы переводятся друг в друга цепочкой симметрических вещественных элементарных преобразований, не зависящих от параметров [ср. ([7]), стр. 300].

** Для краткости будем в дальнейшем обозначать элементарные делители и характеристики полиномиальных матриц $\mu A + \nu B$ и $\mu A_1 + \nu B_1$ просто как элементарные делители и характеристики пар форм f, φ и f_1, φ_1.

единенные и составные матрицы соответственно строго эквивалентны в вещественной области.

Рассматривая пучок форм (1.1), мы можем любые две формы

$$\left.\begin{aligned} f' &= \mu_1 f + \nu_1\varphi, \\ \varphi' &= \mu_2 f + \nu_2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

этого пучка принять за его базис, если только

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

Между элементарными делителями двух регулярных пар форм, принадлежащих пучку (1.1), существует простое соотношение, выражаемое следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если регулярная пара вещественных кубических тройничных форм* (1.2) *имеет элементарные делители*

$$(a_j\mu + b_j\nu)^{e_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{3.3}$$

то пара форм (3.1), *также регулярная при условии* (3.2), *имеет элементарные делители*

$$(a_j'\mu + b_j'\nu)^{e_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{3.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_j' &= a_j\mu_1 + b_j\nu_1, \\ b_j' &= a_j\mu_2 + b_j\nu_2. \end{aligned} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)\right\} \tag{3.5}$$

Действительно, образуем пучок форм $\mu f' + \nu\varphi'$ и, пользуясь выражением (3.1), представим его в виде

$$\mu f' + \nu\varphi' = (\mu_1\mu + \mu_2\nu) f + (\nu_1\mu + \nu_2\nu)\varphi. \tag{3.6}$$

Так как μ и ν не предполагаются одновременно равными нулю, то $\mu_1\mu + \mu_2\nu$ и $\nu_1\mu + \nu_2\nu$ при условии (3.2) также не равны одновременно нулю. Не нарушая общности, можно считать $\mu \neq 0$ и $\mu_1\mu + \mu_2\nu \neq 0$. Тогда пучок (3.6) переписывается в виде:

$$\mu f' + \nu\varphi' = \frac{\mu_1\mu + \mu_2\nu}{\mu}(\mu f + \nu'\varphi), \tag{3.7}$$

где

$$\nu' = \frac{\mu(\nu_1\mu + \nu_2\nu)}{\mu_1\mu + \mu_2\nu}. \tag{3.8}$$

Возьмем один из линейных множителей, входящих в состав элементарных делителей (3.3) пары форм (1.2), и обозначим его через $a\mu + b\nu$. Пусть l_i — показатель наивысшей степени этого множителя, входящей в разложение наибольшего общего делителя $D_i(\mu,\ \nu)$ кубических детерминантов i-го порядка ($1 \leqslant i \leqslant 3$), порождаемых полиномиальной матрицей (1.3), причем, очевидно, $l_i \leqslant i$. Тогда каждый кубический детерминант i-го порядка, порождаемый матрицей формы $\mu f + \nu'\varphi$, входящей в выражение (3.7), можно представить в виде

$$(a\mu + b\nu')^{l_i} F(\mu,\ \nu'),$$

где $F(\mu,\ \nu')$ — двойничная форма от $\mu;\ \nu'$ степени $i - l_i$. Поэтому, на

основании равенства (3.7), соответствующий кубический детерминант i-го порядка, порождаемый матрицей формы $\mu f' + \nu\varphi'$, имеет вид

$$[(a\mu_1 + b\nu_1)\mu + (a\mu_2 + b\nu_2)\nu]^{l_i} F_1(\mu, \nu),$$

где $F_1(\mu, \nu)$ — двойничная форма от μ, ν степени $i - l_i$.

Следовательно, выражение

$$(a'\mu + b'\nu)^{l_i}, \tag{3.9}$$

где

$$a' = a\mu_1 + b\nu_1, \quad b' = a\mu_2 + b\nu_2, \tag{3.10}$$

входит в разложение наибольшего общего делителя $D_i'(\mu, \nu)$ кубических детерминантов i-го порядка, порождаемых упомянутой выше матрицей.

Проводя эти рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что выражение (3.9) является наивысшей степенью линейного множителя $a'\mu + b'\nu$, входящей в разложение $D_i'(\mu, \nu)$. Таким образом, согласно определению 1.4, элементарные делители пары форм (3.1) отличаются от элементарных делителей пары форм (1.2) только тем, что линейные множители $a\mu + b\nu$ заменены линейными множителями $a'\mu + b'\nu$, причем имеют место соотношения (3.10). Следовательно, выражения (3.4) при условиях (3.5) действительно являются элементарными делителями пары форм (3.1).

Из доказанной теоремы, в предположении, что

$$\mu_1 = p \neq 0, \quad \nu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = 0, \quad \nu_2 = q \neq 0,$$

вытекает

Следствие 3.1. *Если регулярная пара вещественных кубических тройничных форм f, φ имеет элементарные делители*

$$(a_j\mu + b_j\nu)^{e_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

то регулярная пара форм $f' = pf$, $\varphi' = q\varphi$, где p, q — отличные от нуля вещественные постоянные, имеет элементарные делители

$$(pa_j\mu + qb_j\nu)^{e_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Следствие 3.2. *Пары форм f, φ и f', φ', упоминаемые в теореме 3.3 и следствии 3.1, обладают одной и той же характеристикой, притом также и тогда, когда в нее введены круглые скобки и черточки.*

Замечание 3.1. Если пучок форм (1.1) — регулярный, то, на основании следствия (3.2), для каждой пары форм (3.1) этого пучка, удовлетворяющей условию (3.2), существует одна и та же характеристика (даже в том случае, когда в нее введены круглые скобки или черточки). Поэтому об этой характеристике будем говорить как о характеристике регулярного пучка форм (1.1).

Очевидна следующая

ТЕОРЕМА 3.4. *Характеристика регулярного пучка вещественных кубических тройничных форм является арифметическим инвариантом относительно вещественных невырожденных линейных преобразований с постоянными коэффициентами.*

Замечание 3.2. Относительные инварианты $S(\mu, \nu)$, $T(\mu, \nu)$, $R(\mu, \nu)$ пучка форм (1.1) являются, вообще говоря, формами от μ, ν соответственно 4-й, 6-й, 12-й степени.

Числа вещественных и мнимых значений отношения $\frac{\mu}{\nu}$, при которых эти инварианты обращаются в нуль, а также их кратности, очевидно, не меняются при замене базиса (1.2) пучка форм (1.1) каким-либо другим базисом (3.1) при условии (3.2).

Замечание 3.3. Так как замена базиса (1.2) пучка форм (1.1) каким-либо другим базисом (3.1) при условии (3.2) не меняет состава пучка, то при такой замене остается неизменной и совокупность составляющих полную систему инвариантов

$$I(\mu, \mu), \quad \omega(T(\mu, \nu)), \quad r(\mu, \nu), \quad \rho_{C(\mu,\nu)}, \quad \sigma_{C(\mu,\nu)}, \quad \rho_{\mathfrak{C}(\mu,\nu)}, \quad \sigma_{\mathfrak{C}(\mu,\nu)}$$

для всех значений параметров μ, ν [см. ([1])].

Это замечание относительно последней совокупности сохраняет силу также для пучков, проективно эквивалентных в вещественной области.

РАЗДЕЛ II

КЛАССИФИКАЦИЯ ПУЧКОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЛОСКИХ ЛИНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

§ 1. Типы пучков с наивысшей характеристикой

Пусть дан вещественный пучок плоских линий третьего порядка

$$\mu f + \nu\varphi = 0, \tag{1.1}$$

базисом которого являются линии $f = 0$ и $\varphi = 0$.

Исследование этого пучка ограничим случаем, когда характеристика $[e_1 \ldots e_k]$ соответствующей полиномиальной кубической матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ — наивысшая, т. е. $e_1 + \cdots + e_k = 3$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель $D_3(\mu, \nu)$ кубических детерминантов 3-го порядка, порождаемых матрицей $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$, был кубической двоичной формой от μ, ν, что возможно только тогда, когда ранг (двумерный или трехмерный) этой матрицы равен 3, т. е. когда пучок (1.1) — регулярный.

Если относительный инвариант $S(\mu, \nu)$ пучка (1.1) при любых вещественых значениях параметров μ, ν отличен от нуля, то, как нетрудно убедиться, наивысшая характеристика пучка будет [(111)] и все линии его совпадают.

Если же существуют вещественные значения μ_1, ν_1 параметров, удовлетворяющие условию

$$S(\mu_1, \nu_1) = 0,$$

то, принимая за базис пучка (1.1) его линии

$$f_1 \equiv \mu_1 f + \nu_1\varphi = 0,$$

$$\varphi_1 \equiv \mu_2 f + \nu_2\varphi = 0,$$

где

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

можно представить этот пучок в виде

$$\mu f_1 + \nu \varphi_1 = 0. \tag{1.2}$$

Подвергая полиномиальную кубическую матрицу, соответствующую пучку (1.2), постоянным симметрическим вещественным элементарным преобразованиям, приводящим матрицу формы f_1 к виду, соответствующему каноническому виду F формы f_1, получим регулярный пучок вида

$$\mu F + \nu \Phi = 0,$$

проективно эквивалентный пучку (1.2).

Линия $F = 0$ будет тогда одной из следующих четырех линий [см. (¹), таблицы 1—3]:

$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$ (эквиангармоническая линия 1-го типа),

$3X_1^2X_2 - X_2^3 + X_3^3 = 0$ * (эквиангармоническая линия 2-го типа),

$X_1^3 + 3X_2^2X_3 = 0$ (линия с точкой возврата),

$X_1^2X_2 + X_2^2X_3 = 0$ (совокупность конического сечения и касательной к нему прямой).

В соответствии с этим различаем четыре типа пучков с наивысшей характеристикой, рассмотрению которых посвящены следующие параграфы.

§ 2. Пучки эквиангармонических линий 1-го типа

Пусть

$$F \equiv X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0. \tag{2.1}$$

Соответствующая пучку (1.3) матрица

$$\mathfrak{U}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B,$$

где A — матрица формы F, а B — матрица формы Φ, порождает кубические детерминанты 3-го порядка, представляемые следующими выражениями:

$$\mathfrak{U}_{123}(\mu, \nu) = \mu^3 + P_{123}^{(3)}(\mu, \nu), \quad \mathfrak{U}_{112}(\mu, \nu) = 2\nu [B_{133}\mu^2 + P_{112}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{113}(\mu, \nu) = 2\nu [B_{112}\mu^2 + P_{113}^{(2)}(\mu, \nu)],$$

---

* Это уравнение можно получить из уравнения $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6X_1X_2X_3 = 0$, подвергая соответствующую матрицу операциям:

$$\boxed{\mathrm{I}} + \boxed{\mathrm{II}} \cdot (-1), \ \boxed{\mathrm{II}} + \boxed{\mathrm{I}} \cdot \frac{1}{2}, \ \boxed{\mathrm{III}} + \boxed{\mathrm{II}} \cdot 2, \ \boxed{\mathrm{II}} + \boxed{\mathrm{III}} \left(-\frac{1}{3}\right), \ \boxed{\mathrm{III}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9}},$$
$$\boxed{\mathrm{II}} \cdot \sqrt[3]{12}, \ \boxed{\mathrm{I}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{12}}.$$

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu,\ \nu)=2\nu\,[B_{233}\mu^2+P_{122}^{(2)}(\mu,\ \nu)],\quad \mathfrak{U}_{133}(\mu,\ \nu)=2\nu\,[B_{223}\mu^2+P_{133}^{(2)}(\mu,\ \nu)],$$

$$\mathfrak{U}_{223}(\mu,\ \nu)=2\nu\,[B_{112}\mu^2+P_{223}^{(2)}(\mu,\ \nu)],\quad \mathfrak{U}_{233}(\mu,\ \nu)=2\nu\,[B_{113}\mu^2+P_{233}^{(2)}(\mu,\ \nu)],$$

$$\mathfrak{U}_{111}(\mu,\ \nu)=6\nu^2\,[(B_{122}B_{133}-B_{123}^2)\,\mu+P_{111}^{(1)}(\mu,\ \nu)],$$

$$\mathfrak{U}_{222}(\mu,\ \nu)=6\nu^2\,[(B_{112}B_{233}-B_{123}^2)\,\mu+P_{222}^{(1)}(\mu,\ \nu)],$$

$$\mathfrak{U}_{333}(\mu,\ \nu)=6\nu^2\,[(B_{113}B_{223}-B_{123}^2)\,\mu+P_{333}^{(1)}(\mu,\ \nu)],$$

где через $P_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}(\mu,\ \nu)$ обозначены двойничные формы i-й степени от μ, ν, не делящиеся на μ^i.

Так как все эти детерминанты, кроме $\mathfrak{U}_{123}(\mu,\ \nu)$, делятся на ν, то для того чтобы их наибольший общий делитель $D_3(\mu,\ \nu)$ был кубической двойничной формой от μ, ν, а следовательно, пучок (1.3) имел наивысшую характеристику, необходимо, чтобы все они, кроме $\mathfrak{U}_{123}(\mu,\ \nu)$, тождественно равнялись нулю. Поэтому

$B_{133}=0,\quad B_{122}=0,\quad B_{233}=0,\quad B_{223}=0,\quad B_{112}=0,\quad B_{113}=0,\quad B_{123}=0,$

и пучок (1.3) имеет вид:

$$(\mu+\nu B_{111})\,X_1^3+(\mu+\nu B_{222})\,X_2^3+(\mu+\nu B_{333})\,X_3^3=0. \qquad (2.2)$$

Здесь возможны следующие три случая:

Случай I. Среди B_{111}, B_{222}, B_{333} нет равных. Тогда, полагая в пучке (2.2) $\mu=-\nu B_{333}$, получим при $\nu\neq 0$ линию

$$nX_1^3+X_2^3=0, \qquad (2.3)$$

где

$$n=\frac{B_{111}-B_{333}}{B_{222}-B_{333}}$$

есть конечное число, отличное от 0 и 1.

Линии (2.1) и (2.3), принадлежащие пучку (2.2), пересекаются в девяти точках, из которых одна — вещественная, а восемь — мнимые, попарно сопряженные. Принимая эти линии за базис, получаем канонический пучок

$$(\mu+n\nu)\,X_1^3+(\mu+\nu)\,X_2^3+\mu X_3^3=0. \qquad (2.4)$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей пучка (2.4), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{123}(\mu,\ \nu)=(\mu+n\nu)\,(\mu+\nu)\,\mu,$$

следовательно, их наибольший общий делитель

$$D_3(\mu,\ \nu)=(\mu+n\nu)\,(\mu+\nu)\,\mu.$$

Кубические детерминанты 2-го порядка, порождаемые той же матрицей, имеют, кроме значений, тождественно равных нулю, также значения, равные

$$(\mu+n\nu)\,(\mu+\nu),\qquad (\mu+n\nu)\,\mu,\qquad (\mu+\nu)\,\mu.$$

Поэтому их наибольший общий делитель

$$D_2(\mu,\ \nu)=1.$$

Таким образом матрица $\mathfrak{U}(\mu,\ \nu)$ имеет элементарные делители $\mu+n\nu$, $\mu+\nu$, μ, и характеристика пучка (2.4) будет [111].

Относительные инварианты имеют вид:

$$S(\mu,\ \nu)=0, \quad T(\mu,\ \nu)=-\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+n\nu)^2,$$

$$R(\mu,\ \nu)=-\mu^4(\mu+\nu)^4(\mu+n\nu)^4,$$

откуда заключаем, что $R(\mu,\ \nu)$ и $T(\mu,\ \nu)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, и это будет тогда и только тогда, когда μ принимает значения 0, $-\nu$, $-n\nu$, различные между собою. Из пучка (2.4) при этих значениях параметров находим:

$$nX_1^3+X_2^3=0,$$

$$(1-n)X_1^3+X_3^3=0,$$

$$(n-1)X_2^3+nX_3^3=0,$$

причем

$$\boldsymbol{I}(\mu,\ \nu)=\frac{0}{0}, \quad r(\mu,\ \nu)=2, \quad \rho_{C(\mu,\nu)}=2, \quad \sigma_{C(\mu,\nu)}=0.$$

При значениях μ, отличных от 0, $-\nu$, $-n\nu$, имеем:

$$\boldsymbol{I}(\mu,\ \nu)=-1, \quad \omega(T(\mu,\ \nu))=-1. \tag{2.5}$$

Таким образом в состав пучка (2.4) входят эквиангармонические линии 1-го типа и три тройки прямых [см. ([1]), таблицы 2 и 3]. В каждой тройке одна прямая — вещественная и две мнимые сопряженные; все они пересекаются в одной точке. Точки пересечения прямых в каждой тройке отличны одна от другой, а также и от точек, общих всем линиям пучка. Последних — девять; одна из них — вещественная, а восемь — мнимые, попарно сопряженные. Эти девять точек расположены на прямых каждой тройки так, что на вещественной прямой лежит вещественная точка (в ней пересекаются вещественные прямые троек) и пара мнимых сопряженных точек, а на мнимых прямых лежат сопряженные тройки остальных мнимых точек.

Случай II. Среди B_{111}, B_{222}, B_{333} имеется пара равных. Пусть, например, $B_{111}=B_{222}\neq B_{333}$. Полагая тогда в пучке (2.2) последовательно $\mu=-\nu B_{333}$ и $\mu=-\nu B_{222}$, получим при $\nu\neq 0$ две линии этого пучка:

$$X_1^3+X_2^3=0, \tag{2.6}$$

$$X_3^3=0. \tag{2.7}$$

Принимая их за базис, получаем канонический пучок

$$\mu(X_1^3+X_2^3)+\nu X_3^3=0. \tag{2.8}$$

Для соответствующей матрицы имеем:

$$D_3(\mu,\ \nu)=\mu^2\nu, \quad D_2(\mu,\ \nu)=\mu, \quad D_1(\mu,\ \nu)=1,$$

а потому элементарные делители ее равны μ, μ, ν, и характеристика пучка (2.8) будет [(11)1].

Вместе с тем находим:

$$S(\mu,\ \nu)=0, \quad T(\mu,\ \nu)=-\mu^4\nu^2, \quad R(\mu,\ \nu)=-\mu^8\nu^4,$$

откуда следует, что $T(\mu,\ \nu)$ и $R(\mu,\ \nu)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, именно тогда и только тогда, когда $\nu=0$ или $\mu=0$. Из

пучка (2.8) при этих значениях параметров получаем линии (2.6) и (2.7), причем

$$I(\mu, \nu) = \frac{0}{0} \quad \left(r(\mu, \nu) = 2, \quad \rho_{C(\mu,\nu)} = 2, \quad \sigma_{C(\mu,\nu)} = 0, \ r(\mu, \nu) = 1\right).$$

При значениях μ, ν, отличных от нуля, выполняются условия (2. 5). Следовательно, в состав пучка (2.8) входят эквиангармонические линии 1-го типа, тройка пересекающихся в одной точке прямых, из которых одна—вещественная, а две—мнимые сопряженные, и тройка совпадающих вещественных прямых. Все линии пучка имеют три общие точки, из которых одна — вещественная, а две — мнимые сопряженные; каждая из них есть точка соприкасания всех нераспадающихся линий пучка. Все три точки лежат на тройной прямой пучка; касательными в этих точках являются прямые первой тройки, точка пересечения которых отлична от точек, общих всем линиям пучка.

Случай III. $B_{111} = B_{222} = B_{333} \neq 0$. Тогда пучок (2.2) приводится к каноническому виду

$$(\mu + \nu)(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) = 0. \qquad (2.9)$$

Его характеристика будет [(111)], причем выполняются условия (2.5). Все линии пучка сливаются в одну эквиангармоническую линию 1-го типа.

§ 3. Пучки эквиангармонических линий 2-го типа

Пусть

$$F \equiv 3X_1^2 X_2 - X_2^3 + X_3^3 = 0. \qquad (3.1)$$

Соответствующая пучку (1.3) матрица $\mathfrak{A}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B$ порождает кубические детерминанты 3-го порядка, представляемые выражениями:

$$\mathfrak{A}_{113}(\mu,\nu) = 2[-\mu^3 + P_{113}^{(3)}(\mu, \nu)], \ \mathfrak{A}_{223}(\mu, \nu) = 2[-\mu^3 + P_{223}^{(3)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{A}_{111}(\mu,\nu) = 6\nu[-B_{133}\mu^2 + P_{111}^{(2)}(\mu,\nu)], \ \mathfrak{A}_{222}(\mu, \nu) = 6\nu[-B_{233}\mu^2 + P_{222}^{(2)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{A}_{133}(\mu,\nu) = 2\nu[-2B_{123}\mu^2 + P_{133}^{(2)}(\mu,\nu)], \ \mathfrak{A}_{112}(\mu,\nu) = 2\nu[-B_{233}\mu^2 + P_{112}^{(2)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{A}_{122}(\mu,\nu) = 2\nu[-B_{133}\mu^2 + P_{122}^{(2)}(\mu,\nu)], \ \mathfrak{A}_{233}(\mu, \nu) = 2\nu[(B_{223} - B_{113})\mu^2 + \\ + P_{233}^{(2)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{A}_{333}(\mu, \nu) = 6\nu^2[(B_{113}B_{223} - B_{123}^2)\mu + P_{333}^{(1)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{A}_{123}(\mu, \nu) = \nu\{-(B_{111} + B_{122})\mu^2 + [B_{111}B_{222} - B_{112}B_{122} - \\ -(B_{111} + B_{122})B_{333} + B_{133}(B_{113} + 3B_{223}) - 2B_{123}B_{233}]\mu\nu + \\ + [(B_{111}B_{222} - B_{112}B_{122})B_{333} + 2B_{123}^3 + B_{113}(3B_{122}B_{233} - B_{133}B_{222} - \\ -2B_{123}B_{223}) + B_{133}(3B_{112}B_{223} - 2B_{122}B_{123}) - B_{233}(B_{111}B_{223} + 2B_{112}B_{123})]\nu^2\}.$$

Так как все эти детерминанты, кроме $\mathfrak{A}_{113}(\mu, \nu)$ и $\mathfrak{A}_{223}(\mu, \nu)$, делятся на ν, то, для того чтобы их наибольший общий делитель $D_3(\mu, \nu)$ был кубической формой от μ, ν, необходимо, чтобы все они, кроме двух упомянутых выше, тождественно равнялись нулю. Поэтому

$$B_{133} = 0, \quad B_{233} = 0, \quad B_{123} = 0, \quad B_{113} = 0, \quad B_{223} = 0,$$
$$B_{111} + B_{122} = 0, \quad B_{111}(B_{112} + B_{222}) = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$B_{122} = -B_{111} = 0$$

или

$$B_{122} = -B_{111} \neq 0, \qquad B_{222} = -B_{112}.$$

Следовательно, пучок (1.3) имеет вид

$$3(\mu + \nu B_{112}) X_1^2 X_2 + (-\mu + \nu B_{222}) X_2^3 + (\mu + \nu B_{333}) X_3^3 = 0 \tag{3.2}$$

или

$$\nu B_{111} X_1^3 - 3\nu B_{111} X_1 X_2^2 + (\mu + \nu B_{112})(3X_1^2 X_2 - X_2^3) + (\mu + \nu B_{333}) X_3^3 = 0. \tag{3.3}$$

Рассмотрим сперва пучок (3.2). Полагая в нем последовательно $\mu = -\nu B_{333}$ и $\mu = \nu B_{222}$, получим при $\nu \neq 0$ две принадлежащие пучку линии:

$$3mX_1^2X_2 - pX_2^3 = 0 \text{ и } 3nX_1^2X_2 + pX_3^3 = 0, \tag{3.4}$$

где

$$m = B_{333} - B_{112}, \quad n = B_{112} + B_{222}, \quad p = B_{222} + B_{333}$$

и, следовательно,

$$m + n - p = 0, \tag{3.5}$$

причем предполагается, что m и p, так же как n и p, не равны одновременно нулю.

Принимая линии (3.4) за базис, представим пучок (3.2) в виде

$$3(m\mu + n\nu) X_1^2 X_2 + p(-\mu X_2^3 + \nu X_3^3) = 0. \tag{3.6}$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ этого пучка, тождественно равны нулю, кроме детерминантов

$$\mathfrak{U}_{113}(\mu, \nu) = -2p\nu(m\mu + n\nu)^2, \quad \mathfrak{U}_{223}(\mu, \nu) = -2p^2\mu\nu(m\mu + n\nu).$$

Отсюда заключаем, что $D_3(\mu, \nu)$ будет кубической формой от μ, ν тогда и только тогда, когда $n = 0$ при $m \neq 0$ и $p \neq 0$. Тогда, вследствие равенства (3.5), $m = p$, и пучок (3.6) примет канонический вид:

$$\mu(3X_1^2X_2 - X_2^3) + \nu X_3^3 = 0. \tag{3.7}$$

Для соответствующей матрицы имеем:

$$D_3(\mu, \nu) = \mu^2\nu, \quad D_2(\mu, \nu) = \mu, \quad D_1(\mu, \nu) = 1,$$

а потому элементарные делители ее равны μ, μ, ν, и характеристика пучка (3.7) будет [(11) 1].

Вместе с тем находим:

$$S(\mu, \nu) = 0, \quad T(\mu, \nu) = 4\mu^4\nu^2, \quad R(\mu, \nu) = -16\mu^8\nu^4,$$

откуда следует, что $T(\mu, \nu)$ и $R(\mu, \nu)$ могут обратиться в нуль лишь одновременно, именно тогда и только тогда, когда $\nu = 0$ или $\mu = 0$. Из пучка (3.7) при этих значениях параметров получаем:

$$3X_1^2X_2 - X_2^3 = 0, \tag{3.8}$$

$$X_3^3 = 0, \tag{3.9}$$

причем

$$I(\mu, \nu) = \frac{0}{0} \quad (r(\mu, \nu) = 2, \quad \rho_{C(\mu, \nu)} = 2, \quad \sigma_{C(\mu, \nu)} = -2, \quad r(\mu, \nu) = 1).$$

При значениях μ, ν, отличных от нуля, имеем:

$$I(\mu, \nu) = -1, \quad \omega(T(\mu, \nu)) = +1. \tag{3.10}$$

Следовательно, в состав пучка (3.7) входят эквиангармонические линии 2-го типа, тройка вещественных прямых, пересекающихся в одной точке, и тройка совпадающих вещественных прямых. Все линии пучка имеют три общие точки, все вещественные; каждая из них есть точка соприкасания всех нераспадающихся линий пучка. Все три точки лежат на тройной прямой пучка; касательными в этих точках являются прямые первой тройки, точка пересечения которых отлична от точек, общих всем линиям пучка.

В случае, если $m = p = 0$ или $n = p = 0$, очевидно, имеем:

$$B_{112} = B_{333} = -B_{222} \neq 0,$$

и пучок (3.2) приводится к каноническому виду

$$(\mu + \nu)(3X_1^2X_2 - X_2^3 + X_3^3) = 0. \tag{3.11}$$

Его характеристика будет [(111)], причем выполняются условия (3.10). Все линии пучка сливаются в одну эквиангармоническую линию 2-го типа.

Обратимся теперь к пучку (3.3). Полагая в нем $\nu = 0$, имеем при $\mu \neq 0$ линию (3.1). Полагая, далее, $\mu = -\nu B_{112}$, получаем при $\nu \neq 0$ линию

$$B_{111}X_1^3 - 3B_{111}X_1X_2^2 + (B_{333} - B_{112})X_3^3 = 0. \tag{3.12}$$

Здесь мы будем различать два варианта в зависимости от того, будет ли $B_{111} \neq 0$ или $B_{111} = 0$.

Вариант I. $B_{111} \neq 0$. Тогда перепишем уравнение (3.12) в виде

$$X_1^3 - 3X_1X_2^2 + nX_3^3 = 0, \tag{3.13}$$

где

$$n = \frac{B_{333} - B_{112}}{B_{111}}.$$

Принимая линии (3.1) и (3.13) за базис, получим канонический пучок

$$\mu(3X_1^2X_2 - X_2^3 + X_3^3) + \nu(X_1^3 - 3X_1X_2^2 + nX_3^3) = 0. \tag{3.14}$$

Соответствующая матрица $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ порождает кубические детерминанты 3-го порядка, тождественно равные нулю, за исключением детерминантов

$$\mathfrak{U}_{113}(\mu, \nu) = \mathfrak{U}_{223}(\mu, \nu) = -2(\mu^2 + \nu^2)(\mu + n\nu),$$

и кубические детерминанты 2-го порядка, которые, кроме значений, тождественно равных нулю, имеют также значения, равные

$$-2(\mu^2 + \nu^2), \ -\mu(\mu + n\nu), \ -\nu(\mu + n\nu).$$

Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = (\mu^2 + \nu^2)(\mu + \nu), \quad D_2(\mu, \nu) = 1.$$

Таким образом элементарные делители матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ равны

$$\mu + \nu i, \quad \mu - \nu i, \quad \mu + n\nu,$$

и характеристика пучка (3.14) будет $[\bar{1}\bar{1}1]$.

Вместе с тем имеем:

$$S(\mu, \nu) = 0, \quad T(\mu, \nu) = 4(\mu^2 + \nu^2)^2 (\mu + n\nu)^2,$$
$$R(\mu, \nu) = -16(\mu^2 + \nu^2)^4 (\mu + n\nu)^4,$$

откуда заключаем, что $T(\mu, \nu)$ и $R(\mu, \nu)$ могут обращаться в нуль лишь одновременно, и в вещественной области это будет тогда и только тогда, когда $\mu = -n\nu$. Из пучка (3.14) получаем тогда при $\nu \neq 0$ линию

$$X_1^3 - 3nX_1^2X_2 - 3X_1X_2^2 + nX_2^3 = 0,$$

причем

$$I(\mu, \nu) = \frac{0}{0} \left(r(\mu, \nu) = 2, \quad \rho_{C(\mu, \nu)} = 2, \quad \sigma_{C(\mu, \nu)} = -2\right).$$

При $\mu \neq -n\nu$ выполняются условия (3.10).

Таким образом в состав пучка (3.14) входят эквиангармонические линии 2-го типа и тройка вещественных прямых, пересекающихся в одной точке. Все линии пучка имеют девять общих точек, из которых три — вещественные, а шесть — мнимые, попарно сопряженные. Из этих девяти точек на каждой прямой пучка лежит по одной вещественной и по паре мнимых сопряженных точек, причем ни одна из них не совпадает с точкой пересечения прямых пучка.

Вариант II. $B_{111} = 0$. Если при этом $B_{112} \neq B_{333}$, то уравнение (3.12) имеет вид

$$X_3^3 = 0. \tag{3.15}$$

Принимая тогда линии (3.1) и (3.15) пучка (3.3) за базис, представим этот пучок в виде

$$\mu(3X_1^2X_2 - X_2^3) + (\mu + \nu) X_3^3 = 0.$$

Полагая последовательно $\mu = -\nu \neq 0$ и $\mu = 0$ при $\nu \neq 0$, будем иметь две линии (3.8) и (3.9) пучка. Взяв их за базис, придем к каноническому пучку (3.7).

Если же $B_{112} = B_{333}$, то пучок (3.3) имеет канонический вид (3.11). Каждый из этих канонических пучков был рассмотрен выше.

§ 4. Пучки линий с точкой возврата

Пусть

$$F \equiv X_1^3 + 3X_2^2X_3 = 0. \tag{4.1}$$

Соответствующая пучку (1.3) матрица $\mathfrak{U}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B$ порождает кубические детерминанты 3-го порядка, представляемые выражениями:

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu) = 2[-\mu^3 + P_{122}^{(3)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{222}(\mu, \nu) = 6\nu[-B_{112}\mu^2 + P_{222}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{123}(\mu, \nu) = \nu[-2B_{233}\mu^2 + P_{123}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{223}(\mu, \nu) = 2\nu[-B_{113}\mu^2 + P_{223}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{113}(\mu, \nu) = 2\nu[B_{133}\mu^2 + P_{113}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{133}(\mu, \nu) = 2\nu[B_{333}\mu^2 + P_{133}^{(2)}(\mu, \nu)],$$

$$\mathfrak{U}_{112}(\mu, \nu) = 2\nu[-2B_{123}\mu^2 + P_{112}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{111}(\mu, \nu) = 6\nu^2[(B_{122}B_{133} - B_{123}^2)\mu + P_{111}^{(1)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{333}(\mu, \nu) = 6\nu^2[(B_{113}B_{333} - B_{133}^2)\mu + P_{333}^{(1)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{233}(\mu, \nu) = 2\nu^2[(B_{112}B_{333} - B_{113}B_{233})\mu + P_{233}^{(1)}(\mu, \nu)].$$

Так как все эти детерминанты, кроме $\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu)$, делятся на ν, то их наибольший общий делитель $D_3(\mu, \nu)$ будет кубической формой от μ, ν только тогда, когда все они, за исключением $\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu)$, тождественно равны нулю. Поэтому

$$B_{112} = 0, \quad B_{233} = 0, \quad B_{113} = 0, \quad B_{133} = 0, \quad B_{333} = 0, \quad B_{123} = 0,$$

и пучок (1.3) будет иметь вид:

$$(\mu + \nu B_{111})X_1^3 + 3(\mu + \nu B_{223})X_2^2X_3 + 3\nu B_{122}X_1X_2^2 + \nu B_{222}X_2^3 = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим два случая, когда $B_{111} \neq B_{223}$ и когда $B_{111} = B_{223}$.

Случай I. $B_{111} \neq B_{223}$. Тогда, полагая в пучке (4.2) последовательно $\mu = -\nu B_{223}$ и $\mu = -\nu B_{111}$, получаем при $\nu \neq 0$ две линии этого пучка:

$$X_1^3 + mX_2^3 + 3nX_1X_2^2 = 0,$$
$$3X_2^2X_3 - mX_2^3 - 3nX_1X_2^2 = 0,$$

где

$$m = \frac{B_{222}}{B_{111} - B_{223}}, \quad n = \frac{B_{122}}{B_{111} - B_{223}}.$$

Приняв эти линии за базис, представим пучок в виде

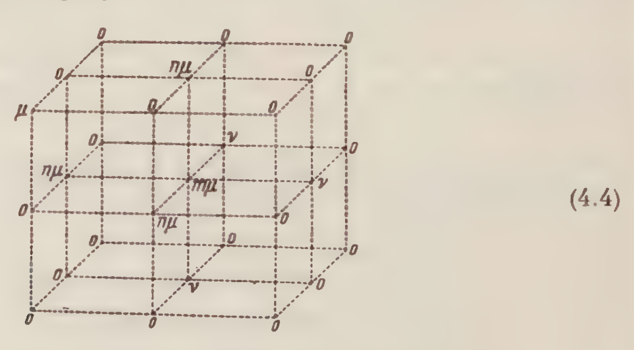
$$\mu X_1^3 + m(\mu - \nu)X_2^3 + 3n(\mu - \nu)X_1X_2^2 + 3\nu X_2^2X_3 = 0. \quad (4.3)$$

Рассмотрим два возможных варианта.

Вариант I. Пусть m и n не равны одновременно нулю. Тогда подвергнем матрицу пучка (4.3) операциям

$$\boxed{\text{I}} + \boxed{\text{III}}\cdot n, \quad \boxed{\text{II}} + \boxed{\text{III}}\cdot\frac{m}{3}.$$

В результате получим матрицу



(4.4)

которую можно считать канонической, если $m^2 + 4n^3 \neq 0$. В этом случае ей соответствует канонический пучок

$$\mu(X_1^3 + mX_2^3 + 3nX_1X_2^2) + 3\nu X_2^2X_3 = 0 \tag{4.5}$$

с базисом

$$X_1^3 + mX_2^3 + 3nX_1X_2^2 = 0, \tag{4.6}$$

$$X_2^2X_3 = 0. \tag{4.7}$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (4.4), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu) = -2\mu\nu^2.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = \mu\nu^2.$$

Далее,

$$D_2(\mu, \nu) = 1,$$

поскольку среди кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные $2n\mu^2$, $m\mu^2$, $-2\nu^2$.

Таким образом, элементарные делители матрицы (4.4) равны ν^2, μ, и характеристика пучка (4.5) будет [21]. Для матрицы (4.4) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0 \text{ или } \mu \neq 0,\ \nu = 0), \end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu \neq 0,\ \nu = 0), \end{cases} \qquad \sigma_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} -2 & (m^2 + 4n^3 < 0), \\ 0 & (m^2 + 4n^3 > 0). \end{cases}$$

При этом относительные инварианты $S(\mu, \nu)$, $T(\mu, \nu)$, $R(\mu, \nu)$ тождественно равны нулю, следовательно,

$$\omega(T(\mu, \nu)) = 0 \text{ и } \boldsymbol{I}(\mu, \nu) = \frac{0}{0}. \tag{4.8}$$

Таким образом в состав пучка (4.5) входят линии с точкой возврата, тройка вещественных прямых, из которых две совпадают, и тройка различных, пересекающихся в одной точке прямых, из которых:

а) все вещественны (если при $\rho_{C(\mu,\nu)} = 2$ будет $\sigma_{C(\mu,\nu)} = -2$);

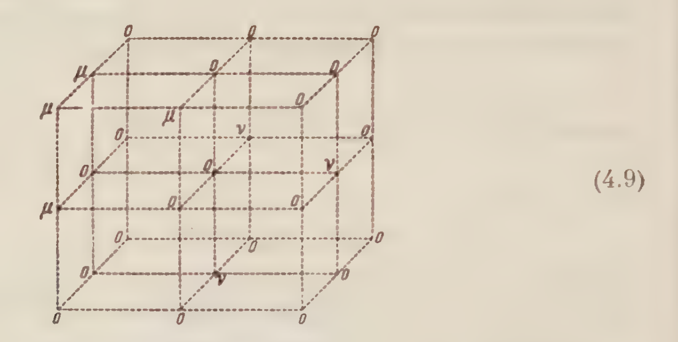
б) одна — вещественная и две — мнимые сопряженные (если при $\rho_{C(\mu,\nu)} = 2$ будет $\sigma_{C(\mu,\nu)} = 0$).

Все линии пучка имеют общую вещественную точку, являющуюся точкой возврата нераспадающихся линий пучка, и еще три общие точки, которые все вещественны в случае (а), и одна из них — вещественная, а две — мнимые сопряженные в случае (б). Двойная прямая первой тройки касается нераспадающихся линий пучка в их точке возврата, а простая прямая этой тройки проходит через остальные общие точки; точка пересечения этих прямых отлична от точек, общих всем линиям пучка. Прямые второй тройки пересекаются в точке возврата и каждая проходит через одну из остальных общих точек.

Если $m^2+4n^3=0$, то, подвергая матрицу (4.4) операциям

$$\boxed{\mathrm{II}}+\boxed{\mathrm{I}}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{2}},\quad \boxed{\mathrm{II}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{m}},\quad \boxed{\mathrm{III}}\cdot\sqrt[3]{\frac{m^2}{4}},$$

приводим ее к виду



(4.9)

которому соответствует канонический пучок

$$\mu(X_1^3+3X_1^2X_2)+3\nu X_2^2X_3=0 \tag{4.10}$$

с такой же характеристикой, как и у пучка (4.5). Для матрицы (4.9) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu,\nu)=\begin{cases}3 & (\mu\neq0,\nu\neq0),\\ 2 & (\mu=0,\nu\neq0 \text{ или } \mu\neq0,\nu=0),\end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}5 & (\mu\neq0,\nu\neq0),\\ 1 & (\mu=0,\nu\neq0 \text{ или } \mu\neq0,\nu=0).\end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Следовательно, в состав пучка (4.10) входят линии с точкой возврата и две тройки вещественных прямых, в каждой из которых две прямые совпадают. Все линии пучка имеют три общие точки, все вещественные. Одна из них — точка возврата нераспадающихся линий пучка, другая — точка взаимного касания этих линий, третья — точка их пересечения. Двойная прямая одной тройки касается нераспадающихся линий пучка в их точке возврата, а простая прямая этой тройки — в их точке взаимного касания; вместе с тем последняя прямая проходит через третью общую точку линий пучка. Прямые другой тройки пересекаются в точке возврата, причем двойная прямая этой тройки проходит через общую точку взаимного касания, а простая прямая — через общую точку пересечения.

Вариант II. Пусть $m=n=0$ в пучке (4.3). Тогда он имеет канонический вид

$$\mu X_1^3+3\nu X_2^2X_3=0. \tag{4.11}$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ пучка (4.11), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu) = -2\mu\nu^2.$$

Из кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеем, кроме тождественно равных нулю, также равные $\mu\nu$, $-2\nu^2$. Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = \mu\nu^2, \quad D_2(\mu, \nu) = \nu, \quad D_1(\mu, \nu) = 1,$$

и элементарные делители матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ равны ν, ν, μ, а потому характеристика пучка (4.11) будет $[(11)1]$.

Для матрицы $\mathfrak{U}(\mu, \nu)$ при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0), \\ 1 & (\mu \neq 0,\ \nu = 0), \end{cases} \qquad \rho_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0), \\ 0 & (\mu \neq 0,\ \nu = 0). \end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Таким образом в состав пучка (4.11) входят линии с точкой возврата и две тройки вещественных прямых, причем в одной тройке совпадают две прямые, а в другой — все три. Все линии пучка имеют две общие точки, обе вещественные; одна из них — точка возврата, другая — точка соприкасания нераспадающихся линий пучка. Тройная прямая пучка проходит через точку возврата и точку соприкасания, двойная прямая касается нераспадающихся линий пучка в точке возврата, а простая прямая — в точке соприкасания; точка пересечения этих касательных отлична от точек, общих всем линиям пучка.

Случай II. $B_{111} = B_{223}$. Пусть при этом B_{122} и B_{222} не равны одновременно нулю Тогда, полагая в пучке (4.2) последовательно $\nu = 0$ при $\mu \neq 0$ и $\mu = -\nu B_{111}$ при $\nu \neq 0$, получим две линии пучка:

$$X_1^3 + 3X_2^2X_3 = 0, \quad B_{222}X_2^3 + 3B_{122}X_1X_2^2 = 0.$$

Принимая их за базис, представим пучок (4.2) в виде

$$\mu(X_1^3 + 3X_2^2X_3) + \nu(B_{222}X_2^3 + 3B_{122}X_1X_2^2) = 0. \qquad (4.12)$$

Здесь возможны два варианта в зависимости от того, будет ли $B_{122} \neq 0$ или $B_{122} = 0$.

Вариант I. $B_{122} \neq 0$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $B_{122} > 0$, так как в противном случае достаточно было бы подвергнуть матрицу пучка (4.12) преобразованиям

$$\underline{\overline{|\mathrm{I}|}}\cdot(-1), \quad \underline{\overline{|\mathrm{II}|}}\cdot(-1), \quad \underline{\overline{|\mathrm{III}|}}\cdot(-1).$$

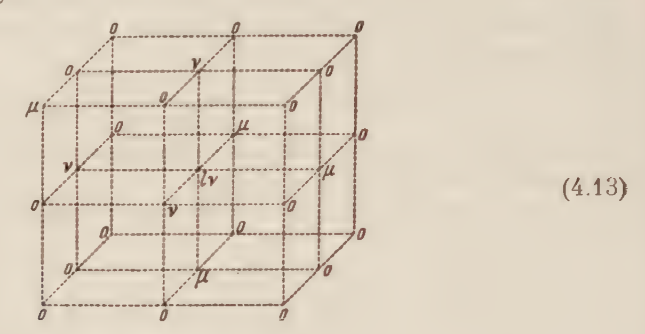
Поэтому, совершая в этой матрице операции

$$\underline{|\mathrm{II}|}\cdot\frac{1}{\sqrt{B_{122}}}, \quad \overline{|\mathrm{III}|}\cdot B_{122}$$

и полагая

$$l = \frac{B_{222}}{\sqrt{B_{122}^3}},$$

мы получим матрицу



(4.13)

которой соответствует канонический пучок

$$\mu(X_1^3 + 3X_2^2X_3^3) + \nu(lX_2^3 + 3X_1X_2^2) = 0. \qquad (4.14)$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (4.13), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu) = -2\mu^3.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = \mu^3.$$

Далее,

$$D_2(\mu, \nu) = 1,$$

поскольку среди кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные μ^3, $-2\nu^2$. Поэтому матрица (4.13) имеет единственный элементарный делитель μ^3, и характеристика пучка (4.14) будет [3].

Для матрицы (4.13) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0), \end{cases} \qquad \rho_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0). \end{cases}$$

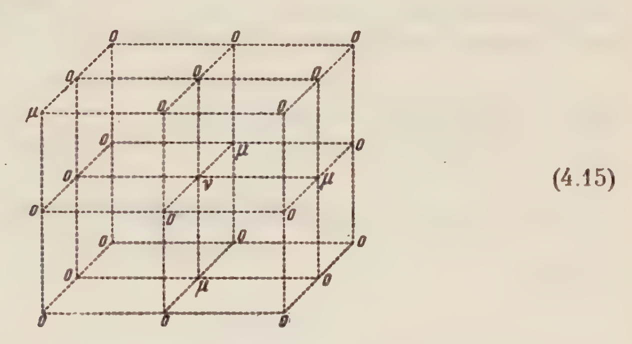
При этом выполняются условия (4.8).

Таким образом в состав пучка (4.14) входят линии с точкой возврата и тройка вещественных прямых, из которых две совпадают. Все линии пучка имеют две общие точки, обе вещественные; одна из них — точка возврата нераспадающихся линий пучка. Эти точки лежат на простой прямой пучка, двойная прямая которого касается нераспадающихся линий пучка в их точке возврата. При $l = 0$ пучок (4.14) будет сизигетическим [см. ([8]), стр. 416], так как одна из линий базиса (тройка вещественных прямых, из которых две совпадают) является гессианом остальных линий пучка [см. ([9]), стр. 236].

Вариант II. $B_{122}=0$. В этом случае $B_{222}\neq 0$ и, производя в матрице пучка (4.12) операции

$$\boxed{II}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{B_{222}}},\quad \boxed{III}\cdot\sqrt[3]{B_{222}^2},$$

мы получим матрицу



(4.15)

которой соответствует канонический пучок

$$\mu(X_1^3+3\,X_2^2X_3)+\nu X_2^3=0. \qquad (4.16)$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (4.15), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{122}(\mu,\nu)=-2\,\mu^3.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu,\nu)=\mu^3.$$

Кубические детерминанты 2-го порядка, порождаемые той же матрицей, кроме значений, тождественно равных нулю, имеют также значения, равные $\mu\nu$, μ^2, $-2\,\mu^2$. Следовательно,

$$D_2(\mu,\nu)=\mu.$$

Далее, имеем:

$$D_1(\mu,\nu)=1.$$

Поэтому элементарные делители матрицы (4.15) равны μ^2, μ, и характеристика пучка (4.16) будет [(21)].

Для матрицы (4.15) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu,\nu)=\begin{cases}3 & (\mu\neq 0),\\ 1 & (\mu=0,\ \nu\neq 0),\end{cases}\qquad \rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}5 & (\mu\neq 0),\\ 0 & (\mu=0,\ \nu\neq 0).\end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Таким образом в состав пучка (4.16) входят линии с точкой возврата и тройка совпадающих вещественных прямых. Все линии пучка имеют только одну общую точку, вещественную, являющуюся точкой

возврата нераспадающихся линий пучка, касательная в этой точке — тройная прямая пучка.

Пусть, наконец, $B_{122} = B_{222} = 0$. Тогда пучок (4.2), в котором, очевидно, $B_{111} = B_{223} \neq 0$, приводится к каноническому виду

$$(\mu + \nu)(X_1^3 + 3\, X_2^2 X_3) = 0. \tag{4.17}$$

Его характеристика будет [(111)], и для соответствующей матрицы при всех значениях параметров μ, ν, не равных одновременно нулю, имеем:

$$r(\mu, \nu) = 3, \quad \rho_{C(\mu,\nu)} = 5.$$

При этом выполняются условия (4.8).

Все линии пучка сливаются в одну линию, имеющую точку возврата.

§ 5. Пучки совокупностей конического сечения и касательной к нему прямой

Пусть

$$F \equiv X_1^2 X_2 + X_2^2 X_3 = 0. \tag{5.1}$$

Соответствующая пучку (1.3) матрица $\mathfrak{U}(\mu, \nu) = \mu A + \nu B$ порождает кубические детерминанты 3-го порядка, представляемые выражениями:

$$\mathfrak{U}_{222}(\mu, \nu) = 6\,[-\mu^3 + P_{222}^{(3)}(\mu, \nu)], \quad \mathfrak{U}_{111}(\mu, \nu) = 6\,\nu\,[-B_{133}\mu^2 + P_{111}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{113}(\mu, \nu) = 2\,\nu\,[-B_{333}\,\mu^2 + P_{113}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{112}(\mu, \nu) = 2\,\nu\,[(2\,B_{113} - B_{233})\,\mu^2 + (B_{123}^2 - 2\,B_{111}B_{123} - B_{122}B_{133} -$$
$$- 2B_{112}B_{233} + 2\,B_{112}B_{113} + 2\,B_{113}B_{223})\,\mu + P_{112}^{(1)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{223}(\mu, \nu) = 2\,\nu\,[-(B_{113} + B_{233})\,\mu^2 + P_{223}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{122}(\mu, \nu) = 2\,\nu\,[(2\,B_{123} - B_{111})\,\mu^2 + P_{122}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{333}(\mu, \nu) = 6\,\nu^2\,[(B_{113}B_{333} - B_{133}^2)\,\mu + P_{333}^{(1)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{233}(\mu, \nu) = 2\,\nu\,[B_{333}\,\mu^2 + P_{233}^{(2)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{133}(\mu, \nu) = 2\,\nu^2\,[(B_{111}\,B_{333} - B_{113}\,B_{133} - 2\,B_{123}\,B_{333} + 2\,B_{133}\,B_{233})\,\mu +$$
$$+ P_{133}^{(1)}(\mu, \nu)],$$
$$\mathfrak{U}_{123}(\mu, \nu) = \nu\,[3\,B_{133}\,\mu^2 + P_{123}^{(2)}(\mu, \nu)].$$

Отсюда заключаем, что $D_3(\mu, \nu)$ будет кубической формой от μ, ν только тогда, когда все детерминанты, кроме $\mathfrak{U}_{222}(\mu, \nu)$, тождественно равны нулю. Следовательно,

$$B_{133} = 0, \quad B_{333} = 0, \quad B_{233} = 0, \quad B_{113} = 0, \quad B_{123} = 0, \quad B_{111} = 0,$$

и пучок (1.3) имеет вид

$$3\,(\mu + \nu B_{112})\,X_1^2 X_2 + 3\,(\mu + \nu B_{223})\,X_2^2 X_3 + 3\,\nu B_{122} X_1 X_2^2 + \nu B_{222} X_2^3 = 0. \tag{5.2}$$

Рассмотрим два случая, когда $B_{112} \neq B_{223}$ и когда $B_{112} = B_{223}$.

Случай I. $B_{112} \neq B_{223}$. Здесь возможны два варианта, смотря по тому, будет ли $B_{222} \neq 0$ или $B_{222} = 0$.

Вариант I. $B_{222} \neq 0$. Тогда, совершая в матрице пучка (5.2) операции

$$\boxed{\text{II}} + \boxed{\text{I}} \cdot k + \boxed{\text{III}} \cdot (-k^2), \quad \boxed{\text{I}} + \boxed{\text{III}} \cdot (-2k),$$

$$\boxed{\text{II}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{|B_{222}|}}, \quad \boxed{\text{I}} \cdot \sqrt[6]{|B_{222}|}, \quad \boxed{\text{III}} \cdot \sqrt[3]{B_{222}^2},$$

где

$$k = \frac{B_{122}}{2(B_{223} - B_{112})},$$

приведем ее к виду, которому соответствует пучок

$$3(\mu + \nu B_{112}) X_1^2 X_2 + 3(\mu + \nu B_{223}) X_2^2 X_3 \pm \nu X_2^3 = 0.$$

Полагая в нем последовательно $\mu = -\nu B_{223}$ и $\mu = -\nu B_{112}$ при $\nu \neq 0$, получаем две линии пучка:

$$3 X_1^2 X_2 + m X_2^3 = 0, \quad 3 X_2^2 X_3 - m X_2^3 = 0,$$

где

$$m = \pm \frac{1}{B_{223} - B_{112}}.$$

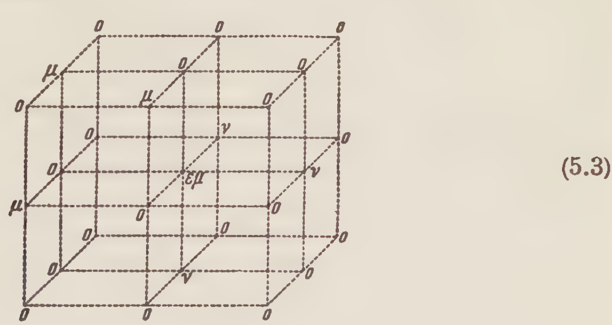
Принимая эти линии за базис, представим пучок в виде

$$3\mu X_1^2 X_2 + 3\nu X_2^2 X_3 + m(\mu - \nu) X_2^3 = 0.$$

Соответствующая матрица после операций

$$\boxed{\text{II}} + \boxed{\text{III}} \cdot \frac{m}{3}, \quad \boxed{\text{II}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{|m|}}, \quad \boxed{\text{I}} \cdot \sqrt[6]{|m|}, \quad \boxed{\text{III}} \cdot \sqrt[3]{m^2}$$

принимает канонический вид



(5.3)

где $\varepsilon = \pm 1$.

Матрице (5.3) соответствует канонический пучок

$$\mu(3X_1^2 X_2 + \varepsilon X_2^3) + 3\nu X_2^2 X_3 = 0, \tag{5.4}$$

имеющий базисом линии:

$$3X_1^2 X_2 + \varepsilon X_2^3 = 0, \quad X_2^2 X_3 = 0.$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (5.3),

тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{222}(\mu, \nu) = -6\mu\nu^2.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = \mu\nu^2.$$

Далее,

$$D_2(\mu, \nu) = 1,$$

поскольку среди кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, имеются равные $-2\mu^2$, $-2\nu^2$. Поэтому элементарные делители матрицы (5.3) равны ν^2, μ, и характеристика пучка (5.4) будет [21].

Для матрицы (5.3) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0, \ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0 \text{ или } \mu \neq 0, \ \nu = 0), \end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0, \ \nu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu \neq 0, \ \nu = 0), \end{cases} \qquad \sigma_{C(\mu,\nu)} = \begin{cases} 0 & (\varepsilon = +1), \\ -2 & (\varepsilon = -1). \end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Следовательно, в состав пучка (5.4) входят совокупности конического сечения и касательной к нему прямой, а также тройка вещественных прямых, из которых две совпадают, и тройка различных пересекающихся в одной точке прямых, которые все вещественны, если при $\rho_{C(\mu,\nu)} = 2$ будет $\sigma_{C(\mu,\nu)} = -2$, и одна из них — вещественная, а две — мнимые сопряженные, если при $\rho_{C(\mu,\nu)} = 2$ будет $\sigma_{C(\mu,\nu)} = 0$. Все линии пучка имеют общую прямую, совпадающую с двойной прямой первой тройки и с одной из вещественных прямых второй тройки. Конические сечения пучка имеют три общие точки; одна из них, вещественная, есть точка касания, другие две — точки пересечения конических сечений; эти точки пересечения — вещественные или мнимые сопряженные, смотря по тому, будет ли $\sigma_{C(\mu,\nu)} = -2$ или $\sigma_{C(\mu,\nu)} = 0$, когда $\rho_{C(\mu,\nu)} = 2$. Двойная прямая тройки пучка касается всех конических сечений в точке их взаимного касания, а простая прямая этой тройки проходит через две общие точки их пересечения.

Вариант II. $B_{222} \neq 0$. Если при этом $B_{122} \neq 0$, то, производя в матрице пучка (5.2) операции

$$\left|\overline{\text{I}}\right| \cdot \sqrt[3]{B_{122}}, \quad \left|\overline{\text{II}}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{B_{122}^2}}, \quad \left|\overline{\text{III}}\right| \cdot \sqrt[3]{B_{122}^4},$$

приведем ее к виду, которому соответствует пучок

$$3(\mu + \nu B_{112}) X_1^2 X_2 + 3(\mu + \nu B_{223}) X_2^2 X_3 + 3\nu X_1 X_2^2 = 0.$$

Полагая в нем последовательно $\mu = -\nu B_{223}$ и $\mu = -\nu B_{112}$, получим при $\nu \neq 0$ две линии пучка:

$$X_1^2 X_2 + n X_1 X_2^2 = 0, \quad X_2^2 X_3 - n X_1 X_2^2 = 0,$$

где

$$n = \frac{1}{B_{112} - B_{223}}.$$

Принимая эти линии за базис, представим пучок в виде

$$3\mu X_1^2 X_2 + 3\nu X_2^2 X_3 + 3n(\mu - \nu) X_1 X_2^2 = 0.$$

Подвергая соответствующую матрицу операциям

$$\boxed{\mathrm{I}} + \boxed{\mathrm{III}} \cdot n, \quad \boxed{\mathrm{II}} + \boxed{\mathrm{I}} \cdot \left(-\frac{n}{2}\right),$$

$$\boxed{\mathrm{I}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3n^2}{4}}, \quad \boxed{\mathrm{II}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3n^2}}, \quad \boxed{\mathrm{III}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9n^4}{16}},$$

мы придем к матрице (5.3), где $\varepsilon = -1$.

Если же в пучке (5.2) $B_{122} = 0$, то, полагая в нем последовательно $\mu = -\nu B_{223}$ и $\mu = -\nu B_{112}$, получим при $\nu \neq 0$ две линии пучка:

$$X_1^2 X_2 = 0, \quad X_2^2 X_3 = 0.$$

Принимая их за базис, будем иметь канонический вид пучка:

$$3\mu X_1^2 X_2 + 3\nu X_2^2 X_3 = 0. \tag{5.5}$$

Замечая, что пучок (5.5) получается из (5.4) при $\varepsilon = 0$, мы видим, что характеристика этих пучков одна и та же, тогда как для матрицы, соответствующей пучку (5.5), при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0, \ \nu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0 \text{ или } \mu \neq 0, \ \nu = 0), \end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0, \ \nu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0, \ \nu \neq 0 \text{ или } \mu \neq 0, \ \nu = 0). \end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Следовательно, в состав пучка (5.5) входят совокупности конического сечения и касательной к нему прямой, а также две тройки вещественных прямых; в каждой тройке две прямые совпадают и все прямые этих троек составляют треугольник, у которого одна сторона — простая прямая, другая — двойная прямая, а третья — тройная прямая. Последняя является общей прямой для всех линий пучка. Конические сечения пучка имеют две общие точки взаимных касаний, обе вещественные. Простая и тройная прямая упомянутого выше треугольника касаются в этих точках конических сечений, а двойная прямая его проходит через них.

Случай II. $B_{112} = B_{223}$. Здесь возможны два варианта, в зависимости от того, будет ли $B_{122} \neq 0$ или $B_{122} = 0$.

Вариант I. $B_{122} \neq 0$. Тогда, совершая в матрице пучка (5.2) операции

$$\boxed{\mathrm{II}} + \boxed{\mathrm{I}} \cdot l + \boxed{\mathrm{III}} \cdot (-l^2), \quad \boxed{\mathrm{I}} + \boxed{\mathrm{III}} \cdot (-2l),$$

$$\boxed{\mathrm{I}}\cdot\sqrt[3]{B_{122}},\quad \boxed{\mathrm{II}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{B_{122}^2}},\quad \boxed{\mathrm{III}}\cdot\sqrt[3]{B_{122}^4},$$

где

$$l = -\frac{B_{222}}{3B_{122}},$$

приведем ее к виду, которому соответствует пучок:

$$3(\mu + \nu B_{112})(X_1^2X_2 + X_2^2X_3) + 3\nu X_1X_2^2 = 0.$$

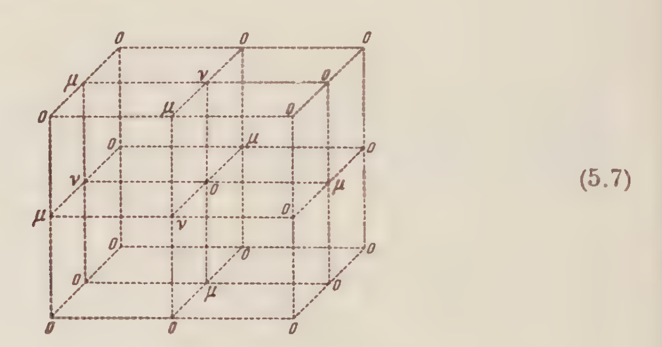
Полагая в нем последовательно $\nu = 0$ при $\mu \neq 0$ и $\mu = -\nu B_{112}$ при $\nu \neq 0$, получим две линии пучка:

$$X_1^2X_2 + X_2^2X_3 = 0, \quad X_1X_2^2 = 0.$$

Принимая их за базис, будем иметь канонический вид пучка:

$$3\mu(X_1^2X_2 + X_2^2X_3) + 3\nu X_1X_2^2 = 0, \tag{5.6}$$

которому соответствует матрица



(5.7)

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (5.7) тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{222}(\mu, \nu) = -6\mu^3.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu, \nu) = \mu^3.$$

Далее,

$$D_2(\mu, \nu) = 1,$$

поскольку среди кубических детерминантов 2-го порядка, порождаемых той же матрицей, существуют равные $-2\mu^2$, $-2\nu^2$. Поэтому матрица (5.7) имеет единственный элементарный делитель μ^3, и характеристика пучка (5.6) будет [3].

Для матрицы (5.7) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0), \\ 2 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0, \end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}4 & (\mu\neq 0),\\ 1 & (\mu=0,\ \nu\neq 0).\end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Следовательно, в состав пучка (5.6) входят совокупности конического сечения и касательной к нему прямой, а также тройка вещественных прямых, из которых две совпадают. Все линии пучка имеют общую прямую, совпадающую с двойной прямой тройки пучка. Конические сечения пучка имеют две общие точки, обе вещественные; в одной из них имеется соприкасание. Простая прямая тройки пучка проходит через эти точки, а двойная прямая касается конических сечений в их точке соприкасания.

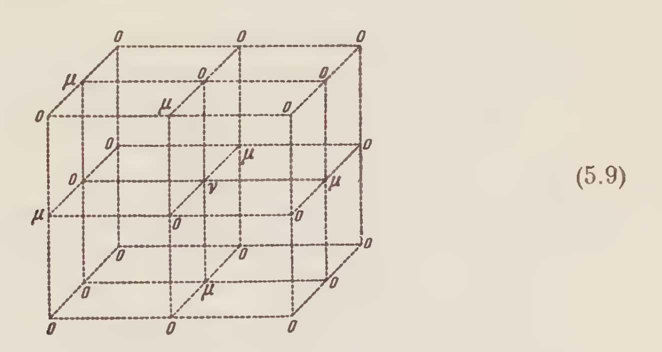
Вариант II. $B_{122}=0$. Если при этом $B_{222}\neq 0$, то полагаем в пучке (5.2) последовательно $\nu=0$ при $\mu\neq 0$ и $\mu=-\nu B_{112}$ при $\nu\neq 0$. Получаем две линии этого пучка:

$$X_1^2X_2+X_2^2X_3=0,\quad X_2^3=0.$$

Приняв их за базис, приходим к пучку:

$$3\mu\,(X_1^2X_2+X_2^2X_3)+\nu X_2^3=0, \tag{5.8}$$

которому соответствует матрица



(5.9)

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (5.9), тождественно равны нулю, кроме детерминанта

$$\mathfrak{U}_{222}(\mu,\nu)=-6\mu^3.$$

Следовательно,

$$D_3(\mu,\nu)=\mu^3.$$

Кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые матрицей (5.9), кроме значений, тождественно равных нулю, имеют также значения, равные μ^2, $-2\mu^2$, $2\mu\nu$. Поэтому

$$D_2(\mu,\nu)=\mu.$$

Наконец,

$$D_1(\mu,\nu)=1.$$

Таким образом матрица (5.9) имеет элементарные делители μ^2, μ, и характеристика пучка (5.8) будет [(21)].

Для матрицы (5.9) при всех значениях параметров μ, ν имеем:

$$r(\mu, \nu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0), \\ 1 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0), \end{cases}$$

$$\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0), \\ 0 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0). \end{cases}$$

При этом выполняются условия (4.8).

Таким образом в состав пучка (5.8) входят совокупности конического сечения и прямой, общей всем линиям пучка и касающейся конических сечений в точке их гиперсоприкасания, а также тройка вещественных прямых, совпадающих с общей прямой пучка. Эта тройка прямых является гессианом остальных линий пучка [ср. ([9]), стр. 239], следовательно, пучок (5.8) — сизигетический.

При $B_{222} = 0$ замечаем, что пучок (5.2), в котором, очевидно, $B_{112} = B_{223} \neq 0$, приводится к каноническому виду

$$(\mu + \nu)(3X_1^2X_2 + 3X_2^2X_3) = 0. \tag{5.10}$$

Его характеристика будет [(111)], и для соответствующей матрицы при всех значениях параметров μ, ν, не равных одновременно нулю, имеем:

$$r(\mu, \nu) = 3, \quad \rho_{C(\mu, \nu)} = 4.$$

При этом выполняются условия (4.8).

Следовательно, все линии пучка совпадают, образуя совокупность конического сечения и касательной к нему прямой.

§ 6. Категории и типы пучков вещественных плоских линий третьего порядка с наивысшей характеристикой

Все сказанное в предыдущих параграфах о характере линий, входящих в состав канонических видов пучков с наивысшей характеристикой, о проективных свойствах этих линий и характеризующих их признаках сохраняет силу* и для данного пучка (1.1) во всех рассматривавшихся случаях.

Объединяя в одну категорию пучки с одной и той же характеристикой, находим шесть категорий пучков вещественных плоских линий третьего порядка с наивысшей характеристикой**.

Вместе с тем, в зависимости от значений инвариантов $\omega(T(\mu, \nu))$ или $\rho_{C(\mu, \nu)}$, эти категории могут быть подразделены на типы. В прилагаемой таблице приведены результаты такой классификации.

---

* На основании теорем и замечаний § 3 раздела I.

** Характеристика [(111)] исключена.

Категории	Типы	Состав пучков	Канонические уравнения
I. [111]		Эквиангармонические линии 1-го типа. Три тройки прямых, в каждой из которых одна прямая вещественна и две—мнимые сопряженные, пересекающиеся все три в одной точке.	(2.4)
II. [$\bar{1}\bar{1}1$]		Эквиангармонические линии 2-го типа. Тройка вещественных прямых, пересекающихся в одной точке.	(3.14)
III.[(11)1]	I. $\omega(T(\mu, \nu)) = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$	Эквиангармонические линии 1-го типа. Тройка пересекающихся в одной точке прямых, из которых одна — вещественная и две—мнимые сопряженные. Тройка совпадающих вещественных прямых.	(2.8)
	II. $\omega(T(\mu, \nu)) = \begin{cases} +1 \\ 0 \end{cases}$	Эквиангармонические линии 2-го типа. Тройка вещественных прямых, пересекающихся в одной точке. Тройка совпадающих вещественных прямых.	(3.7)
	III. $\omega(T(\mu, \nu)) = 0$	Линии с точкой возврата. Тройка вещественных прямых, из которых две совпадают. Тройка вещественных совпадающих прямых.	(4.11)
IV. [21]	I. $\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0) \\ 1 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0) \\ 2 & (\mu \neq 0,\ \nu = 0) \end{cases}$	Линии с точкой возврата. Тройка вещественных прямых, из которых две совпадают. Тройка различных, пересекающихся в одной точке прямых, из которых все--вещественные или одна—вещественная и две — мнимые сопряженные.	(4.5)
	II. $\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0) \\ 1 & \begin{pmatrix} \mu \neq 0,\ \nu \neq 0 \\ \text{или} \\ \mu \neq 0,\ \nu = 0 \end{pmatrix} \end{cases}$	Линии с точкой возврата. Две тройки вещественных прямых, в каждой из которых две прямые совпадают.	(4.10)
	III. $\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0) \\ 1 & (\mu = 0,\ \nu \neq 0) \\ 2 & (\mu \neq 0,\ \nu = 0) \end{cases}$	Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Тройка вещественных прямых, из которых две совпадают. Тройка различных, пересекающихся в одной точке прямых, из которых все — вещественные или одна вещественная и две—мнимые сопряженные.	(5.4)
	IV. $\rho_{C(\mu, \nu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0,\ \nu \neq 0) \\ 1 & \begin{pmatrix} \mu = 0,\ \nu \neq 0 \\ \text{или} \\ \mu \neq 0,\ \nu = 0 \end{pmatrix} \end{cases}$	Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Две тройки вещественных прямых, в каждой из которых две прямые совпадают.	(5.5)

Категории	Типы	Состав пучков	Канонические уравнения
V. [(21)]	I. $\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}5 & (\mu\neq 0)\\ 0 & (\mu=0,\ \nu\neq 0)\end{cases}$	Линии с точкой возврата. Тройка совпадающих вещественных прямых.	(4.16)
	II. $\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}4 & (\mu\neq 0)\\ 0 & (\mu=0,\ \nu\neq 0)\end{cases}$	Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Тройка вещественных прямых, совпадающих с общей прямой пучка.	(5.8)
VI. [3]	I. $\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}5 & (\mu\neq 0)\\ 1 & (\mu=0,\ \nu\neq 0)\end{cases}$	Линии с точкой возврата. Тройка вещественных прямых, из которых две совпадают.	(4.14)
	II. $\rho_{C(\mu,\nu)}=\begin{cases}4 & (\mu\neq 0)\\ 1 & (\mu=0,\ \nu\neq 0)\end{cases}$	Совокупности конического сечения и касательной к нему прямой. Тройка вещественных прямых, из которых две совпадают.	(5.6)

Поступило
2. II. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколов. Н. П., О применении пространственных матриц к исследованию кубических тройничных форм над полем вещественных чисел, Доклады Ак. наук УССР, № 3 (1954), 159—164.
[2] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
[3] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[4] Weierstrass K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsber. der Akad. der Wiss., Berlin (1867), 310—338.
[5] Muth P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig, 1899.
[6] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
[7] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.
[8] Cayley A., A memoir on curves of the third order, Phil. Trans. R. Soc. of London, 147 (1857), 415—446.
[9] Weiss E. A., Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung, J. für die reine und angew. Math., 173 (1935), 233—242.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 233—244

А. И. КОСТРИКИН

РЕШЕНИЕ ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ БЕРНСАЙДА ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ 5

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается нильпотентность нилькольца Ли показателя 5 с двумя свободными образующими и областью операторов — полем характеристики 5.

Связь, существующая между периодическими группами и кольцами Ли, позволяет непосредственно применить полученный результат к решению ослабленной проблемы Бернсайда для данного случая.

§ 1. Введение

В настоящей статье решается в положительном смысле вопрос о нильпотентности максимального нилькольца Ли L_1 показателя 5 с двумя свободными образующими x и y, рассматриваемого над полем характеристики 5. Напомним, что нилькольцом Ли показателя ρ с образующими $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется кольцо Ли L_1, любые два элемента u и v которого удовлетворяют соотношению $[uv^{\rho-1}] = 0$.

Очевидно, его можно рассматривать как фактор-кольцо L/I, где L — свободное кольцо Ли с k образующими $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а I — идеал, порожденный элементами кольца вида $[uv^{\rho-1}]$.

Здесь и ниже через

$$[y_1 y_2 \ldots y_m] = ((\ldots(y_1 \circ y_2) \circ y_3) \ldots) \circ y_m$$

мы сокращенно обозначаем правонормированное произведение Ли степени m.

Как известно, вопрос о нильпотентности нилькольца Ли с конечным числом образующих не решен.

Предлагаемое доказательство основной теоремы, содержащейся в данной статье, относится к тому частному случаю, когда в качестве области операторов для кольца Ли вводится поле характеристики $p = 5$ и показатель $\rho = p$.

Этот случай, интересный и сам по себе, поскольку он представляет первый нетривиальный шаг в решении рассматриваемого вопроса, заслуживает также внимания в связи с работами Магнуса ([2]), Цассенхауза ([3]) и Санова ([5]), в которых устанавливается глубокая связь между кольцами Ли и периодическими группами.

В частности, из упомянутых работ следует, что порядок (или мощность) группы $F_0 = F/F_\infty$ будет равен порядку (или мощности) кольца

$L_0 = L/A$. Здесь F — максимальная периодическая с периодом p (p — любое простое число) группа, порожденная конечным числом k образующих; $F_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — i-й член убывающего центрального ряда группы F; A — некоторый, вполне определенный, идеал свободного кольца L с k образующими.

При этом доказано, что L и A можно рассматривать над конечным полем $\mathfrak{G}F(p)$.

$F_0 = F/F_\infty$ является, очевидно, максимальной нильпотентной периодической группой с тем же периодом p и данным числом производящих элементов, что и у группы F.

Вопрос о конечности группы F_0 ставит так называемая ослабленная проблема Бернсайда.

Таким образом, трудная и далекая еще от своего разрешения теоретико-групповая проблема сводится к эквивалентной ей задаче из теории колец Ли.

Очевидно, из нильпотентности кольца L_0 (а следовательно, и его конечности, так как $pL_0 = 0$) следует конечность группы F_0, т. е. положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда.

Отметим, что сообщения о решении ослабленной проблемы Бернсайда для $p = 5$ в положительном смысле появлялись уже дважды.

Магнусом ([1]) было указано на доказательство, которым располагал Холл. Самое доказательство, однако, так и не было опубликовано. Утверждение о конечности группы F_0 высказал затем Грюн ([4]). Оба результата оказались неверными, ошибочность их доказана Сановым ([5]).

Приводимое в настоящей статье доказательство не противоречит результатам Санова, поскольку исследование факторов убывающего центрального ряда F_i/F_{i+1} было проведено им только при $i \leqslant 8$, тогда как ниже оно распространено на последующие значения i.

На пути, намеченном Магнусом, возникают серьезные трудности при изучении идеала A.

Более доступным и, повидимому, более естественным оказывается изучение идеала I, которое небезынтересно для теории периодических групп, так как из исследований Цассенхауза и Санова вытекает, что $I \subseteq A$.

Ясно, что если нильколцо Ли L/I будет нильпотентным, то нильпотентным будет и кольцо L/A.

Как уже указывалось, объектом нашего изучения является идеал I, порожденный всеми элементами $[uv^4]$, где u и v — произвольные полиномы из кольца L.

Условимся впредь принадлежность элемента P к идеалу I обозначать знаком $\equiv 0 \pmod I$).

Кольцо L полиномов Ли мы разбиваем на однородные составляющие L_i — модули полиномов Ли степени i.

Точно так же идеал I рассматриваем составленным из однородных составляющих I_{p+m} * модулей полиномов степени $p + m$, входящих в I.

* Из соображений удобства принята запись однородной составляющей в виде I_{p+m} ($m = 0, 1, \ldots$), подчеркивающем, что степень полиномов Ли идеала I не может быть ниже p.

Формула Витта

$$\psi_q = \frac{1}{q} \sum_{s/q} \mu(s) 2^{\frac{q}{s}}$$

дает значение ранга ψ_q модуля всех полиномов Ли степени q с $k=2$ образующими.

Обозначим через φ_{p+m} ранг модуля I_{p+m}.

Явное выражение для φ_{p+m} удалось получить лишь для первых значений m, а именно:

$$\varphi_p = p-1,$$

$$\varphi_{p+1} = p,$$

$$\varphi_{p+2} = 3p-1,$$

$$\varphi_{p+3} = 6p-4, \quad p \geqslant 5.$$

При доказательстве нильпотентности кольца L/I пришлось идти несколько иным путем.

Пусть

$$\rho_{p+m} = \psi_{p+m} - \varphi_{p+m}.$$

Базис любого модуля L_i, $i > p$, получается из базиса L_p умножением его элементов на x и y справа. Элементы базиса в L_i, не принадлежащие идеалу I, могут получиться только из тех элементов $P_1, P_2, \ldots, P_{\rho_p}$ модуля L_p, которые не входят в I и являются независимыми, т. е.

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_{\rho_p} P_{\rho_p} \not\equiv 0 \pmod{I}, \quad \alpha_i \in \mathfrak{G}F(p).$$

Обозначим через $\{P, x^s, y^t\}$ совокупность 2^{s+t} элементов кольца Ли, получающихся из $P \in L$ умножением справа s раз на x и t раз на y.

При этом, естественно, будет получаться много элементов или входящих в идеал I при $P \not\equiv 0\,(I)$, или же зависимых по $\operatorname{mod} I$.

Пусть $P \not\equiv 0\,(I)$ имеет степень 5. Мы докажем, что любой элемент из совокупности $\{P, x^s, y^t\}$ входит в идеал $I = \{[uv^4]\}$ при $s+t=8$.

Попутно будут получены оценки значений ρ_{5+m} сверху. Дальнейшее исследование базируется, по существу, на тех следствиях, которые вытекают из определения идеала I.

Рассмотрим элемент

$$a_{(P,Q,\alpha)} = [P(y+\alpha Q)^4] \equiv 0 \pmod{I},$$

где P и Q — любые одночлены Ли, $\alpha \in \mathfrak{G}F(5)$.

Раскрывая внутреннюю скобку, получим:

$$a_{(P,Q,\alpha)} = b_{(P,Q^0)} + \alpha b_{(P,Q^1)} + \alpha^2 b_{(P,Q^2)} + \alpha^3 b_{(P,Q^3)} + \alpha^4 b_{(P,Q^4)},$$

где $b_{(P,Q^i)}$ — полином Ли, содержащий Q в i-й степени,

$$b_{(P,Q^0)} = [Py^4] \equiv 0\,(I)$$

и

$$b_{(P,Q^4)} = [PQ^4] \equiv 0\,(I).$$

Легко видеть, что все $b_{(P,Q^i)} \equiv 0\,(I)$. В самом деле,

$$-2a_{(P,Q,1)} - 2a_{(P,Q,-1)} \equiv b_{(P,Q^2)} \equiv 0 \pmod{I},$$

а поэтому и

$$-2a_{(P,Q,1)}-a_{(P,Q,2)}\equiv b_{(P,Q^1)}\equiv 0 \pmod I.$$

В дальнейшем используются три соотношения:

$$\text{I)}\ b_{(P,Q^1)}=[Py^3Q]+[Py^2Qy]+[PyQy^2]+[PQy^3]\equiv 0\,(I),$$

$$\text{II)}\ b_{(P,Q^2)}=[Py^2Q^2]+[PyQyQ]+[PyQ^2y]+[PQ^2y^2]+[PQyQy]+$$
$$+[PQy^2Q]\equiv 0\,(I),$$

$$\text{III)}\ b^1_{(P,Q^1)}=[Px^3Q]+[Px^2Qx]+[PxQx^2]+[PQx^3]\equiv 0\,(I).$$

Последнее сравнение получается из первого заменой y на x.

Можно было бы, следуя Санову, определить идеал I путем введения понятия обобщенного некоммутативного дифференцирования, и тогда системой образующих могли бы служить так называемые высшие производные, частным случаем которых являются только что рассмотренные элементы $b_{(P,Q^i)}$.

Соотношения I) — III) выведены, однако, с той целью, чтобы целиком исходить из определения идеала I, принятого в самом начале этого параграфа.

Условимся в следующих обозначениях.

Базисные одночлены Ли будем записывать знаком $f^k_{i,j}$ с тремя индексами. Нижний левый индекс будет указывать степень одночлена относительно x и y в совокупности; нижний правый индекс — степень одночлена относительно x; верхний индекс — порядковый номер одночлена при фиксированных i и j.

В силу симметрии $f^k_{i,j}$ относительно x и y, имеет смысл рассматривать только те одночлены, у которых $j\leqslant\left[\frac{i}{2}\right]$. Через $\overline{f^k_{i,j}}$ обозначим одночлен, симметричный к $f^k_{i,j}$.

Нас будут интересовать, в основном, лишь те базисные элементы, которые порождают модуль

$$L_{p+i}-I_{p+i}\quad (i=0,1,\ldots).$$

Все прочие одночлены Ли играют вспомогательную роль и, по мере возможности, опускаются, чем достигается некоторая экономия в вычислениях.

Очевидно, если одночлен Ли имеет вид

$$P=[xy^{k_1}x^{m_1}\ldots y^{k_r}x^{m_r}\ldots x^{m_n}],$$

где какое-то $k_r\geqslant p-1$ (или $m_r\geqslant p-1$), то сравнение $P\equiv 0 \pmod I$ следует из самого определения идеала. При $k_r\leqslant p-2$ и $m_r\leqslant p-2$ принадлежность P к идеалу становится фактом, далеким от очевидности.

В дальнейшем часто будут употребляться следующие тождества в кольце Ли, вытекающие из свойств операции умножения $\circ$:

$$\text{IV)}\ [xy^2x]=-[yx^2y],$$
$$\text{V)}\ [xy^2x]=\ \ [xyxy].$$
$$\text{VI)}\ [yx^2y]=\ \ [yxyx].$$

Последние два тождества симметричны.

При преобразованиях, проводимых над одночленами с применением тождеств IV) — VI), будет указана в круглых скобках ссылка типа

i — VI, если при изменении записи одночлена, стоящего на i-м месте в данном выражении, использовалось тождество VI).

Исследование будем вести последовательно, по модулям L_i, $i = 5, 6, \ldots, 13$.

§ 2

Модуль L_5. Возможны лишь следующие одночлены Ли:

$$1)\ f_{5,1}^1 = [xy^4] \equiv 0\,(I),$$

$$2)\ f_{5,2}^1 = [xy^2xy], \quad f_{5,2}^2 = [xy^3x] \equiv -2f_{5,2}^1\,(I),$$

$$f_{5,2}^3 = [xyxy^2] = [xy^2xy] = f_{5,2}^1\,(1 - \mathrm{V}).$$

Выражение для $f_{5,2}^2$ получается из I):

$$b_{(x,x)} = [xyxy^2] + [xy^2xy] + [xy^3x] = 2f_{5,2}^1 + f_{5,2}^2 \equiv 0\,(I).$$

Остальные элементы симметричны данным. Имеем:

$$\rho_5 \leqslant 2\,(f_{5,2}^1,\ \overline{f}_{5,2}^1).$$

В скобках здесь и дальше мы будем указывать элементы, порождающие модуль $L_{p+i} - I_{p+i}$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

Модуль L_6. Отметим, что если вся совокупность $L_{k,m}$ полиномов Ли степени k относительно x и y и степени m относительно x сравнима с нулем по $\mathrm{mod}\, I$, то и $L_{k+1,m} \equiv 0\,(I)$. Поэтому мы не будем на них обращать внимания, постепенно опуская $f_{i,j}^k$ со все возрастающим индексом j.

$$2)\ f_{6,2}^1 = [f_{5,2}^1 \cdot y] = [xy^2xy^2],$$

$$f_{6,2}^2 = [f_{5,2}^2 \cdot y] = [xy^3xy] \equiv -2f_{6,2}^1\,(I),$$

$$3)\ f_{6,3}^1 = [f_{5,2}^1 \cdot x] = [xy^2xyx],$$

$$f_{6,3}^2 = [\overline{f}_{5,2}^2 \cdot y] = [yx^3y^2],$$

$$f_{6,3}^3 = [\overline{f}_{5,2}^1 \cdot y] = [xy^2yxy] \equiv 2f_{6,3}^2\,(I),$$

$$f_{6,3}^4 = [f_{5,2}^2 \cdot x] = [xy^3x^2] \equiv -2f_{6,3}^1\,(I).$$

Таким образом,

$$\rho_{5+1} \leqslant 4\,(f_{6,2}^1,\ \overline{f}_{6,2}^1,\ f_{6,3}^1 \text{ и } f_{6,3}^2).$$

Модуль L_7.

$$2)\ f_{7,2}^1 = [f_{6,2}^1 \cdot y] = [xy^2xy^3] = [xyxy^4] \equiv 0\,(I)\,(1 - \mathrm{V}).$$

Поэтому и

$$f_{7,2}^2 = [f_{6,2}^2 \cdot y] = [xy^3xy^2] \equiv -2f_{7,2}^1 \equiv 0\,(I).$$

$$3)\ f_{7,3}^1 = [f_{6,3}^1 \cdot y] = [xy^2xyxy],$$

$$f_{7,3}^2 = [f_{6,3}^2 \cdot y] = [yx^3y^3],$$

$$f_{7,3}^3 = [f_{6,3}^3 \cdot y] = [xy^2yxy^2] \equiv 2f_{7,3}^2\,(I),$$

$$f_{7,3}^4 = [f_{6,3}^4 \cdot y] = [xy^3x^2y] \equiv -2f_{7,3}^1\,(I),$$

$$f_{7,3}^5 = [f_{6,2}^1 \cdot x] = [xy^2xy^2x] \equiv -f_{7,3}^1 - 2f_{7,3}^2\,(I),$$

$$f_{7,3}^6 = [f_{6,2}^2 \cdot x] = [xy^3xyx] \equiv 2f_{7,3}^1 - f_{7,3}^2\,(I).$$

Последние два соотношения нуждаются еще в доказательстве.

Используя тождество II), получим:

$$b_{([xy^2],x^2)}=[xy^2x^2y^2]+[xy^2xyxy]+[xy^2xy^2x]+[xy^4x^2]+[xy^3xyx]+$$
$$+[xy^3x^2y]\equiv 0\,(I),$$
$$[xy^2x^2y^2]=-[yx^2yxy^2]\,(1-\mathrm{IV}).$$

Поэтому имеем:

$$-f^1_{7,3}-2f^2_{7,3}+f^5_{7,3}+f^6_{7,3}\equiv 0\,(I). \qquad \text{a)}$$

Тождества I) и V) дают:

$$2f^5_{7,3}+f^6_{7,3}\equiv 0\,(I). \qquad \text{b)}$$

Из соотношений a) и b) получаем выражения для $f^5_{7,3}$ и $f^6_{7,3}$. Следовательно,

$$\rho_{5+2}\leqslant 4\,(f^1_{7,3},\ \overline{f^1_{7,3}},\ f^2_{7,3}\ \text{и}\ \overline{f^2_{7,3}}).$$

Модуль L_8.

$$L_{8,1}\equiv o\,(I)\ \text{и}\ L_{8,2}\equiv 0\,(I).$$

3) $f^1_{8,3}=[f^1_{7,3}\cdot y]=[xy^2xyxy^2]$,

$f^2_{8,3}=[f^4_{7,3}\cdot y]=[xy^3x^2y^2]\equiv -2f^1_{8,3}\,(I)$,

$f^3_{8,3}=[f^5_{7,3}\cdot y]=[xy^2xy^2xy]\equiv -f^1_{8,3}\,(I)$,

$f^4_{8,3}=[f^6_{7,3}\cdot y]=[xy^3xyxy]\equiv 2f^1_{8,3}\,(I)$.

Здесь уже использовано то обстоятельство, что

$$[f^2_{7,3}\cdot y]\equiv 0\,(I)\ \text{и}\ [f^3_{7,3}\cdot y]\equiv 0\,(I).$$

4) $f^1_{8,4}=[\overline{f^2_{7,3}}\cdot y]=[xy^3x^3y]$,

$f^2_{8,4}=[\overline{f^5_{7,3}}\cdot y]=[yx^2yx^2y^2]$,

$f^3_{8,4}=[f^1_{7,3}\cdot x]=[xy^2xyxyx]$,

$f^4_{8,4}=[f^2_{7,3}\cdot x]=[yx^3y^3x]$,

$f^5_{8,4}=[f^3_{7,3}\cdot x]=[yx^2yxy^2x]\equiv 2f^4_{8,4}\,(I)$,

$f^6_{8,4}=[f^4_{7,3}\cdot x]=[xy^3x^2yx]\equiv -2f^3_{8,4}\,(I)$,

$f^7_{8,4}=[f^5_{7,3}\cdot x]=[xy^2xy^2x^2]\equiv -f^3_{8,4}-2f^4_{8,4}\,(I)$,

$f^8_{8,4}=[f^6_{7,3}\cdot x]=[xy^3xyx^2]\equiv 2f^3_{8,4}-f^4_{8,4}\,(I)$,

$f^9_{8,4}=[\overline{f^1_{7,3}}\cdot y]=[yx^2yxyxy]$,

$f^{10}_{8,4}=[\overline{f^3_{7,3}}\cdot y]=[xy^2xyx^2y]\equiv 2f^1_{8,4}\,(I)$,

$f^{11}_{8,4}=[\overline{f^4_{7,3}}\cdot y]=[yx^3y^2xy]\equiv -2f^9_{8,4}\,(I)$,

$f^{12}_{8,4}=[\overline{f^6_{7,3}}\cdot y]=[yx^3yxy^2]\equiv -f^1_{8,4}+2f^9_{8,4}(I)$.

Выразим $f^3_{8,4}$, $f^4_{8,4}$ и $f^9_{8,4}$ через $f^1_{8,4}$ и $f^2_{8,4}$.

Применяя III), получим:

$$b^1_{([xy^2],\, y)} = [xy^3x^3y] + [xy^3x^2yx] + [xy^3xyx^2] + [xy^4x^3] \equiv 0\,(I).$$

Отсюда

$$f^1_{8,4} - f^4_{8,4} \equiv 0\,(I), \text{ или } f^4_{8,4} \equiv f^1_{8,4}\,(I). \qquad \text{a)}$$

Далее,

$$[b^1_{(y,y)} \cdot xy^2] \equiv [yx^3yxy^2] + [yx^2yx^2y^2] + [yxyx^3y^2] = [yx^3yxy^2] + 2\,[yx^2yx^2y^2] \equiv$$
$$\equiv 0\,(I)\,(3 - \text{VI}).$$

Поэтому

$$2f^2_{8,4} - f^1_{8,4} + 2f^9_{8,4} \equiv 0\,(I),$$

или

$$f^9_{8,4} \equiv -2f^1_{8,4} - f^2_{8,4}\,(I). \qquad \text{b)}$$

Из

$$[xy^2x\,[xy^2x]] = 0 \text{ и } [xy^2x] = y^2x^2 - x^2y^2 + 2xyxy - 2yxyx$$

следует

$$[xy^2xy^2x^2] - [xy^2x^3y^2] + 2\,[xy^2x^2yxy] - 2\,[xy^2xyxyx] =$$
$$= [xy^2xy^2x^2] + [yx^2yx^2y^2] - 2\,[yx^2yxyxy] - 2\,[xy^2xyxyx] = 0$$
$$(2 - \text{IV},\ 3 - \text{IV}).$$

Отсюда, используя уже полученное тождество b), имеем:

$$f^3_{8,4} \equiv -f^1_{8,4} + f^2_{8,4}(I). \qquad \text{c)}$$

Выражая некоторые из $f^i_{8,4}$ через $f^1_{8,4}$ и $f^2_{8,4}$, получим:

4) $f^1_{8,4} = [xy^3x^3y]$,

$f^2_{8,4} = [yx^2yx^2y^2]$,

$f^3_{8,4} = [xy^2xyxyx] \equiv -f^1_{8,4} + f^2_{8,4}\,(I)$,

$f^4_{8,4} = [yx^3y^3x] \equiv f^1_{8,4}(I)$,

$f^6_{8,4} = [xy^3x^2yx] \equiv 2f^1_{8,4} - 2f^2_{8,4}(I)$,

$f^7_{8,4} = [xy^2xy^2x^2] \equiv -f^1_{8,4} - f^2_{8,4}\,(I)$,

$f^9_{8,4} = [yx^2yxyxy] \equiv -2f^1_{8,4} - f^2_{8,4}\,(I)$,

$f^{10}_{8,4} = [xy^2xyx^2y] \equiv 2f^1_{8,4}\,(I)$.

$$\rho_{5+3} \leqslant 4\,(f^1_{8,3}, \bar{f}^1_{8,3}, f^1_{8,4} \text{ и } f^2_{8,4}).$$

Модуль L_9.

$L_{9,1} \equiv 0\,(I)$, $\quad L_{9,2} \equiv 0\,(I)$.

3) $f^1_{9,3} = [f^1_{8,3} \cdot y] = [xy^2xyxy^3]$,

$f^2_{9,3} = [f^2_{8,3} \cdot y] = [xy^3x^2y^3] \equiv -2f^1_{9,3}\,(I)$,

$f^3_{9,3} = [f^3_{8,3} \cdot y] = [xy^2xy^2xy^2] \equiv -f^1_{9,3}\,(I)$,

$f^4_{9,3} = [f^4_{8,3} \cdot y] = [xy^3xyxy^2] \equiv 2f^1_{9,3}\,(I)$,

$$4)\ f^1_{9,4}=[f^1_{8,4}\cdot y]=[xy^3x^3y^2],$$
$$f^2_{9,4}=[f^2_{8,4}\cdot y]=[yx^2yx^2y^3],$$
$$f^3_{9,4}=[f^4_{8,4}\cdot y]=[yx^3y^3xy]\equiv f^1_{9,4}\,(I),$$
$$f^4_{9,4}=[f^6_{8,4}\cdot y]=[xy^3x^2yxy]\equiv 2f^1_{9,4}-2f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^5_{9,4}=[f^7_{8,4}\cdot y]=[xy^2xy^2x^2y]\equiv -f^1_{9,4}-f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^6_{9,4}=[f^1_{8,3}\cdot x]=[xy^2xyxy^2x],$$
$$f^7_{9,4}=[f^2_{8,3}\cdot x]=[xy^3x^2y^2x]\equiv -2f^6_{9,4}\,(I),$$
$$f^8_{9,4}=[f^3_{8,3}\cdot x]=[xy^2xy^2xyx]\equiv -f^6_{9,4}\,(I),$$
$$f^9_{9,4}=[f^4_{8,3}\cdot x]=[xy^3xyxyx]\equiv 2f^6_{9,4}\,(I),$$
$$f^{10}_{9,4}=[f^3_{8,4}\cdot y]=[xy^2xyxyxy]\equiv -f^1_{9,4}+f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^{11}_{9,4}=[f^9_{8,4}\cdot y]=[yx^2yxyxy^2]\equiv -2f^1_{9,4}-f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^{12}_{9,4}=[f^{10}_{8,4}\cdot y]=[xy^2xyx^2y^2]\equiv 2f^1_{9,4}\,(I).$$

$f^6_{9,4}$ выражается линейно через $f^2_{9,4}$. В самом деле, используя I) и учитывая, что

$$[yx^2\,[yx^2]\,y^3]=0,$$

получим:

$$b_{([yx^2],\,[yx^2])}=[yx^2y\,[yx^2]\,y^2]+[yx^2y^2\,[yx^2]\,y]+[yx^2y^3\,[yx^2]]=$$
$$=2\,[yx^2y^2x^2y^2]-2\,[yx^2yxyxy^2]+[yx^2yx^2y^3]+2\,[yx^2y^3x^2y]-$$
$$-2\,[yx^2y^2xyxy]-[2yx^2y^3xyx]+[yx^2y^4x^2]\equiv$$
$$\equiv -2f^{12}_{9,4}-2f^{11}_{9,4}+f^2_{9,4}-2f^5_{9,4}+2f^{10}_{9,4}+2f^8_{9,4}\,(I)$$
$$(1-\mathrm{IV},\ 4-\mathrm{IV},\ 5-\mathrm{IV},\ 6-\mathrm{IV}).$$

Отсюда

$$f^2_{9,4}-f^6_{9,4}\equiv 0\,(I),\ \text{или}\ f^6_{9,4}\equiv f^2_{9,4}\,(I).$$

Таким образом:

$$f^6_{9,4}=[xy^2xyxy^2x]\equiv f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^7_{9,4}=[xy^3x^2y^2x]\equiv -2f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^8_{9,4}=[xy^2xy^2xyx]\equiv -f^2_{9,4}\,(I),$$
$$f^9_{9,4}=[xy^3xyxyx]\equiv 2f^2_{9,4}\,(I),$$
$$\rho_{5+4}\leqslant 6\ (f^1_{9,3},\ \overline{f^1_{9,3}},\ f^1_{9,4},\ \overline{f^1_{9,4}},\ f^2_{9,4}\ \text{и}\ \overline{f^2_{9,4}}).$$

Модуль L_{10}.

$$L_{10,1}\equiv 0\,(I),\quad L_{10,2}\equiv 0\,(I),\quad L_{10,3}=\{[L_{9,2}\cdot x],\,[L_{9,3}\cdot y]\},$$

но $[L_{9,2}\cdot x]\equiv 0\,(I)$. Также и $[L_{9,3}\cdot y]\equiv 0\,(I)$, так как

$$[f^1_{9,3}\cdot y]=[xy^2xyxy^4]\equiv 0\,(I),$$

где $f^1_{9,3}$ — единственный элемент, порождающий $L_{9,3}-I_{5+4,3}$.

Итак,

$$L_{10,3} \equiv 0\,(I).$$

4) Учитывая, что $[f_{9,4}^{2} \cdot y] \equiv 0\,(I)$, получим:

$$f_{10,4}^{1} = [f_{9,4}^{1} \cdot y] = [xy^3x^3y^3],$$
$$f_{10,4}^{2} = [f_{9,4}^{4} \cdot y] = [xy^3x^2yxy^2] \equiv 2f_{10,4}^{1}\,(I),$$
$$f_{10,4}^{3} = [f_{9.4}^{6} \cdot y] = [xy^2xyxy^2xy] \equiv 0\,(I),$$
$$f_{10,4}^{4} = [f_{9.4}^{7} \cdot y] = [xy^3x^2y^2xy] \equiv 0\,(I),$$
$$f_{10,4}^{5} = [f_{9.3}^{1} \cdot x] = [xy^2xyxy^3x] \equiv -f_{10,4}^{1}\,(I).$$

Последнее соотношение нужно доказать. Мы имеем:

$$[b_{(x,x)}xy^3x] = 2\,[xy^2xyxy^3x] + [xy^3x^2y^3x] \equiv 0\,(I).$$

Снова используя I), получим:

$$b_{([xy^3x^3],x)} = [xy^3x^2y^3x] + [xy^3x^2y^2xy] + [xy^3x^2yxy^2] + [xy^3x^3y^3] \equiv 0\,(I).$$

Отсюда

$$[xy^3x^2y^3x] - 2f_{10,4}^{1} \equiv 0\,(I).$$

Поэтому

$$f_{10,4}^{5} + f_{10,4}^{1} \equiv 0\,(I).$$

5)
$$f_{10,5}^{1} = [f_{9,4}^{1} \cdot x] = [xy^3x^3y^2x],$$
$$f_{10,5}^{2} = [f_{9,4}^{2} \cdot x] = [yx^2yx^2y^3x],$$
$$f_{10,5}^{3} = [f_{9,4}^{4} \cdot x] = [xy^3x^2yxyx] \equiv 2f_{10,5}^{1} - 2f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{4} = [f_{9.4}^{5} \cdot x] = [xy^2xy^2x^2yx] \equiv -f_{10,5}^{1} - f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{5} = [f_{9.4}^{6} \cdot x] = [xy^2xyxy^2x^2] \equiv f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{6} = [f_{9.4}^{7} \cdot x] = [xy^3x^2y^2x^2] \equiv -2f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{7} = [f_{9,4}^{8} \cdot x[= [xy^2xy^2xyx^2[\equiv -f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{8} = [f_{9.4}^{9} \cdot x] = [xy^3xyxyx^2] \equiv 2f_{10,5}^{2}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{9} = [\overline{f_{9,4}^{1}} \cdot y] = [yx^3y^3x^2y],$$
$$f_{10,5}^{10} = [\overline{f_{9,4}^{2}} \cdot y] = [xy^2xy^2x^3y],$$
$$f_{10,5}^{11} = [\overline{f_{9.4}^{3}} \cdot y] = [xy^3x^3yxy] \equiv f_{10,5}^{9}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{12} = [\overline{f_{9,4}^{5}} \cdot y] = [yx^2yx^2y^2xy] \equiv -f_{10,5}^{9} = f_{10,5}^{10}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{13} = [\overline{f_{9,4}^{6}} \cdot y] = [yx^2yxyx^2y^2] \equiv f_{10,5}^{10}\,(I),$$
$$f_{10,5}^{14} = [\overline{f_{9,4}^{8}} \cdot y] = [yx^2yx^2yxy^2] \equiv -f_{10,5}^{10}\,(I).$$

Элементы $f_{10,5}^{1}$, $f_{10,5}^{2}$, $f_{10,5}^{9}$ и $f_{10,5}^{10}$ не являются независимыми по $\mathrm{mod}\, I$. Легко найти три соотношения (a), b) и c)), связывающие их. Действительно,

$$b_{([yx^2yx^2],x)} = [yx^2yx^2y^3x] + [yx^2yx^2y^2xy] + [yx^2yx^2yxy^2] + [yx^2yx^3y^3] \equiv 0\,(I),$$
$$[yx^2yx^3y^3] = [yxyx^4y^3] \equiv 0(I) \quad (1\text{—VI}).$$

Поэтому имеем:

$$f_{10,5}^{2} - f_{10,5}^{9} - 2f_{10,5}^{10} \equiv 0\,(I). \qquad \text{a)}$$

Далее, применяя III), убеждаемся в том, что

$$b'_{([xy^2xy^2],\, y)} = [xy^2xy^2x^3y] + [xy^2xy^2x^2yx] + [xy^2xy^2xyx^2] + \\ + [xy^2xy^3x^3] \equiv 0\,(I).$$

На основании V), последний член сравним с нулем. Отсюда получаем

$$f^1_{10,5} + 2f^2_{10,5} - f^{10}_{10,5} \equiv 0\,(I). \qquad \text{b)}$$

Из соотношения

$$b^1_{([xy^3],[xy^2])} = [xy^3\,[xy^2]x^3] + [xy^3x\,[xy^2]\,x^2] + [xy^3x^2\,[xy^2]\,x] - [xy^3x^3\,[xy^2]] \equiv \\ \equiv 2\,[xy^3xy^2x^3] - 2\,[xy^3xyxyx^2] + 2\,[xy^3x^2y^2x^2] - \\ - 2\,[xy^3x^2yxyx] + 2\,[xy^3x^3y^2x] - 2\,[xy^3x^3yxy] \equiv 0\,(I),$$

учитывая, что

$$[xy^3xy^2x^3] = [f^2_{7,2} \cdot x^3] \equiv 0\,(I),$$

получим

$$f^1_{10,5} + 2f^2_{10,5} + f^9_{10,5} \equiv 0\,(I). \qquad \text{c)}$$

Из a), b) и c) находим:

$$f^2_{10,5} \equiv - f^1_{10,5}\,(I),$$

$$f^9_{10,5} \equiv f^1_{10,5}\,(I),$$

$$f^{10}_{10,5} \equiv - f^1_{10,5}\,(I).$$

Таким образом,

$$\rho_{5+5} \leqslant 3\,(f^1_{10,4},\ \overleftarrow{f^1_{10,4}}\ \text{и}\ f^1_{10,5}).$$

Перепишем некоторые из $f^i_{10,5}$ выраженными уже только через $f^1_{10,5}$:

$$f^1_{10,5} = [xy^3x^3y^2x],$$

$$f^5_{10,5} = [xy^2xyxy^2x^2] \equiv - f^1_{10,5}\,(I),$$

$$f^{11}_{10,5} = [xy^3x^3yxy] \equiv f^1_{10,5}\,(I),$$

$$f^{13}_{10,5} = [yx^2yxyx^2y^2] \equiv - f^1_{10,5}\,(I).$$

Модуль L_{11}.

$$L_{11,4} = \{[L_{10,3} \cdot x],\ [L_{10,4} \cdot y]\};$$

$[L_{10,3} \cdot x] \equiv 0\,(I)$, также и $[L_{10,4} \cdot y] \equiv 0\,(I)$, так как

$$[f^1_{10,4} \cdot y] = [xy^3x^3y^4] \equiv 0\,(I),$$

где $f^1_{10,4}$ — единственный элемент, порождающий модуль $L_{10,4} - I_{5+5,4}$.

Итак,

$$L_{11,4} \equiv 0\,(I).$$

5) $$f^1_{11,5} = [f^1_{10,4} \cdot x] = [xy^3x^3y^3x],$$

$$f^2_{11,5} = [f^3_{10,4} \cdot x] = [xy^2xyxy^2xyx] \equiv 0\,(I),$$

$$f^3_{11,5} = [f^5_{10,4} \cdot x] = [xy^2xyxy^3x^2] \equiv - f^1_{11,5}\,(I),$$

$$f^4_{11,5} = [f^1_{10,5} \cdot y] \equiv [xy^3x^3y^2xy],$$

$$f^5_{11,5} = [f^5_{10,5} \cdot y] = [xy^2xyxy^2x^2y] \equiv - f^4_{11,5}\,(I),$$

$$f^6_{11,5} = [f^{11}_{10,5} \cdot y] = [xy^3x^3yxy^2] \equiv f^4_{11,5}\,(I),$$
$$f^7_{11,5} = [f^{13}_{10,5} \cdot y] = [yx^2yxyx^2y^3] \equiv -f^4_{11,5}\,(I).$$

Элементы $f^1_{11,5}$ и $f^4_{11,5}$ не являются независимыми. В самом деле, применяя I), получим:

$$b_{([xy^3x^3],x)} = [xy^3x^3y^3x] + [xy^3x^3y^2xy] + [xy^3x^3yxy^2] + [xy^3x^4y^3] \equiv 0\,(I).$$

Отсюда

$$f^1_{11,5} + 2f^4_{11,5} \equiv 0\,(I)$$

или

$$f^4_{11,5} \equiv 2f^1_{11,5}\,(I).$$

Следовательно,

$$\rho_{5+6} \leqslant 2\,(f^1_{11,5} \text{ и } \overline{f^1_{11,5}}).$$

Выпишем некоторые из $f^i_{11,5}$ в зависимости от одного $f^1_{11,5}$:

$$f^1_{11,5} = [xy^3x^3y^3x],$$
$$f^2_{11,5} = [xy^2xyxy^2xyx] \equiv 0\,(I),$$
$$f^3_{11,5} = [xy^2xyxy^3x^2] \equiv -f^1_{11,5}\,(I),$$
$$f^5_{11,5} = [xy^2xyxy^2x^2y] \equiv -2f^1_{11,5}\,(I),$$
$$f^7_{11,5} = [yx^2yxyx^2y^3] \equiv -2f^1_{11,5}\,(I).$$

Модуль L_{12}.

$$L_{12,5} = \{[L_{11,5} \cdot y],\ [L_{11,4} \cdot x]\},$$

$[L_{11,4} \cdot x] \equiv 0\,(I)$, а также и $[L_{11,5} \cdot y] \equiv 0\,(I)$, так как

$$[f^1_{11,5} \cdot y] \equiv 2\,[f^7_{11,5} \cdot y] = 2\,[yx^2yxyx^2y^4] \equiv 0\,(I),$$

где $f^1_{11,5}$ — единственный элемент, порождающий модуль $L_{11,5} - I_{5+6,5}$.

Следовательно,

$$L_{12,5} \equiv 0\,(I).$$

6)
$$f^1_{12,6} = [\overline{f^1_{11,5}} \cdot y] = [yx^3y^3x^3y^2],$$
$$f^2_{12,6} = [f^1_{11,5} \cdot x] = [xy^3x^3y^3x^2],$$
$$f^3_{12,6} = [f^7_{11,5} \cdot x] = [yx^2yxyx^2y^3x] \equiv -2f^2_{12,6}\,(I),$$
$$f^4_{12,6} = [\overline{f^2_{11,5}} \cdot y] = [yx^2yxyx^2yxy^2] \equiv 0\,(I),$$
$$f^5_{12,6} = [\overline{f^3_{11,5}} \cdot y] = [yx^2yxyx^3y^3] \equiv -f^1_{12,6}\,(I),$$
$$f^6_{12,6} = [\overline{f^5_{11,5}} \cdot y] = [yx^2yxyx^2y^2xy] \equiv -2f^1_{12,6}\,(I).$$

Используя I), легко убеждаемся в том, что элементы $f^1_{12,6}$ и $f^2_{12,6}$ связаны соотношением. В самом деле,

$$b_{([yx^2yxyx^2],\,x)} = [yx^2yxyx^3y^3] + [yx^2yxyx^2yxy^2] + {}$$
$$+ [yx^2yxyx^2y^2xy] + [yx^2yxyx^2y^3x] \equiv 0\,(I).$$

Отсюда получаем

$$f^1_{12,6} - f^2_{12,6} \equiv 0\,(I),$$

или

$$f^2_{12,6} \equiv f^1_{12,6}\,(I).$$

Поэтому

$$\rho_{5+7} \leqslant 1\,(f^1_{12,6}).$$

Модуль L_{13}.

$$L_{13,1} \equiv 0\,(I),\quad L_{13,2} \equiv 0\,(I),\quad L_{13,3} \equiv 0\,(I),\quad L_{13,4} \equiv 0\,(I),\quad L_{13,5} \equiv 0\,(I).$$

Остается исследовать лишь

$$L_{13,6} = \{[L_{12,6}\cdot y],\ [L_{12,5}\cdot x]\}.$$

Но $[L_{12,5}\cdot x] \equiv 0\,(I)$, также и $[L_{12,6}\cdot y] \equiv 0\,(I)$, так как

$$[f^1_{12,6}\cdot y] \equiv -[f^5_{12,6}\cdot y] = [yx^2yxyx^3y^4] \equiv 0\,(I),$$

где $f^1_{12,6}$ — единственный элемент, порождающий модуль $L_{12,6} - I_{5+7,6}$. Поэтому и $L_{13,6} \equiv 0\,(I)$.

Таким образом мы получили, что $L_{13} \equiv 0\,(I)$ и $\rho_{5+8} = 0$.

Очевидно и все $L_{5+i} \equiv 0\,(I)$ при $i > 8$.

Пользуясь случаем, отметим, что при помощи сложных выкладок, связанных с получением независимого базиса модулей L_i ($i = 5, 6, \ldots, 11$), вычислены точные значения ρ_{5+i} ($i = 0, 1, \ldots, 6$), совпадающие с найденными здесь максимальными их значениями. Лишь для ρ_{5+7} остаются возможными два значения: 0 и 1.

Таким образом, имеем:

$$\lambda_5 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \sum_{i=0}^{m} \rho_{5+i} \leqslant 34.$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы и следствия, очевидного на основании сказанного во введении.

ТЕОРЕМА. *Нилькольцо Ли L_1 показателя 5 с двумя свободными образующими x и y и областью операторов — полем характеристики 5 нильпотентно и конечно; порядок его $h \leqslant 5^{34}$.*

Следствие. *Пусть F — максимальная периодическая с периодом $p = 5$ группа, порожденная двумя образующими, $F_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — i-й член убывающего центрального ряда группы F.*

Тогда максимальная нильпотентная периодическая группа $F_0 = F/F_\infty$ будет конечной и ее порядок $f \leqslant 5^{34}$ (положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для данного случая).

Поступило
19.X. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Magnus W., Neuere Ergebnisse über auflösbare Gruppen, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 47 (1937), 69—78.

[2] Magnus W., Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 142—149.

[3] Zassenhaus H., Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 13 (1939), 1—100.

[4] Grün O., Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 158—177.

[5] Санов И. Н., Связь между периодическими группами и кольцами Ли, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 23—58.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 245—270

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ВАРИАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. МЕТОД СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ И МАЖОРАНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(*Представлено академиком* **А. А. Дородницыным**)

Вопрос о зависимости различных элементов решений краевых задач от области имеет важное значение. В настоящей работе этот вопрос рассматривается в применении к системе дифференциальных уравнений теории кручения валов переменного сечения.

В работе ставится вопрос о характере изменений некоторых интегральных характеристик краевых задач теории кручения валов переменного сечения в зависимости от изменений области и краевых условий. В качестве ответа на этот вопрос при помощи теоремы о сохранении области для эллиптических систем дифференциальных уравнений, установленной нами ранее [см. ([1]), ([2])], доказывается ряд вариационных теорем. Из этих теорем, в частности, получается закон затухания, известный в теории кручения валов как экспериментальный принцип, являющийся результатом многочисленных наблюдений [см. ([3])].

На основе установленных вариационных теорем и непосредственного использования указанной выше теоремы о сохранении области, аналогично тому, как это было сделано в теории фильтрации [см. ([4]), ([5])], дается новый метод решения задач теории валов переменного сечения — метод мажорантных областей, позволяющий для довольно широкого класса задач, решение которых неизвестно, находить приближенные значения величин, представляющих непосредственный интерес, с указанием для истинных значений этих величин оценок сверху и снизу.

В качестве примеров на предлагаемый метод приводится количественная характеристика известного принципа Сен-Венана для одного частного случая кручения цилиндрического вала конечной длины, и затем рассматриваются задачи об определении максимальных напряжений на боковой поверхности цилиндрического вала с кольцевыми выточками гиперболической и круговой форм.

§ 1. Комплексный потенциал напряжений. Вариация комплексного потенциала

Общие уравнения равновесия упругого изотропного тела при отсутствии объемных сил в цилиндрической системе координат r, θ, z (рис. 1)

имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r},\quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r},\quad \gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta},
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=\lambda\vartheta+2\mu\varepsilon_r,\quad \tau_{r\theta}=\mu\gamma_{r\theta},\\
&\sigma_\theta=\lambda\vartheta+2\mu\varepsilon_\theta,\quad \tau_{rz}=\mu\gamma_{rz},\\
&\sigma_z=\lambda\vartheta+2\mu\varepsilon_z,\quad \tau_{\theta z}=\mu\gamma_{\theta z},
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

где σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений, ε_r, ε_θ, ε_z, $\gamma_{r\theta}$, γ_{rz}, $\gamma_{\theta z}$ — компоненты тензора деформаций, u, v, w — компоненты вектора смещений, соответственно, в направлениях осей r, θ и z, λ и μ — постоянные Ляме, $\vartheta=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z$ [см. ([6])].

Рис. 1

В случае кручения валов, симметричных относительно оси z при переменном диаметре и при симметричном загружении относительно оси вращения, как известно, полагают [см. ([6]), ([7])]:

$$u=0,\quad w=0,\quad v=v(r,z).\tag{4}$$

При этом первые два из уравнений (1) обращаются в тождества, а третье из них и уравнения (2) и (3) дают:

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0,\tag{5}$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r},\quad \gamma_{z\theta}=\frac{\partial v}{\partial z},\quad \tau_{r\theta}=\mu\gamma_{r\theta},\quad \tau_{z\theta}=\mu\gamma_{z\theta},\tag{6}$$

$$\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=\varepsilon_z=\gamma_{rz}=\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{rz}=0.\tag{7}$$

Уравнения (5), (6), (7) представляют собой полную систему дифференциальных уравнений кручения валов переменного сечения.

Из уравнений (5) и (6) следуют равенства:

$$\begin{aligned}
&\tau_{r\theta}=\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z},\\
&\tau_{z\theta}=\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r},
\end{aligned}\tag{8}$$

где $\varphi=\frac{v}{r}$ — так называемая функция перемещений, ψ — функция напряжений.

Пусть C — кривая в плоскости $Z=r+iz$ $(\mathrm{Re}\,Z>0)$, s — длина дуги кривой C, отсчитываемая в направлении положительного ее обхода, n —

правая нормаль к C, v_n и v_s — проекции вектора касательных напряжений $\vec{v}=\tau_{r\theta}+i\tau_{z\theta}$ на n и, соответственно, на положительное направление касательной (рис. 2); тогда в соответствии с равенствами (8) будем иметь:

$$v_n=\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial s},\qquad v_s=\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial n}. \tag{9}$$

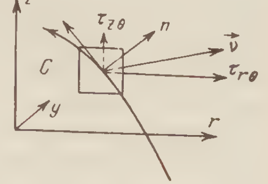


Рис. 2

Введем функцию комплексного переменного

$$w=w(Z)=\varphi+i\psi, \tag{10}$$

вещественная и мнимая части которой как функции от $Z=r+iz$ ($\operatorname{Re}Z>0$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{11}$$

Функцию, определенную равенствами (10) и (11), будем называть комплексным потенциалом напряжений, а функцию перемещений φ и функцию напряжений ψ, следуя аналогии с теорией фильтрации [см. ([2])], будем называть, соответственно, потенциальной функцией и функцией тока.

Комплексный потенциал напряжений вместе с равенствами (7) полностью определяют все элементы напряженного состояния. Так, для вектора напряжений $\vec{v}=\tau_{r\theta}+i\tau_{z\theta}$, вектора деформаций $\gamma_{r\theta}+i\gamma_{z\theta}$, потенциальных линий — линий постоянного угла поворота и линий тока, соответственно, будут иметь место равенства:

$$\vec{v}=\tau_{r\theta}+i\tau_{z\theta}=\mu(\gamma_{r\theta}+i\gamma_{z\theta})=\mu r\nabla\varphi=-\frac{i}{r^2}\nabla\psi,\qquad \varphi=\text{const},\quad \psi=\text{const}. \tag{12}$$

Для приращения угла поворота φ_C вдоль кривой C и для момента M_C относительно оси z сил, действующих на кривую C со стороны ее правой нормали n, будут иметь место равенства:

$$\varphi_C=[\varphi]_C,\qquad M_C=[\psi]_C. \tag{13}$$

На потенциальных линиях и, соответственно, на линиях тока будут справедливы равенства

$$\vec{v}=e^{i\alpha}\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial n}=e^{i\alpha}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial s},\qquad \vec{v}=e^{i\beta}\mu r\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-e^{i\beta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial n}, \tag{14}$$

где α — угол, составленный с осью r правой нормалью n к потенциальной линии, β — угол, составленный с осью r положительным направлением касательной к линии тока.

Исходя из физических соображений, можно считать возможными три случая контурных условий для определения комплексного потенциала напряжений:

1) если боковая поверхность вала, образованная вращением кривой C вокруг оси z, свободна от внешних усилий, то кривая C будет линией тока, т. е. $\psi|_C = \text{const}$;

2) если на указанной боковой поверхности угол поворота неизменный, то линия C будет потенциальной линией, т. е. $\varphi|_C = \text{const}$;

3) указанная выше боковая поверхность не является свободной от внешних усилий и не является поверхностью, на которой угол поворота постоянный. Тогда линия C будет линией, на которой заданы или переменные значения потенциальной функции — переменный угол поворота, или заданы переменные значения функции тока — переменные значения момента внешних усилий относительно оси z. В этом случае кривую G будем называть, соответственно, кривой переменного потенциала или кривой переменного значения функции тока.

Пусть G — область в плоскости $Z = r + iz$ $(\operatorname{Re} Z > 0)$, ограниченная кусочно-гладким контуром L, являющаяся осевым сечением вала. Условимся такую область G называть областью напряжений. Очевидно, что решение задачи о кручении вала сводится к нахождению комплексного потенциала напряжений $w = \varphi + i\psi$ по контурным условиям указанных выше трех типов, заданных на границе L области G. В частности, если вал сплошной, то в состав границы L входит отрезок оси z, и этот отрезок будет линией тока, так как на оси z

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

В силу установленной нами теоремы о сохранении области [см. ([1]), ([2])], можно утверждать, что образом области G в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ будет некоторая область T — годограф комплексного потенциала напряжений.

Пусть G_1 — область напряжений, получающаяся из G путем вариации ее границы, такая, что $G_1 \subset G$, g_1 — образ G_1 в плоскости w, $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ — комплексный потенциал напряжений, соответствующий области G_1, T_1 — годограф комплексного потенциала w_1, $\vec{v}_1$ — вектор касательных напряжений, соответствующий области G_1, и вообще все величины, взятые с индексом 1 снизу, означают, что они соответствуют области напряжений G_1.

Введем, по аналогии с тем, как это было сделано нами в теории фильтрации [см ([2]), ([4])], функцию комплексного переменного

$$\omega = \omega(Z) = w_1 - w = \sigma + i\tau, \tag{15}$$

называемую в дальнейшем вариацией комплексного потенциала напряжений.

Вариация комплексного потенциала как функция от $Z = r + iz$ в области G_1 будет удовлетворять системе дифференциальных уравнений (11), а как функция от $w = \varphi + i\psi$ в области g_1 она удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = \frac{\partial\tau}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\psi} = -\frac{1}{\mu^2 r^6}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}. \tag{16}$$

Следовательно, по теореме о сохранении области [см. (²)], образом области G_1 или, что все равно, образом области g_1 в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ будет некоторая область Ω — годограф вариации комплексного потенциала.

Вдоль линий, являющихся одновременно потенциальными линиями для начального и измененного напряженных состояний (соответствующих G и G_1), в силу (14), будем иметь:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = r^2 (\vec{v}_1 - \vec{v})\, e^{-i\alpha}. \tag{17}$$

Точно так же вдоль линий тока, общих для начального и измененного напряженных состояний,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{1}{\mu r} (\vec{v}_1 - \vec{v})\, e^{-i\beta}. \tag{18}$$

То обстоятельство, что образом области напряжений G_1 в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ будет область в сочетании с частично известными контурными условиями для вариации комплексного потенциала напряжений, позволяет изучить характер изменения вектора напряжений, линий тока и потенциальных линий в зависимости от всевозможных изменений области напряжений. При таком изучении представляют интерес несколько возможных общих случаев краевых условий.

§ 2. Вариационные теоремы кручения валов для области напряжений, ограниченной двумя линиями тока и двумя потенциальными линиями

Схема области напряжений G, ограниченной двумя линиями тока и двумя потенциальными линиями, представлена на рис. 3.

Краевые условия имеют вид:

$$\varphi\,|_{AB} = h' = \text{const}, \quad \varphi\,|_{DC} = h'' = \text{const}, \quad \psi\,|_{AD} = M' = \text{const}, \quad \psi\,|_{BC} = M'' = \text{const}, \tag{19}$$

где $h'' - h' = H$ — угол поворота потенциальной линии DC относительно потенциальной линии AB, $M'' - M' = M$ — момент относительно оси z сил, приложенных к потенциальной линии DC со стороны ее правой нормали, т. е. внешних сил, приложенных к поверхности, образованной вращением линии DC вокруг оси z. Без ограничения общности, будем считать в дальнейшем, что $h' = 0$ и $H > 0$, так как этим условиям всегда можно удовлетворить путем соответствующего расположения скручиваемого вала относительно системы координат. Условимся называть величину H суммарным углом поворота, величину M — суммарным скручивающим моментом, линию AB — закрепленной потенциальной линией, линию DC — свободной потенциальной линий. Далее, через L' будем обозначать совокупность линий, отличных от линий тока, входящих в состав границы L области напряжений G, через L_1' — то же самое, но в применении к об-

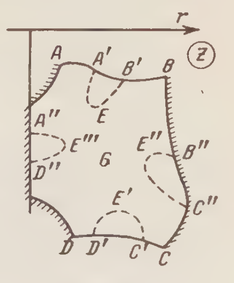


Рис. 3

ласти напряжений G_1. При сравнении линий тока в области напряжений G и в области напряжений G_1 под соответствующими друг другу линиями тока будем понимать такие линии тока, которым соответствует одна и та же постоянная, т. е. $\psi = \psi_1 = \text{const}$.

При рассмотрении соответствия между плоскостями Z, w и ω точки в плоскости Z будем обозначать прописными буквами, а соответствующие им точки в плоскости w — теми же, но только строчными буквами, а в плоскости ω — теми же строчными буквами с индексом 2 снизу.

Пусть в дальнейшем суммарный скручивающий момент M остается неизменным, тогда при изменении области напряжений G за счет смещения какой-либо из точек A, B, C, D вдоль границы области G имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *При уменьшении потенциальной линии:*

а) $H_1 > H$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *в* $G_1 + L_1$ *вне закрепленной части* $L_1' L'$, *если уменьшается закрепленная потенциальная линия, если же уменьшается свободная потенциальная линия, то* $\varphi_1 > \varphi$ *на неизменной ее части и на неизменной линии тока и* $\varphi_1 < \varphi$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока*;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, на неизменной линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии;**

г) *линии тока в* $G_1 + L'$ *отодвигаются от увеличенной линии тока, если считать, что последняя соответствует самой себе.*

В самом деле, пусть уменьшается линия AB за счет смещения точки A в положение точки A' (см. рис. 3). Годографы T и T_1 в этом случае будут иметь вид, указанный, соответственно, на рис. 4 и 5. В плоскости

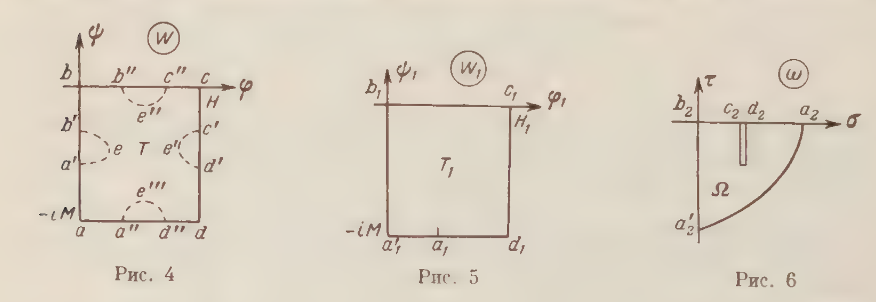


Рис. 4 Рис. 5 Рис. 6

$\omega = \sigma + i\tau$ образы BC и AD будут на вещественной оси, образ $A'B$ — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ AA' — кривая в четвертой четверти плоскости, монотонная по σ и τ. Годограф Ω, удовлетворяющий всем этим условиям, с точностью до топологических преобразований, не нарушающих этих условий, представлен на рис. 6. Из рас-

* Неравенства для величин скоростей здесь, как и в последующих теоремах, в отдельных точках не исключают вырождения их в равенства.

смотрения Ω следуют неравенства:

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L_1 \text{ вне } A'B, \ \psi_1 < \psi \text{ в } G_1 + L',$$
$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{A'B} > 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{BC} > 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} > 0 \text{ вблизи } C,$$
$$\left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{AD} < 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } D.$$

Эти неравенства в соответствии с формулами (17) и (18) означают справедливость утверждений теоремы при смещении точки A. Пусть теперь точка B смещается в положение точки B' (см. рис. 3); тогда в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы AD и BC будут на вещественной оси, образ AB' — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $B'B$ — кривая в первой четверти плоскости, монотонная по σ и τ. Построив по этим данным годограф Ω, приходим к неравенствам:

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L_1 \text{ вне } AB', \ \psi_1 > \psi \text{ в } G_1 + L',$$
$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB'} > 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{AD} > 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} > 0 \text{ вблизи } D,$$
$$\left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{BC} < 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } C,$$

означающим справедливость утверждений теоремы при смещении точки B.

Пусть теперь уменьшается свободная потенциальная линия DC за счет смещения точки C в положение точки C' (рис. 3). Тогда в плоскости ω образы BC и AD будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ DC' — на вертикальной прямой, образ $C'C$ — кривая в верхней полуплоскости, монотонная по σ и τ и лежащая слева от указанной вертикальной прямой. Годограф Ω, удовлетворяющий всем этим условиям, с точностью до топологических преобразований, не нарушающих этих условий, представлен на рис. 7. Из рассмотрения Ω следую неравенства:

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ на } AD, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ на } BC,$$
$$\psi_1 > \psi \text{ в } G_1 + L', \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC'} > 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{AD} > 0,$$
$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} > 0 \text{ вблизи } A,$$
$$\left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{BC} < 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } B.$$

Рис. 7

При смещении точки D в положение точки D' (рис. 3) в плоскости ω образы BC и AD попрежнему будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ $D'C$ — на вертикальной прямой, образ DD' — кривая в нижней полуплоскости, монотонная по σ и τ и лежащая слева от указанной вертикальной прямой. Построив по этим данным годограф Ω, так же как и в предыдущем случае, приходим к неравенствам:

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ на } BC, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ на } AD, \quad \psi_1 < \psi \text{ в } G_1 + L',$$
$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} > 0 \text{ вблизи } B, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } A, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{D'C} > 0,$$
$$\left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{BC} > 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{AD} < 0,$$

полностью завершающим доказательство теоремы 1.

При уменьшении области напряжений G за счет произвольных вдавливаний одной из потенциальных линий или одной из линий тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C, D, имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *При вдавливании потенциальной линии*:

а) $H_1 < H$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1$ *вне закрепленной части* $L_1' L'$, *если вдавливается закрепленная потенциальная линия, если же вдавливается свободная потенциальная линия, то* $\varphi_1 < \varphi$ *на неизменной части ее, на одной из линий тока и вблизи конца другой линии тока, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и* $\varphi_1 > \varphi$ *вне концов на вдавленной части потенциальной линии;*

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и на одной из линий тока, и, кроме того, на другой линии тока* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *или* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вблизи другого ее конца, причем на неизменной потенциальной линии в первом случае будет* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи концов и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вне ее концов, а во втором случае имеем* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи конца ее, примыкающего к линии тока, на которой* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$, *и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вблизи другого ее конца.*

ТЕОРЕМА 3. *При вдавливании линии тока*:

а) $H_1 > H$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *на неизменной линии тока и на неизменной части вдавливаемой линии тока со стороны свободной потенциальной линии и* $\varphi_1 < \varphi$ *на неизменной части последней со стороны закрепленной потенциальной линии*;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях*;

г) *линии тока в* $G_1 + L'$ *отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

В самом деле, пусть вдавливается линия $A'B'$, т. е. часть закрепленной потенциальной линии AB (рис. 3). Область g_1 в этом случае будет ограничена контуром $aa'eb'bcda$ (рис. 4). В плоскости ω образы BC и AD будут на вещественной оси, образы AA' и $B'B$ — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $A'EB'$ — в левой полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω, приходим к утверждениям теоремы 2, соответствующим вдавливанию закрепленной потенциальной линии AB. Если вдавливается часть свободной потенциальной линии $D'C'$ (рис. 3), то годограф Ω в плоскости вариации комплексного потенциала будет иметь вид, представленный на рис. 8, где существенно то, что сдвоенный отрезок a_2b_2 может оказаться целиком лежащим или в верхней, или в нижней полуплоскостях. Учитывая это, приходим к утверждениям теоремы 2 в общем случае.

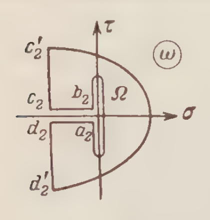


Рис. 8

Пусть вдавливается часть линии тока $A''D''$ (рис. 3). В этом случае область g_1 будет ограничена контуром $abcd''e'''a''a$ (рис. 4), а годограф Ω имеет вид, представленный на рис. 9. Из рассмотрения этого годографа следуют неравенства:

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ на } BC,\ D''D, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ на } AA'',\ \psi_1 < \psi \text{ в } G_1 + L',$$

$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} > 0 \text{ вблизи } B, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } A, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} > 0 \text{ вблизи } D,$$

$$\left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } C, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{BC} > 0,$$

$$\left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{D''D} < 0, \quad \left.\frac{d\tau}{ds}\right|_{AB} > 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{ds}\right|_{AA''} < 0.$$

Эти неравенства означают справедливость теоремы 3 при вдавливании линии тока AD.

Пусть теперь вдавливается линия $B''C''$ (рис. 3). Здесь область g_1 будет ограничена контуром $abb''e''c''cda$ (рис. 4). В плоскости ω образы BB'', $C''C$, AD будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $B''E''C''$ — кривая в верхней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω в плоскости ω, приходим к неравенствам, аналогичным предыдущим и полностью завершающим доказательство теоремы 3.

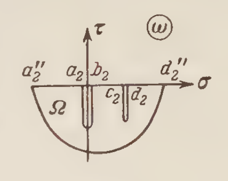


Рис. 9

Пусть в дальнейшем величина H остается неизменной, тогда при изменении области напряжений G за счет смещения какой-либо одной из точек A, B, C, D вдоль границы области или за счет вдавливания одной из граничных потенциальных линий и линий тока, но при неизменных точках их раздела, имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1а. *При уменьшении потенциальной линии:*

а) $M_1 < M$;

б) *в* $G_1 + L_1 - L_1'L'$ *будет* $\varphi_1 > \varphi$, *если уменьшается закрепленная потенциальная линия, и* $\varphi_1 < \varphi$, *если уменьшается свободная потенциальная линия*;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока*;

г) *линии тока в* $G_1 + L_1$ *отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

ТЕОРЕМА 2а. *При вдавливании потенциальной линии:*

а) $M_1 > M$;

б) *в* $G_1 + L_1 - L_1'L'$ *будет* $\varphi_1 > \varphi$, *если вдавливается свободная потенциальная линия, и* $\varphi_1 < \varphi$, *если вдавливается закрепленная потенциальная линия*;

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока.*

ТЕОРЕМА 3а. *При вдавливании линии тока:*

а) $M_1 < M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока со стороны свободной потенциальной линии и* $\varphi_1 < \varphi$ *на неизменной части ее со стороны закрепленной потенциальной линии;*

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока и на одной из потенциальных линий и, кроме того, на другой потенциальной линии* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *или* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи конца ее, примыкающего к вдавливаемой линии тока, и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вблизи другого ее конца, причем на неизменной линии тока в первом случае будет* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи концов и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вне концов, а во втором случае* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи конца ее, примыкающего к потенциальной линии, на которой* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$, *и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вблизи другого ее конца;*

г) *линии тока в* $G_1 + L_1$ *отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

Доказательство теорем 1а, 2а, 3а получается точно так же, как и доказательство теорем 1, 2, 3. Так, например, справедливость утверждений последних пунктов теорем 1а и 3а следует из того, что при смещении точки C в положение C' (рис. 3), при смещении точки B в положение точки B' и при вдавливании линии тока BC соответствующие годографы Ω будут лежать в верхней полуплоскости ω, а при смещении точек A и D, соответственно, в положение точек A' и D' и при вдавливании линии тока AD (рис. 3) соответствующие годографы Ω будут лежать в нижней полуплоскости $\omega = \sigma + i\tau$.

§ 3. Вариационные теоремы кручения валов для области напряжений, ограниченной двумя линиями тока и одной потенциальной линией

Общую схему области напряжений G, ограниченной двумя линиями тока и одной потенциальной линией, без ограничения общности можем считать совпадающей со схемой, представленной на рис. 3, при условии, что точка C совпадает с точкой D. Контурные условия имеют вид:

$$\varphi|_{AB} = h' = \text{const}, \quad \varphi|_D = h'' = +\infty, \quad \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \\ \psi|_{BD} = M'' = \text{const}, \tag{20}$$

где $h' = 0$, $M'' - M' = M$ — то же, что и в § 2. Годограф T в плоскости $w = \varphi + i\psi$ имеет вид, указанный на рис. 10.

Пусть в дальнейшем суммарный скручивающий момент M остается неизменным; тогда при изменении области напряжений G за счет смещения какой-либо из точек A, B, D, т. е. при неизменной области G, но при переменных точках раздела граничных линий тока и потенциальной линии, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *При уменьшении потенциальной линии:*

а) $u_1 > u$ *в* $G_1 + L_1 - L_1'$;

б) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной части потенциальной линии и на неизменной линии тока и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока;*

в) *линии тока в* $G_1 + L_1'$ *отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе. При смещении, точки раздела линий тока:*

а') $u_1 > u$ *на неизменной части уменьшаемой линии тока и* $u_1 < u$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока;*

б') $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной части уменьшаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии;*

в') *линии тока в* $G_1 + L_1'$ *отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

В самом деле, пусть потенциальная линия уменьшается за счет смещения точки B в положение точки B' (рис. 3). Тогда годограф Ω будет

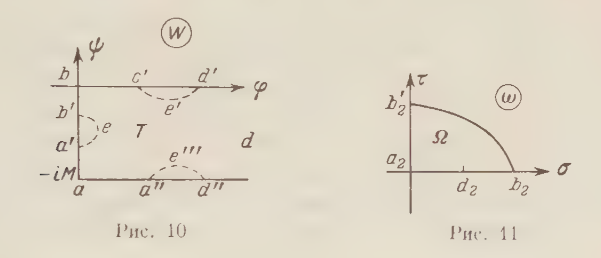


Рис. 10

Рис. 11

иметь вид, указанный на рис. 11, где существенным является то, что, в силу ограниченности τ, точка d_2 лежит в конечной части плоскости, а кривая $b_2' b_2$ будет монотонной по σ и τ. Отсюда следует справедливость утверждений теоремы в случае смещения точки B. В случае уменьшения потенциальной линии за счет смещения точки A в положение точки A' (рис. 3), построив годограф Ω, приходим к неравенствам:

$$u_1 > u \text{ в } G_1 + L_1 - L_1', \quad \frac{d\tau}{ds}\Big|_{A'B} > 0, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{BD} > 0, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{AD} < 0,$$

соответствующим утверждениям теоремы. При смещении точки D в положение точки D' (рис. 3) в плоскости ω образ AB будет на мнимой оси, образы BD', AD — на вещественной оси, образ DD' — на горизонтальной прямой $\tau = \text{const}$. Построив по этим данным годограф Ω, приходим к неравенствам, аналогичным предыдущим и завершающим доказательство теоремы.

При изменении области напряжений G за счет произвольных вдавливаний одной из граничных линий тока или потенциальной линии при неизменных точках их раздела A, B, D имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *При вдавливании потенциальной линии:*

а) $u_1 < u$ *в* $G_1 + L_1 - L_1' L'$;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части потенциальной линии и на одной из линий тока и, кроме того, на другой линии тока* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *или* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *вблизи ее конца, примыкающего к потенциальной линии, и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *вблизи другого ее конца.*

ТЕОРЕМА 3. *При вдавливании линии тока:*

а) $u_1 > u$ *на неизменной линии тока и на примыкающей к ней неизменной части вдавливаемой линии тока и* $u_1 < u$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока, примыкающей к потенциальной линии;*

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии;*

в) *линии тока в* $G_1 + L_1'$ *отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

В самом деле, при вдавливании части потенциальной линии $A'B$ (рис. 3) область g_1 в плоскости w будет ограничена контуром $adbb'ea'a$ (рис. 10), а в плоскости ω образы AD, BD будут на вещественной оси, образы AA', $B'B$ — на мнимой оси, образ $A'EB'$ — в левой полуплоскости. Рассмотрев годограф Ω, удовлетворяющий этим условиям, приходим к утверждениям теоремы 2. При вдавливании части линии тока $A''D''$ (рис. 3) область g_1 в плоскости w будет ограничена контуром $aa''e'''d''dba$ (рис. 10), а в плоскости ω образы AA'', $D''D$, DB будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ $A''E'''D''$ — в нижней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω, приходим к утверждениям теоремы 3, соответствующим вдавливанию линии тока AD. Так же убеждаемся в справедливости этой теоремы при вдавливании линии тока BD.

§ 4. Вариационные теоремы кручения валов для области напряжений, ограниченной двумя линиями тока

Общую схему области напряжений G, ограниченной двумя линиями тока, без ограничения общности можно считать совпадающей со схемой, представленной на рис. 3, при условии, что точки B и C совпадают, соответственно, с точками A и D. Контурные условия имеют вид:

$$\varphi|_A = h' = -\infty, \quad \varphi|_D = h'' = +\infty, \quad \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \\ \psi|_{AB''D} = M'' = \text{const}, \tag{21}$$

где $h' = -\infty$, $h'' = +\infty$, $M'' - M' = M$ — то же, что и в § 2. Годограф T в плоскости $w = \varphi + i\psi$ имеет вид полосы, указанной на рис. 12.

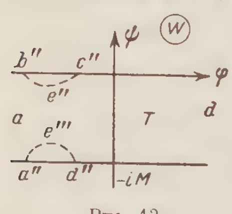


Рис. 12

Пусть в дальнейшем, как и в предыдущем параграфе, суммарный скручивающий момент M остается неизменным. Тогда при изменении области напряжений G за счет смещения одной из точек раздела граничных линий тока вдоль границы области имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *При смещении точки раздела линий тока:*

а) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной части уменьшаемой линии тока и* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части увеличиваемой линии тока;*

б) *линии тока в* G_1 *пододвигаются к уменьшенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

В самом деле, пусть точка A смещается в положение точки A''

(рис. 3); тогда в плоскости ω образы $A''D$ и $AB''D$ будут на вещественной оси, образ AA'' — на горизонтальной прямой $\tau = \text{const}$. Построив по этим данным годограф Ω, получаем неравенства:

$$\psi_1 > \psi \text{ в } G_1, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{A''D} > 0, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{AB''D} < 0,$$

означающие справедливость утверждения теоремы при смещении точки A в положение точки A''. Так же убеждаемся в справедливости теоремы в общем случае.

Пусть точки раздела граничных линий тока остаются неизменными, тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. *При вдавливании линии тока:*

а) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на неизменной части вдавливаемой линии тока и* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на неизменной линии тока*;

б) *линии тока в* G_1 *отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.*

В самом деле, пусть вдавливается линия $A''D''$, т. е. часть линии тока AD (рис. 3). Область g_1 в плоскости w в этом случае будет ограничена контуром $aa''e'''d''db''a$ (рис. 12). В плоскости ω образы AA'', $D''D$, $AB''D$ будут на вещественной оси, образ $A''E'''D''$ — в нижней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω, получаем неравенства:

$$\psi_1 < \psi \text{ в } G_1, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{AA''} < 0, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{D''D} < 0, \quad \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{AB''D} > 0,$$

означающие справедливость теоремы 2 при вдавливании линии тока AD. Так же убеждаемся в справедливости этой теоремы в общем случае, т. е. при вдавливании линии тока $AB''D$.

§ 5. Некоторые вариационные теоремы кручения валов для области напряжений, содержащей в составе своей границы линии переменного потенциала

Установим характер изменения основных характеристик напряженного состояния для области напряжений, содержащей в составе своей границы линии переменного потенциала, при замене ее одной из областей напряжений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

1. Область напряжений, ограниченная двумя линиями тока и одной линией переменого потенциала. Общую схему такой области напряжений G без ограничения общности можно считать совпадающей со схемой, представленной на рис. 3, при условии, что точка C совпадает с точкой D. Контурные условия будут иметь вид:

$$\varphi|_{AB} = h'(s), \quad \varphi|_D = h'' = +\infty, \quad \psi|_{AD} = M' = \text{const},$$
$$\psi|_{BD} = M'' = \text{const}, \tag{22}$$

где $M'' - M' = M$ — то же самое, что и в § 3, $h'(s)$, $h'(0) = 0$ — функция длины дуги s линии переменного потенциала AB, отсчитываемой от точки A, $m'(s) = \psi|_{AB}$ — значения функции тока на линии переменного потенциала AB.

При неизменном значении суммарного скручивающего момента M имеет место

ТЕОРЕМА 1. *При замене линии переменного потенциала при монотонном $h'(s)$ * потенциальной линией $\varphi|_{AB}=0$:*

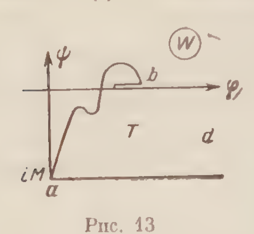


Рис. 13

а) $\varphi_1<\varphi$, в G_1+L_1, если $h'(s)$ возрастает, и $\varphi_1>\varphi$, если $h'(s)$ убывает, разность $\varphi_1-\varphi$ монотонна на L_1-L_0;

б) $|\vec{v}_1|<|\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$ и если при этом $m'(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1|>|\vec{v}|$ — на другой линии тока.

В самом деле, при $h'(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис 13. В плоскости ω образы AD, BD будут на вещественной оси, образ AB — кривая в левой полуплоскости, монотонная по переменной τ. Построив по этим данным годограф Ω, в соответствии с формулами (17), (18), приходим к утверждениям теоремы. Так же убеждаемся в справедливости этой теоремы при $h'(s)$ убывающем.

ТЕОРЕМА 2. *При увеличении $m'(s)$ за счет положительного монотонно возрастающего слагаемого* **:

а) $M_1>M$;

б) *при монотонном $h'(s)$ $|\vec{v}_1|>|\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, а при монотонном $m'(s)$ $|\vec{v}_1|>|\vec{v}|$ на обеих линиях тока.*

В самом деле, в плоскости ω образ BD будет на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ AB — кривая, монотонная по переменной τ. Отсюда, в силу формулы (18), следуют утверждения теоремы.

2. **Область напряжения, ограниченная двумя линиями тока, одной потенциальной линией и одной линией переменного потенциала.** Схема такой области напряжений представлена на рис. 3, где AD, BC — линии тока, AB — потенциальная линия, DC — линия переменного потенциала. Контурные условия имеют вид:

$$\varphi|_{AB}=h'=0,\ \varphi|_{DC}=h''(s),\ \ \psi|_{AD}=M'=\text{const},\ \ \psi|_{BD}=M''=\text{const}, \quad (23)$$

где $M''-M'=M$ — то же самое, что и в п. 1 ($M>0$), $h''(s)>0$ — функция длины дуги s линии переменного потенциала DC, отсчитываемой от точки D, $m''(s)=\psi|_{DC}$ — значения функции тока на линии переменного потенциала DC.

При неизменном значении M имеет место

---

* Здесь и во всем дальнейшем, когда говорится о монотонности, возрастании и убывании функций $h'(s)$ и $m'(s)$, предполагается, что это относится ко всей линии переменного потенциала AB.

** Это значит, что к линии переменного потенциала прилагаются добавочные внешние усилия с отрицательным моментом относительно оси Z.

ТЕОРЕМА 1. *При замене линии переменного потенциала при монотонном* $h''(s)$ * *потенциальной линией* $\varphi|_{DC} = h'' = \text{const}$:

а) $\varphi_1 > \varphi$ *на линии тока наименьшего значения* $h''(s)$ *и* $\varphi_1 < \varphi$ *на другой линии тока*;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на линии тока наибольшего значения* $h''(s)$ *и вблизи ее конца на потенциальной линии*, $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на потенциальной линии вблизи другого ее конца и если при этом* $m''(s)$ *монотонно, то* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего значения* $h''(s)$.

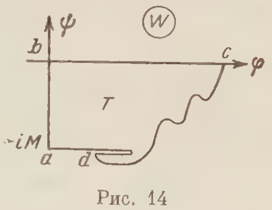


Рис. 14

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 14. В плоскости ω образы BC, AD будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси. Отсюда, в соответствии с формулами (17), (18), следуют утверждения теоремы при $h''(s)$ возрастающем. Так же убеждаемся в справедливости теоремы при $h''(s)$ убывающем.

ТЕОРЕМА 2. *При замене линии переменного потенциала при монотонном* $h''(s)$ *потенциальной линией* $\varphi|_{DC} = \max\limits_{DC} h''(s)$:

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - AB$,

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на потенциальной линии и вблизи концов на линиях тока*, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на линии тока наибольшего значения* $h''(s)$ *вблизи конца ее, примыкающего к линии переменного потенциала, и если при этом* $m''(s)$ *монотонно, то* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего значения* $h''(s)$.

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 14, а годограф Ω представлен на рис. 15. Из рассмотрения этих годографов при $h''(s)$ возрастающем, а также и при $h''(s)$ убывающем, следует справедливость теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. *При замене линии переменного потенциала при монотонном* $h''(s)$ *потенциальной линией* $\varphi|_{DC} = \min\limits_{DC} h''(s)$:

а) $M_1 < M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - AB$;

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на линии тока наибольшего значения* $h''(s)$, *на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока и если при этом* $m''(s)$ *монотонно, то* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на последней линии тока вблизи ее конца, примыкающего к линии переменного потенциала.*

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T представлен на рис. 14, а в плоскости ω образ BC будет на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ AB — на мнимой оси, образ DC — кривая во второй четверти плоскости, монотонная по φ. Отсюда, в соответствии с формулами (17) и (18), приходим к утверждениям теоремы при $h''(s)$ возрастающем. Так же убеждаемся в справедливости этой теоремы при $h''(s)$ убывающем.

* Здесь и в дальнейшем, когда говорится о монотонности, возрастании и убывании функций $h''(s)$ и $m''(s)$, предполагается, что это относится ко всей линии переменного потенциала DC.

ТЕОРЕМА 4. *При увеличении $h''(s)$ за счет положительного монотонного слагаемого $h''_0(s)$:*

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - AB$;

в) *при монотонном* $h''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока, а при монотонном* $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наибольшего значения* $h''_0(s)$, *на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока.*

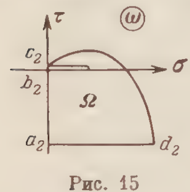


Рис. 15

В самом деле, при $h''_0(s)$ убывающем годограф Ω будет иметь вид, указанный на рис. 15. Из рассмотрения этого годографа следуют утверждения теоремы при $h''_0(s)$ убывающем. Так же получаются утверждения теоремы при $h''_0(s)$ возрастающем.

ТЕОРЕМА 5. *При увеличении $m''(s)$ за счет положительного монотонно возрастающего слагаемого* *:

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - AB$;

в) *при монотонном* $h''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наибольшего значения* $h''(s)$, *на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока, а при монотонном* $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на обеих линиях тока и на потенциальной линии.*

В самом деле, в плоскости ω образ AB будет на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ DC — кривая, монотонная по τ. Отсюда непосредственно следуют все утверждения теоремы при помощи формул (17) и (18).

3. Область напряжений, ограниченная двумя линиями тока и двумя линиями переменного потенциала. Схема такой области напряжений G представлена на рис. 3, где BC, AD — линии тока, AB, DC — линии переменного потенциала. Контурные условия имеют вид:

$$\varphi|_{AB} = h'(s), \quad \varphi|_{DC} = h''(s), \quad \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \quad \psi|_{BC} = M'' = \text{const}, \qquad (24)$$

где $h'(s)$, $h'(0) = 0$, $h''(s) > 0$, $M'' - M' > 0$, $m'(s)$, $m''(s)$ — те же самые, что и в п.п. 1, 2.

Пусть $m''(s)$ остается неизменным, т. е. остаются неизменными силы, приложенные к линии переменного потенциала DC; тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. *При замене линии переменного потенциала AB при монотонном $h'(s)$ потенциальной линией* $\varphi|_{AB} = 0$:

а) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1$, *если* $h'(s)$ *возрастает, и* $\varphi_1 > \varphi$, *если* $h'(s)$ *убывает, разность* $\varphi_1 - \varphi$ *монотонна на* $L_1 - AB$;

б) *при монотонном* $m''(s)$ $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего*

---

* Это означает, что к линии переменного потенциала DC прилагаются добавочные внешние усилия с положительным моментом относительно оси Z.

значения $h'(s)$ *и если при этом* $m'(s)$ *монотонно, то* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на другой линии тока.*

Пусть $h''(s)$ остается неизменным с точностью до постоянного слагаемого и пусть остается неизменной величина M; тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. *При замене линии переменного потенциала* AB *при монотонном* $h'(s)$ *потенциальной линией* $\varphi|_{AB} = 0$:

а) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1$, *если* $h'(s)$ *возрастает, и* $\varphi_1 > \varphi$, *если* $h'(s)$ *убывает, разность* $\varphi_1 - \varphi$ *монотонна на* $L_1 - AB - DC$;

б) *при монотонных* $m''(s)$, $m''_1(s)$ *будет* $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего значения* $h'(s)$, *а при монотонных* $m'(s)$ *и* $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на другой линии тока.*

Годограф T в условиях теорем 1 и 2 при $h'(s)$ возрастающем имеет вид, указанный на рис. 16, и доказательство этих теорем, как и в предыдущих случаях, получается из рассмотрения годографов в плоскости вариации комплексного потенциала.

Рис. 16

Пусть $h''(s)$, т. е. угол поворота на линии переменного потенциала DC, остается неизменным; тогда имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *При уменьшении* $h'(s)$ *за счет отрицательного монотонного слагаемого* $h'_0(s)$:

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - DC$;

в) *при монотонных* $m'(s)$, $m''(s)$ *будет* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего значения* $h'_0(s)$, *на линии переменного потенциала* DC *и вблизи ее конца на другой линии тока.*

ТЕОРЕМА 4. *При увеличении* $m'(s)$ *за счет положительного монотонно возрастающего слагаемого:*

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ *в* $G_1 + L_1 - DC$;

в) *при монотонных* $h'(s)$, $m''(s)$ *будет* $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на линии тока наименьшего значения* $h'(s)$, *на линии переменного потенциала* DC *и вблизи ее конца на другой линии тока, а при монотонных* $m'(s)$ *и* $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ *на обеих линиях тока и на линии переменного потенциала.*

Доказательство теорем 3, 4, как и в предыдущих случаях, получается из теоремы о сохранении области для эллиптических систем дифференциальных уравнений с учетом частично известных контурных условий для вариаций комплексного потенциала.

§ 6. К вопросу о законе затухания и принципе Сен-Венана

При выборе конструкции валов переменного сечения важное значение имеет так называемый закон затухания напряжений, заключающийся в том, что резкое повышение напряжений, с которым встречаются при решении всех задач о концентрации напряжений, всегда сопровождается

значительным уменьшением напряжений вблизи зоны концентрации. В случае кручения валов переменного сечения указанный закон заключается в том, что вблизи всякой кольцевой выточки — зоны концентрации напряжений — напряжения уменьшаются, и теоретически проверен для таких кольцевых выточек, для которых известны те или иные приближенные решения [см. (3), стр. 11,169—170]. Приведенные в § 2,3,4,5 вариационные теоремы кручения валов и именно те пункты этих теорем, в которых говорится о поведении вектора напряжений $\vec{\tau}$, являются математическим доказательством закона затухания в общем виде для валов произвольных сечений с произвольными выточками, а также представляют собой возможные уточнения и обобщения этого закона. В силу этого, указанные вариационные теоремы, как и закон затухания, но в более полной форме, дают обоснование рационального устройства разгружающих выточек, уменьшающих максимальные напряжения на поверхности вала. Эти же вариационные теоремы в отдельных случаях позволяют математически обосновать известный экспериментальный принцип Сен-Венана и дать ему количественную характеристику. Покажем это на одном из примеров.

Пусть дан цилиндрический вал радиусом R и длиной l с торцевыми поверхностями, ортогональными к его боковой поверхности. Пусть боковая поверхность свободна от внешних усилий, а на закрепленной торцевой поверхности, образованной вращением отрезка AB вокруг оси z (см. рис. 17), угол поворота $\varphi|_{AB}=0$, а на другой торцевой поверхности угол поворота $\varphi|_{DC}=h''(s)>0$, где $h''(s)$ — монотонная функция длины s отрезка DC, отсчитываемой от точки D (рис. 17). Пусть M — заданный суммарный скручивающий момент. Требуется установить, насколько напряжения на торцевой поверхности, образованной вращением отрезка AB вокруг оси z, отличаются от напряжений на этой поверхности, соответствующих постоянному углу поворота на обеих торцевых поверхностях при том же значении суммарного скручивающего момента. Для решения этой задачи достаточно использовать теоремы 1,2,3 § 5, п. 2. В самом деле, в соответствии с теоремой 1, полагая $\varphi|_{DC}=h''=\text{const}$, имеем:

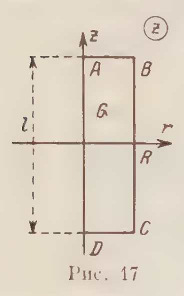


Рис. 17

$$h<h''<\tilde{h},$$

где

$$h=\min_{DC} h''(s), \quad \tilde{h}=\max_{CD} h''(s).$$

Комплексный потенциал $w=\varphi+i\psi$ в этом случае, как легко видеть, будет

$$w=\varphi+i\psi=\frac{M}{R^3}\left(-\frac{4}{\mu}z+ir^4\right)=\frac{\mu h''}{4l}\left(-\frac{4}{\mu}z+ir^4\right).$$

Полагая $\varphi|_{DC}=h$ и $\psi|_{DC}=\tilde{h}$, будем иметь комплексные потенциалы, со-

ответственно, в виде:

$$w = \frac{\mu h}{4l}\left(-\frac{4}{\mu}z + ir^4\right), \quad \widetilde{w} = \frac{\mu \widetilde{h}}{4l}\left(-\frac{4}{\mu}z + ir^4\right).$$

Отсюда для искомой величины вектора напряжений $|\vec{v}|$ на закрепленной торцевой поверхности, в соответствии с теоремами 2, 3 и равенствами (14), будем иметь:

$$\mu r \frac{h}{l} < |\vec{v}| < \mu r \frac{\widetilde{h}}{l}$$

и для соответствующих напряжений $|\vec{v}_1|$ при постоянном угле поворота на обеих торцевых поверхностях будем иметь:

$$|\vec{v}_1| = \mu r \frac{h''}{l} = \frac{4M}{R^3} r.$$

Таким образом для искомой величины уклонения напряжений получаем:

$$\delta = \left| \frac{|\vec{v}| - |\vec{v}_1|}{|\vec{v}_1|} \right| \leqslant \frac{\widetilde{h} - \underset{\sim}{h}}{h''} = \frac{\widetilde{h} - M}{4Ml} R^3 \mu.$$

Например, при $\frac{R^3}{M}\mu = 1$, $\widetilde{h} - \underset{\sim}{h} = 1$, $l = 10$ искомое уклонение напряжений не превосходит 2,5%; при $l = 25$ это уклонение снижается до 1,0% и вообще оно обратно пропорционально длине скручиваемого вала или обратно пропорционально расстоянию от места изменения приложенных внешних усилий.

§ 7. Метод сохранения области и мажорантных областей в теории концентрации напряжений в валах переменного сечения

Одной из наиболее важных задач теории кручения валов переменного сечения является задача о кручении цилиндрических валов с кольцевыми выточками той или иной формы, так как правильные представления о распределении напряжений на поверхности вала позволяют уменьшить величину коэффициента запаса, облегчить вес конструкций и избежать поломки их от перенапряжений [см. ([8]), стр. 135].

Важность указанной задачи и трудность ее решения объясняют появление значительного количества работ, посвященных ее всевозможным приближенным решениям, начиная с момента опубликования в 1900 г. * Мичелем основных уравнений теории кручения валов переменного сечения. Для всех этих приближенных решений характерным является то, что краевые условия задачи удовлетворяются не полностью, не на всей поверхности вала, а только на ее части, или краевые условия удовлетворяются не на той поверхности, для которой ставится краевая задача, но при этом, что важно заметить, не указываются оценки погрешности найденных таким образом приближенных решений, не указывается, в каком отношении они находятся с истинными значениями искомых величин.

* Полная библиография указанных работ приведена в монографии ([8]).

Последнее обстоятельство следует считать существенным недостатком указанных приближенных решений, особенно потому, что, как показали исследования, впервые проведенные М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [(9), (10), (11)], даже одна из простейших краевых задач — задача Дирихле — может оказаться неустойчивой по отношению к изменению области.

Вариационные теоремы, установленные в § 2, 3, 4, 5, а также непосредственное использование теоремы о сохранении области для эллиптических систем дифференциальных уравнений [см. (2)] позволяют сравнивать решения краевых задач, соответствующих различным областям напряжений. В силу этого, представляется возможным распространить предложенный нами ранее метод мажорантных областей в теории фильтрации [см. (4), (5)] на решение задач кручения валов переменного сечения. А именно, для того чтобы определить ту или иную интегральную характеристику напряженного состояния, т. е. величину, представляющую непосредственный интерес (например, максимальное значение вектора напряжений на боковой поверхности вала) при заданной или приближенно известной области напряжений G, необходимо в соответствии с доказанными вариационными теоремами построить напряженные состояния в каких-либо вспомогательных областях напряжений — «мажорантных по данной интегральной характеристике» $\tilde{G}$ и $\underset{\sim}{G}$ так, чтобы численные значения соответствующей интегральной характеристики для $\tilde{G}$ и $\underset{\sim}{G}$ были известны или находились просто и давали оценки искомой величины, соответственно, сверху и снизу. Очевидно, что получаемые таким образом решения должны быть свободны от указанного выше существенного недостатка известных приближенных решений, в которых не указываются оценки для истинных значений искомых величин. Построение указанных выше мажорантных областей всегда возможно за счет известных простейших напряженных состояний и в каждой конкретной задаче может осуществляться особенно просто, если не требуется большой точности в определении искомых величин.

Покажем это на рассмотрении отдельных простейших примеров и задач.

1. Задача о максимальных напряжениях на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины с кольцевой выточкой гиперболической формы. Пусть дан цилиндрический вал бесконечной длины и радиуса R, имеющий на боковой поверхности кольцевую выточку гиперболической формы, причем α — глубина выточки, 2β — ее ширина. Пусть боковая поверхность вала свободна от внешних усилий, M — заданный суммарный скручивающий момент. Требуется определить максимальное значение вектора напряжений на боковой поверхности вала.

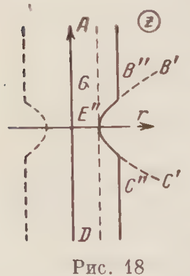


Рис. 18

Область напряжений G, соответствующая нашему валу, имеет вид, указанный на рис. 18, где AD, $AB''E''C''D$ — линии тока. В соответствии с вариационной теоремой 2 § 4 для оценки сверху вектора

напряжений $\vec{v}$ на линиях тока AB'', $C''D$, принимая за область $\widetilde{G}$ полосу шириной R, получаем неравенства:

$$|\vec{v}|_{AB''}, \quad |\vec{v}|_{C''D} < \frac{4M}{R^3}. \tag{25}$$

Для оценки сверху вектора напряжений на поверхности выточки $B''E''C''$, в силу той же теоремы 2 § 4, мы можем взять область $\widetilde{G}$, ограниченную линиями тока AD и гиперболой $B'B''E''C''C'$ (рис. 18). Вводя функцию Н. Е. Жуковского $\zeta = \rho e^{i\theta}$,

$$Z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \frac{c}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta + i\,\frac{c}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta,$$

где c — фокусное расстояние гиперболы $B'E''C'$, уравнение последней сможем записать в виде

$$\theta = \theta_1 = \text{const}, \quad \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha(2R-\alpha)}}}, \quad c = \frac{R-\alpha}{\cos\theta_1}.$$

Система уравнений (11), в силу ее инвариантности по отношению к конформным преобразованиям, запишется в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{1}{\left[\frac{c}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right]^3}\,\frac{1}{\rho\cos^3\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{1}{\left[\frac{c}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right]^3}\,\frac{\rho}{\cos^3\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\rho},$$

откуда, вводя обозначение

$$\lambda = \lambda(R, \alpha, \beta) = \sin\theta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha(2R-\alpha) + \beta^2}}, \tag{26}$$

получаем комплексный потенциал $\widetilde{w}$, соответствующий $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{w} = \widetilde{\varphi} + i\widetilde{\psi} = \frac{M}{\frac{2}{3} + \frac{\lambda^3}{3} - \lambda}\left[\widetilde{\varphi} + i\left(\frac{\sin^3\theta}{3} - \sin\theta\right)\right].$$

Для величины вектора напряжений $|\tilde{\vec{v}}|$ в точках гиперболы $B'E''C'$ в соответствии с (14) имеем:

$$|\tilde{\vec{v}}|_{\theta=\theta_1} = \left\{\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|\right\}_{\theta=\theta_1} = \left\{\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{d\zeta}{dZ}\,\frac{1}{\zeta}\right|\right\}_{\theta=\theta_1}$$

или

$$|\tilde{\vec{v}}|_{\theta=\theta_1} = \frac{2M(1-\lambda^2)^2}{\left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda^3}{3} - \lambda\right)(R-\alpha)}\left\{\frac{1}{\rho + \frac{1}{\rho} - 2\cos\theta_1}\,\frac{1}{r^2}\right\}_{\theta=\theta_1}. \tag{27}$$

В частности, максимальное значение эта величина будет иметь у дна выточки в точке E'':

$$|\tilde{v}|_{E''} = \frac{4M}{(R-\alpha)^3}\,\Pi(\lambda), \tag{28}$$

где

$$\Pi(\lambda) = \frac{3}{4\lambda^2}\,\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2}. \tag{29}$$

Взяв для оценки снизу величины вектора скорости $\vec{v}$ в точке E'' область G в виде полосы шириною $R-\alpha$, получаем оценки сверху и снизу для искомой величины максимального значения вектора напряжений $\max|\vec{v}|$ на боковой поверхности вала $AB''E''C''D$ в виде

$$\frac{4M}{(R-\alpha)^3} < \max|\vec{v}| < \frac{4M}{(R-\alpha)^3}\Pi(\lambda), \tag{30}$$

где $\Pi(\lambda)$ и λ — коэффициенты, определенные, соответственно, равенствами (29) и (26).

На табл. 1 представлены численные значения коэффициента $\Pi(\lambda)$, которые показывают, что неравенства (30) дают довольно тесные оценки для величин максимального напряжения на боковой поверхности вала при численных значениях λ, достаточно близких к единице, т. е. не при очень большой глубине выточки или не при очень малой ее ширине.

Таблица 1

λ	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\Pi(\lambda)$	1	1,153	1,356	1,638	2,051	2,700	3,828	6,123	12,273	43,215	∞

2. Задача о максимальных напряжениях на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины с кольцевой выточкой круговой формы. Пусть дан цилиндрический вал бесконечной длины радиуса R, имеющий на боковой поверхности кольцевую выточку круговой формы радиуса β и глубиной $\alpha \leqslant 2\beta$ (рис. 19). Пусть боковая поверхность свободна от внешних усилий, M — заданный скручивающий момент*. Поставим задачу об определении $\max|\vec{v}|$ — максимального значения вектора напряжений на боковой поверхности вала, как величины, представляющей наиболее существенный интерес.

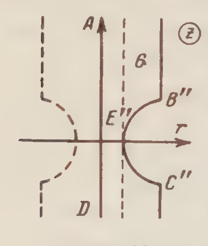


Рис. 19

Так же как и в предыдущем случае, для оценки величины вектора напряжений $\vec{v}$ на линиях тока AB'', $C''D$ имеем неравенства (25). Для оценки этой величины в точке E'' у дна выточки имеем неравенство

$$|\vec{v}|_{E''} > \frac{4M}{(R-\alpha)^3}. \tag{31}$$

Для оценки сверху величины $\vec{v}$ на поверхности выточки $B''E''C''$ (рис. 19) в соответствии с вариационной теоремой 2 § 5 мы можем взять область

* Приближенное решение задачи о таком цилиндрическом вале в частном случае, когда $\alpha = 2\beta$, было недавно дано в монографии ([8]) в очень сложной форме — в виде бесконечных рядов, причем в этом решении, как и обычно, краевые условия полностью не удовлетворяются и оценки погрешности не приводятся.

$\widetilde{G}$, представленную на рис. 20, где AD и $AB'E''C'D$ — линии тока, a — абсцисса точки пересечения окружностей, ортогональных к мнимой оси

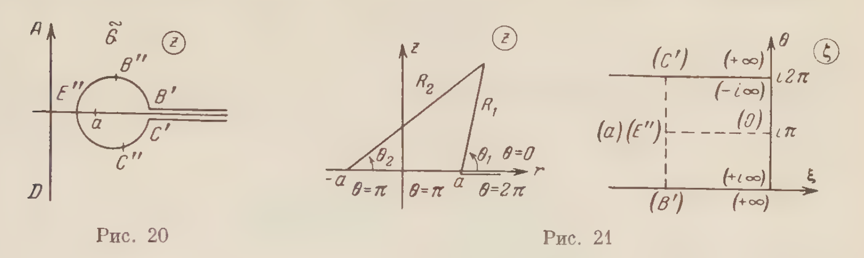


Рис. 20 Рис. 21

и к окружности $B'B''E''C''C'$, $R_0 = R - \alpha$. Для указанной области $\widetilde{G}$ комплексный потенциал $\widetilde{\omega} = \widetilde{\varphi} + i\widetilde{\varphi}$ можно найти общеизвестными способами. Полагая

$$\omega = \rho e^{i\theta} = \frac{Z-a}{Z+a}, \quad Z = r + iz = \frac{a(1-\rho^2)}{1-\rho^2-2\rho\cos\theta} + i\frac{a2\rho\sin\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}$$

и вводя комплексную плоскость биполярных координат $\zeta = \xi + i\theta$ [см. рис. 21],

$$\zeta = \xi + i\theta = \ln\omega = \ln\frac{R_1}{R_2} + i(\theta_1 - \theta_2), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$R_{1,2} = \sqrt{(r \mp a)^2 + z^2}, \quad \theta_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{z}{r \mp a},$$

$$r = -\frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\theta}, \quad z = \frac{a\sin\theta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\theta},$$

из условия

$$\rho|_{B''E''C''} = \left|\frac{R_0 - a}{R_0 + a}\right| = \left|\frac{R_0 + 2\beta - a}{R_0 + 2\beta + a}\right| = \text{const}$$

будем иметь

$$a = \sqrt{R_0^2 + 2R_0\beta}, \tag{32}$$

$$\xi_0 = \xi|_{B''E''C''} = \ln\frac{a - R_0}{a + R_0}. \tag{33}$$

Система уравнений (11) запишется в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{1}{\mu a^3 q^2 \operatorname{sh}^3\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{\mu a^3 q^2 \operatorname{sh}^3\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

где

$$q = (\operatorname{ch}\xi - \cos\theta)^{-\frac{3}{2}}. \tag{34}$$

В силу тождества

$$qL(v \cdot q) = \frac{\partial}{\partial\xi}(pq^2 v_\xi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(pq^2 v_\theta) + vqL(q),$$

где

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial\xi}(pu_\xi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(pu_\theta),$$

а p — любая непрерывно дифференцируемая функция, полагая $\psi = vq$, $p = \frac{1}{q^2 \operatorname{sh}^3 \xi}$, имеем:

$$L(q) = \frac{9}{4} \frac{q}{p},$$

и уравнение для определения v принимает вид:

$$v_{\xi\xi} + v_{\theta\theta} - 3\operatorname{cth} \xi v_\xi + \frac{9}{4} v = 0. \tag{35}$$

Полагая

$$v = \sin\frac{\theta}{2}\alpha(\xi), \quad v = \sin\frac{3\theta}{2}\beta(\xi)$$

и определяя $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ из уравнений

$$\alpha'' - 3\operatorname{cth} \xi\alpha' + 2\alpha = 0, \quad \beta'' - 3\operatorname{cth}\xi\beta' = 0,$$

имеем следующие частные случаи функции тока:

$$\psi_1 = q\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{ch}\xi, \quad \psi_2 = q\sin\frac{\theta}{2}(1 + \operatorname{ch}^2\xi),$$

$$\psi_3 = q\sin\frac{3\theta}{2}, \qquad \psi_4 = q\sin\frac{3\theta}{2}(3\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}^3\xi).$$

Функция

$$\tilde{\psi} = \frac{Mq}{\sqrt{2}(b-1)^2}\Big\{3\sin\frac{\theta}{2}[b(1 + \operatorname{ch}^2\xi) - (1 + b^2)\operatorname{ch}\xi] + $$
$$+ 3\sin\frac{3\theta}{2}\frac{1}{b+2}[3\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}^3\xi - 3b + b^3]\Big\},$$

где

$$b = \operatorname{ch}\xi_0 = 1 + \frac{R_0}{\beta}, \tag{36}$$

будет равна нулю на линии тока $AB'B''E''C''C'D$ и равна $-M$ на линии тока AD. Это значит, что комплексный потенциал $\tilde{w} = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi}$ для указанной выше области $\tilde{G}$ будет

$$\tilde{w} = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} + i\frac{Mq}{\sqrt{2}(b-1)^2}\Big\{3\sin\frac{\theta}{2}[b(1 + \operatorname{ch}^2\xi) - (1 + b^2)\operatorname{ch}\xi] + $$
$$+ \frac{1}{b+2}\sin\frac{3\theta}{2}[3\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}^3\xi - 3b + b^3]\Big\}. \tag{37}$$

Согласно общим формулам (14), на дуге окружности $B''E''C''$ имеем:

$$|\bar{\tilde{v}}|_{B''E''C''} = \left|\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n}\right|_{\xi=\xi_0} = \left|\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi}\frac{2a}{Z^2 - a^2}\right|_{\xi=\xi_0}.$$

Далее,

$$\left.\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = \frac{3M\operatorname{sh}\xi_0(b+1)}{\sqrt{2}(b-1)(b-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\left[\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{b+2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\right|_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{a^2}\frac{(\operatorname{ch}\xi_0 - \cos\theta)^2}{\operatorname{sh}^2\xi_0}$$

и, следовательно,

$$|\tilde{v}|_{B''E''C''} = \frac{3\sqrt{2}M}{a\operatorname{sh}\xi_0}\frac{b+1}{b-1}\sqrt{b-\cos\theta}\,\frac{\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{b+2}\sin\frac{3\theta}{2}}{|Z^2 - a^2|_{\xi=\xi_0}}. \tag{38}$$

В частности, у дна выточки в точке E'' последняя величина принимает наибольшее значение:

$$|\tilde{\vec{v}}|_{E''} = \frac{3\sqrt{2}M}{a} \frac{b+1}{(b-1)^{\frac{3}{2}}} \frac{b+3}{b+2} \frac{1}{a^2 - R_0^2}. \tag{39}$$

Учитывая (32) и (36), последнее равенство можно записать в виде

$$|\tilde{\vec{v}}|_{E''} = \frac{4M}{(R-\alpha)^3} \Pi(\lambda), \tag{40}$$

где

$$\Pi(\lambda) = \sqrt{1+\lambda}\, \frac{1+\frac{\lambda}{2}}{1+\frac{2}{3}\lambda}, \quad \lambda = \lambda(R, \alpha, \beta) = \frac{R-\alpha}{2\beta}. \tag{41}$$

Таким образом для $\max|\vec{v}|$ — максимального значения вектора напряжений на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины радиуса R с кольцевой выточкой круговой формы радиусом β и глубиной $\alpha \leqslant 2\beta$ получаем оценки сверху и снизу:

$$\frac{4M}{(R-\alpha)^3} \leqslant \max|\vec{v}| \leqslant \frac{4M}{(R-\alpha)^3} \Pi(\lambda), \tag{42}$$

где коэффициент $\Pi(\lambda)$ и λ определяются равенствами (41).

В табл. 2 приведены численные значения коэффициента $\Pi(\lambda)$, которые показывают, что оценки (42) являются довольно тесными и определяют максимальные напряжения на боковой поверхности вала с достаточно высокой степенью точности.

Таблица 2

λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Π(λ)	1	0,033	1,063	1,092	1,121	1,148	1,175	1,200	1,225	1,249
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Π(λ)	1,273	1,485	1,667	1,829	1,978	2,116	2,246	2,368	2,485	2,596

Например, при $R = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ имеем:

$$4M < \max|\vec{v}| < 4M \cdot 1{,}148;$$

взяв за приближенное значение искомой величины среднее арифметическое верхней и нижней оценок, будем иметь погрешность, не превышающую 6,8%. При $R = 2$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 1$ получаем искомую величину с погрешностью, не превышающей 3,5%.

Поступило
4. II. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Положий Г. Н., О p-аналитических функциях комплексного переменного, Доклады Ак. наук СССР, 58 (1947), 1275—1278.

[2] Положий Г. Н., Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применения, Математич. сборн., т. 33 (1953), 485—492.

[3] Нейбер Г., Концентрация напряжений, М. — Л., ОГИЗ, 1947.

[4] Положий Г. Н., О некоторых методах теории функций комплексного переменного в механике сплошных сред, Докторская диссертация, Математический институт им. В. А. Стеклова, АН СССР, 1952.

[5] Положий Г. Н., Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации, Украинский матем. журн., т. V (1953), 380—400.

[6] Тимошенко С. П., Теория упругости, Л. — М., ОНТИ, 1934.

[7] Michell J. H., The uniform torsion and flexure of incomplete tores with application to helical springs, Proc. Lond. Math. Soc., v. 31 (1900), 140.

[8] Соляник-Красса К. В., Кручение валов переменного сечения, Л. — М., ГИТТЛ, 1949.

[9] Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А., Об устойчивости решения задачи Дирихле, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 1 (1937), 551—596.

[10] Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, 18 (1938), 315—318.

[11] Келдыш М. В., О задаче Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, т. 32 (1941), 308—309.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955) ,271

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей работе «Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля», опубликованной в № 2, 3 и 4 т. 18 (1954) «Известий АН СССР, серия математическая», вследствие моего недосмотра, содержатся некоторые ошибочные формулы.

Так, на стр. 114 неправильно указано значение $\zeta_\Omega(0) = -1$ для мнимого квадратичного поля. Правильная формула $\zeta_\Omega(0) = -\frac{h}{2}$ с указанием числа классов приведена в моей прежней работе «Über eine Verallgemeinerung der Ramanujan'schen Identitäten» (Известия Ак. наук СССР, отд. матем. и естеств. наук (1931), стр. 1089—1102). Это обстоятельство, однако, не отражается на подавляющем большинстве установленных мною формул, так как в этих последних не расшифровывается значение $\zeta_\Omega(0)$.

На стр. 138 и 140 имеются досадные описки в отношении области сходимости некоторых рядов Дирихле. Так, на стр. 138 в формуле $\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}$ надо считать $\operatorname{Re}(s) > 2$, а на стр. 140 в формуле $\zeta(s)\,\zeta(s-3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^s}$ надо полагать $\operatorname{Re}(s) > 4$.

На стр. 140 ошибочны формулы (10.22) и (10.23) и следствия из них, касающиеся функции Эпштейна $\zeta_\Omega(2)$.

Наконец, надо считать совершенно излишним вывод функционального уравнения Дедекинда из формул общей теории, так как означенное уравнение было использовано при выводе самих этих формул.

Н. С. Кошляков

ОТКРЫТА ПОДПИСКА
НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР
на 2-ое полугодие 1955 года

Название журналов	Количество номеров в полугодие	Полугодовая подписная цена
Автоматика и телемеханика	3	27
Акустический журнал	2	18
Астрономический журнал	3	27
Биохимия	3	36
Ботанический журнал	3	45
Вестник Академии наук СССР	6	48
Вестник древней истории	2	48
Вопросы языкознания	3	36
Доклады Академии наук СССР (без переплета)	18	180
Доклады Академии наук СССР (с 6 папками, коленкоровыми с тиснением)	18	192
Журнал аналитической химии	3	18
Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова	3	45
Журнал общей биологии	3	22.50
Журнал общей химии	6	90
Журнал прикладной химии	6	63
Журнал технической физики	6	90
Журнал физической химии	6	108
Журнал экспериментальной и теоретической физики	6	72
Записки Всесоюзного минералогического общества	2	24
Зоологический журнал	3	67.50
Известия Всесоюзного географического общества	3	27
Исторический архив	3	45
Коллоидный журнал	3	22.50
Математический сборник	3	54
Микробиология	3	36
Почвоведение	6	54
Прикладная математика и механика	3	36
Природа	6	42
Советское востоковедение	3	36
Советское государство и право	4	60
Советская этнография	2	36
Успехи современной биологии	3	24
Успехи химии	4	32
Физика металлов и металловедение	3	45

Название журналов	Количество номеров в полугодие	Полугодовая подписная цена
Физиологический журнал СССР имени И. М. Сеченова	3	36
Физиология растений	3	27
Известия Академии наук СССР:		
Отделение литературы и языка	3	27
Отделение технических наук	6	90
Отделение химических наук	3	48
Серия биологическая	3	36
Серия географическая	3	27
Серия геологическая	3	45
Серия геофизическая	3	27
Серия математическая	3	27
Серия физическая	3	36
Реферативный журнал, серии:		
Астрономия и геодезия	6	45.60
Предметный указатель к серии «Астрономия и геодезия» за 1953—1954 гг.	1	32
Биология	12	180
Геология и география	6	120
Математика	6	45.60
Предметный указатель к серии «Математика» за 1953—1954 гг.	1	32
Механика	6	45.60
Предметный указатель к серии «Механика» за 1953—1954 гг.	1	32
Физика	6	120
Предметный указатель к серии «Физика» за 1954 г.	1	78
Химия	12	216
Предметный указатель к серии «Химия» за 1953—1954 гг.	2	100
Биологическая химия (раздел Реферативного журнала «Химия»)	12	54

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ

городскими и районными отделами «Союзпечати», отделениями и агентствами связи, магазинами «Академкнига», а также конторой «Академкнига» по адресу: Москва, Пушкинская ул., д. 23.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 173—186

И. И. ВОРОВИЧ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказывается существование решений нелинейных уравнений теории пологих оболочек, а также обосновываются некоторые прямые методы их решения.

§ 1

Как известно, многие важные особенности работы пологих оболочек не могут быть объяснены на основе теории малых деформаций, приводящей к линейной системе дифференциальных уравнений. В связи с этим в последнее время в целом ряде работ исследуются нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие более полно процесс деформации оболочки.

Наиболее распространенный вариант нелинейной теории оболочек принадлежит В. З. Власову [см. ([1]), стр. 475—478].

В основе этого варианта лежат следующие соотношения:

$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2, \qquad \varepsilon_2 = v_y + k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y,$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \qquad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1),$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12}, \qquad 0 < \mu < 0{,}5, \tag{2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

Рис. 1

$$D\nabla^4 w + N_1(k_1 - w_{xx}) + N_2(k_2 - w_{yy}) - 2N_{12}w_{xy} - q_z = 0. \tag{4}$$

Здесь (см. рис. 1) u, v, w — перемещения точки срединной поверхности, k_1 и k_2 — начальные кривизны оболочки в сечениях, параллельных соответственно плоскости ozx и ozy, ε_1, ε_2, ε_{12} — составляющие деформации срединной оболочки, N_1, N_2, N_{12} — тангенциальные усилия в оболочке, E, μ — упругие характеристики материала оболочки, h — высота оболочки, q_z — составляющая внешней нагрузки вдоль оси. Нижний индекс в формулах (1)—(4) (как и во всем дальнейшем) указывает на дифференцирование по соответствующему аргументу.

Соотношения (1), (2), (3) могут быть заменены двумя уравнениями:

$$L_1(u,v) = \nabla^2 u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_x + \frac{2}{1-\mu}[(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu (k_2 w)_x + \\ + \mu w_y w_{xy}] + w_y w_{xy} + w_x w_{yy} = 0, \tag{5}$$

$$L_2(u,v) = \nabla^2 v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_y + \frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \\ + \mu (k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] + w_x w_{xy} + w_y w_{xx} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) описывают процесс деформации оболочки в ее срединной поверхности с учетом влияния поперечных прогибов.

Уравнение (4) есть уравнение изгиба оболочки, составленное с учетом влияния тангенциальных усилий на изгиб.

В дальнейшем мы будем считать, что достаточно гладкий контур Г оболочки ограничивает конечную односвязную область C. Кроме того, примем на контуре следующие граничные условия:

$$u|_\Gamma = u(s), \quad v|_\Gamma = v(s), \tag{7}$$

$$w|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Далее, предположим, что для области C существует тензор Грина плоской задачи теории упругости, т. е. что решения системы

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_x = f_1, \\ \nabla^2 v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_y = f_2 \end{aligned} \tag{9}$$

при граничных условиях (7) даются следующими соотношениями:

$$u = \int_C G_{11}(P,Q) f_1(Q)\,dQ + \int_C G_{12}(P,Q) f_2(Q)\,dQ + u_0(P), \tag{10}$$

$$v = \int_C G_{21}(P,Q) f_1(Q)\,dQ + \int_C G_{22}(P,Q) f_2(Q)\,dQ + v_0(P). \tag{11}$$

При этом $u_0(P)$, $v_0(P)$ удовлетворяют однородным уравнениям плоской задачи теории упругости при граничных условиях (7), а интегральные члены в формулах (10) и (11) удовлетворяют уравнениям (9) при граничных условиях:

$$u|_\Gamma = 0, \quad v|_\Gamma = 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что для области C существует функция Грина $G(P, Q)$ оператора $\nabla^4 w$ при граничных условиях (8), т. е. решение уравнения

$$\nabla^4 w = q(x, y)$$

при граничных условиях (8) дается формулой:

$$w = \int_C G(P,Q)\,q(Q)\,dQ.$$

Рассматривая обобщенные решения нашей задачи, будем считать, что

$k_1,\ k_2 \subset W_2^{(1)}$, $q(x, y)$ интегрируема с квадратом в C. При этом систему уравнений (4), (5), (6) можно привести к одному интегро-дифференциальному уравнению, которое и будет в дальнейшем использоваться.

Выразим u, v из уравнений (5), (6) посредством тензора Грина через w. Для этого, очевидно, в формулах (10), (11) следует положить:

$$f_1 = -\frac{2}{1-\mu}[(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu (k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] - w_y w_{xy} - w_x w_{yy}, \qquad (12)$$

$$f_2 = -\frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu (k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] - w_x w_{xy} - w_y w_{xx}. \qquad (13)$$

Затем, используя соотношения (1), (2), (10) и (11), мы можем выразить N_1, N_2, N_{12} посредством некоторых интегро-дифференциальных операторов R_1, R_2, R_{12} через w:

$$N_1 = R_1\{w\} + N_{10}, \quad N_2 = R_2\{w\} + N_{20}, \quad N_{12} = R_{12}\{w\} + N_{120}. \qquad (14)$$

Здесь N_{10}, N_{20}, N_{120} — система тангенциальных усилий, соответствующая перемещениям $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$. Пусть ε_{10}, ε_{20}, $\varepsilon_{120} \subset L_1$.

При получении формулы (14) была необходимость в однократном дифференцировании выражений (10), (11), что вполне допустимо, так как для $G_{ij}(P, Q)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ известны следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} |G_{ij}(P, Q)| &\leqslant \alpha |\ln r_{PQ}| + \beta, \\ |G_{ijx}(P, Q)| &\leqslant \frac{\gamma}{r_{PQ}}, \\ |G_{ijy}(P, Q)| &\leqslant \frac{\delta}{r_{PQ}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Явного вида операторов R_1, R_2, R_{12} мы здесь не приводим, так как нам потребуются лишь некоторые их свойства.

Если считать N_1, N_2, N_{12} выраженными через w, то уравнение (4) превращается посредством функций Грина $G(P, Q)$ в некоторое интегро-дифференциальное уравнение относительно w:

$$w(P) = \int_C G(P, Q) A(w)\, dQ, \qquad (16)$$

где

$$A = \frac{1}{D}\{q_z - N_1(k_1 - w_{xx}) - N_2(k_2 - w_{yy}) + 2N_{12} w_{xy}\}. \qquad (17)$$

Введем в рассмотрение систему собственных функций $\varphi_n(x, y)$ и собственных чисел λ_n интегрального уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_C G(P, Q)\varphi(Q)\, dQ \qquad (16')$$

и будем искать приближенное решение интегро-дифференциального уравнения (4) в виде

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} C_{nk}\varphi_k(Q), \tag{18}$$

используя метод Бубнова — Галеркина.

При этом очевидно, что использование метода Бубнова—Галеркина для определения C_{nk} эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения (16) посредством замены ядра $G(P, Q)$ на вырожденное:

$$G_n(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i Q}{\lambda_i}.$$

Ниже будет доказано, что:

1. На каждом этапе применения метода Бубнова — Галеркина к уравнению (4) система алгебраических уравнений для G_{nk} допускает по крайней мере одно действительное решение.

2. Множество функций $\{w_n\}$ сильно компактно в пространстве B, которое определяется следующим образом: на множестве M функций $w(x, y)$, удовлетворяющих условиям (8) и имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные в C, вводится норма:

$$\| w \| = \left[\int\limits_C (\nabla^2 w)^2 \, dQ\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Пространство B есть замыкание M в указанной норме. Сильная компактность $\{w_n\}$ важна с точки зрения практического применения метода.

3. Каждая предельная точка множества $\{w_n\}$ есть решение интегро-дифференциального уравнения (16).

§ 2

Для доказательства утверждения 1 введем в рассмотрение функционал:

$$I(w) = \int\limits_C \left\{\frac{D}{2}(\nabla^2 w)^2 + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)}\left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2\right] - qw\right\} dQ. \tag{20}$$

В формуле (20) ε_1, ε_2, ε_{12} считаются выраженными через w, и сам функционал считается зависящим от w. Функционал I, как известно, есть полная потенциальная энергия оболочки. Рассмотрим $I(w_n)$ и докажем, что в пространстве коэффициентов C_{nk} $I(w_n)$ имеет минимум.

В самом деле,

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2$$

при сделанном предположении относительно μ есть определенно-положительная форма своих переменных, благодаря чему

$$I(w) \geqslant \int\limits_C \left[\frac{D}{2}(\nabla^2 w)^2 - q_z w\right] dQ \geqslant \int\limits_C \left[\frac{D}{2}(\nabla^2 w)^2 - \frac{\varepsilon q_z^2}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} w^2\right] dQ, \tag{21}$$

где ε — любое положительное число.

Далее, используя неравенство Фридрикса

$$\int_C (\nabla^2 w)^2\, dQ \geqslant \lambda_1 \int_C w^2 dQ, \tag{22}$$

где λ_1 — первое собственное число интегрального уравнения (16) и, следовательно, определяется только областью C, получаем:

$$I(w) \geqslant \int_C \left[p\,(\nabla^2 w)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\, q_z^2 \right] dQ, \tag{22'}$$

где

$$p = \frac{D}{2} - \frac{1}{2\varepsilon\lambda_1}$$

и может быть сделано положительным.

Рассмотрим в пространстве коэффициентов C_{nk} поверхность

$$\int_C (\nabla^2 w)^2\, dQ = \rho^2. \tag{23}$$

Легко видеть, что это будет эллипсоид:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_{nk}^2 = \rho^2. \tag{24}$$

На этом эллипсоиде

$$I(w_n) \geqslant p\,\rho^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_C q_z^2\, dQ. \tag{25}$$

Выберем ρ настолько большим, чтобы имело место неравенство:

$$p\,\rho^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_C q_z^2\, dQ \geqslant I(0) + \nu, \tag{26}$$

где ν — произвольная положительная постоянная, а

$$I(0) = \frac{E}{2\,(1-\mu^2)} \int_C \left[\varepsilon_{10}^2 + \varepsilon_{20}^2 + 2\mu\varepsilon_{10}\varepsilon_{20} + \frac{1}{2}\,(1-\mu)\,\varepsilon_{120}^2 \right] dQ, \tag{26'}$$

причем

$$\varepsilon_{10} = u_{0x}, \quad \varepsilon_{20} = v_{0y}, \quad \varepsilon_{120} = u_{0y} + v_{0x}.$$

Из (25) имеем:

$$I(w_n) \geqslant I(0) + \nu, \tag{27}$$

т. е. на выбранном эллипсоиде значение нашего функционала везде больше, чем в начале координат. Следовательно, минимум функционала $I(w_n)$ (который безусловно, в силу непрерывности I, достигается внутри эллипсоида или на границе) осуществляется в некоторой внутренней точке. В этой точке

$$\frac{\partial I}{\partial C_{nk}} = 0, \tag{28}$$

так как $I(C_{nk})$ есть непрерывно дифференцируемая функция коэффициентов $C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nn}$.

Иными словами, уравнения метода Ритца, примененного к функционалу I, всегда имеют не менее одного действительного решения.

Известно, что система уравнений (28) совпадает при наших условиях с системой уравнений Бубнова — Галеркина.

Однако в силу некоторой специфичности применения метода Ритца к функционалу I, связанной с тем, что ε_1, ε_2, ε_{12} в I получают не независимые, а выраженные через w вариации, мы дадим здесь вывод этого факта.

Имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial C_{nk}} = \int\limits_C \Big\{ D\nabla^2 w_n \nabla^2 \varphi_k + \frac{Eh}{1-\mu^2}\Big[\varepsilon_{1n}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{1n}}{\partial C_{nk}} + \varepsilon_{2n}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{2n}}{\partial C_{nk}} +$$

$$+\mu\varepsilon_{1n}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{2n}}{\partial C_{nk}} + \mu\varepsilon_{2n}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{1n}}{\partial C_{nk}} + \frac{1}{2}(1-\mu)\,\varepsilon_{12n}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{12n}}{\partial C_{nk}}\Big] - q_z\varphi_k\Big\}\,dQ. \qquad (25')$$

Для определения ε_{1n}, ε_{2n}, ε_{12n} следует сначала найти f_{1n}, f_{2n} из соотношений (12), (13), подставив туда w_n, а затем воспользоваться формулами (10), (11) и (1).

Уравнение (25′) легко преобразуется к виду:

$$\frac{\partial I}{\partial C_{nk}} = \int\limits_C \Big\{ D\nabla^4 w\cdot\varphi_k + \frac{Eh}{1-\mu^2}\Big[\frac{\partial\varepsilon_{1n}}{\partial C_{nk}} N_{1n} +$$

$$+\frac{\partial\varepsilon_{2n}}{\partial C_{nk}} N_{2n} + 2\frac{\partial\varepsilon_{12n}}{\partial C_{nk}} N_{12n}\Big] - q_z\varphi_k\Big\}\,dQ.$$

Далее, из (1) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varepsilon_{1n}}{\partial C_{nk}} &= \frac{\partial u_{nx}}{\partial C_{nk}} + k_1\varphi_k + \varphi_{kx}\cdot w_{nx},\\
\frac{\partial\varepsilon_{2n}}{\partial C_{nk}} &= \frac{\partial v_{ny}}{\partial C_{nk}} + k_2\varphi_k + \varphi_{ky} w_{ny},\\
\frac{\partial\varepsilon_{12n}}{\partial C_{nk}} &= \frac{\partial v_{nx}}{\partial C_{nk}} + \frac{\partial u_{ny}}{\partial C_{nk}} + \varphi_{ky} w_{nx} + \varphi_{kx} w_{ny}.
\end{aligned}\right\} \qquad (27')$$

Если подставить выражения (27′) в (25′), произвести интегрирование по частям членов, содержащих φ_{kx}, φ_{ky}, $\frac{\partial u_{nx}}{\partial C_{nk}}$, $\frac{\partial u_{ny}}{\partial C_{nk}}$, $\frac{\partial v_{nx}}{\partial C_{nk}}$, $\frac{\partial v_{ny}}{\partial C_{nk}}$, и учесть соотношения (3), то мы и получим уравнения метода Бубнова — Галеркина, примененного к уравнению (4). Этим, очевидно, и исчерпывается доказательство разрешимости уравнений метода Бубнова — Галеркина на каждом этапе.

Перейдем к изучению некоторых свойств построенной последовательности w_n.

Из самого способа построения w_n следует, что

$$\int\limits_C (\nabla^2 w_n)^2\,dQ \leqslant \rho^2 \qquad (28')$$

равномерно относительно n. В силу граничных условий (8), из (28′) следует:

$$\int\limits_C w_{nxx}^2\,dQ \leqslant \rho^2, \quad \int\limits_C w_{nxy}^2\,dQ \leqslant \rho^2, \quad \int\limits_C w_{nyy}^2\,dQ \leqslant \rho^2. \qquad (29)$$

Далее, поскольку w_n — минимизирующая последовательность для I, су-

ществует такая постоянная d_0, что

$$I(w_n) \leqslant d_0. \tag{30}$$

Вместе с этим имеем очевидное неравенство:

$$I \geqslant \int_C \Big\{ p(\nabla^2 w)^2 - \frac{\varepsilon q_z^2}{2} + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \Big[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \\ + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \Big] \Big\} dQ, \tag{31}$$

в котором числа ε и p уже ранее нами вводились в формулах (21) и (22).

Из (30) и (31) следует, что

$$\int_C \varepsilon_{1n}^2 \, dQ \leqslant \rho_1, \quad \int_C \varepsilon_{2n}^2 \, dQ \leqslant \rho_1, \quad \int_C \varepsilon_{12n}^2 \, dQ \leqslant \rho_1, \tag{32}$$

где

$$\rho_1 = \left(d_0 + \frac{\varepsilon}{2} \int_C q_z^2 \, dQ \right) \frac{2(1-\mu^2)}{Eh}.$$

Из (32) сразу получаем:

$$\int_C N_{1n}^2 \, dQ \leqslant \rho_2, \quad \int_C N_{2n}^2 \, dQ \leqslant \rho_2, \quad \int_C N_{12n}^2 \, dQ \leqslant \rho_2, \tag{33}$$

причем ρ_2 не зависит от n.

Теперь легко доказать важное для дальнейшего соотношение:

$$\int_C |A(w_n)| \, dQ \leqslant \rho_3 \tag{34}$$

равномерно для всех n.

Действительно,

$$\int_C |A(w_n)| \, dQ \leqslant \frac{1}{D} \int_C \{ |N_{1n}| (|k_1| + |w_{nxx}|) + \\ + |N_{2n}| (|k_2| + |w_{nyy}|) + 2 |N_{12n}| \cdot |w_{nxy}| + |q_z| \} \, dQ. \tag{35}$$

Применяя к правой части (35) неравенство Буняковского и учитывая (33), (29), а также интегрируемость с квадратом k_1, k_2, q_z, мы получим (34).

Перейдем к доказательству утверждения 2 о компактности w_n в B. Для этого построим вспомогательную последовательность

$$\overline{w}_n(P) = \int_C G(P, Q) A(w_n) \, dQ \tag{36}$$

и рассмотрим $v_n = \nabla^2 \overline{w}_n$. Легко видеть, что v_n принадлежит L_2. Докажем, что v_n компактна в L_2.

Действительно,

$$v_n = \int_C \nabla_P^2 G(P, Q) A(w_n) \, dQ$$

и

$$\int\limits_C v_n^2\, dQ = \int\limits_C\int\limits_C\int\limits_C \nabla_P^2 G(P,\ Q_1)\, \nabla_P^2 G(P,\ Q_2)\, A(w_n)\, A(w_n)\, dQ_1\, dQ_2\, dP =$$

$$= \int\limits_C\int\limits_C \Omega(Q_1,\ Q_2)\, A(w_n)\, A(w_n)\, dQ_1\, dQ_2, \qquad (37)$$

где

$$\Omega(Q_1, Q_2) = \int\limits_C \nabla_P^2 G(P,\ Q_1)\, \nabla^2 G(P,\ Q_2)\, dP = G(Q_1,\ Q_2). \qquad (38)$$

Из (37) и (38) получаем:

$$\int\limits_C v_n^2\, dP = \int\limits_C\int\limits_C G(Q_1,\ Q_2)\, A(w_n)\, A(w_n)\, dQ_1 dQ_2. \qquad (39)$$

Учитывая, что $G(Q_1,\ Q_2)$ ограничена, если $Q_1,\ Q_2$ изменяются в замкнутой области $\overline{C} \times \overline{C}$, из (39) получим:

$$\int\limits_C v_n^2\, dP \leqslant G_{\max} \int\limits_C\int\limits_C A(w_n)\, A(w_n)\, dQ_1 dQ_2 \leqslant G_{\max}\, \rho_3^2 \qquad (40)$$

равномерно для всех n.

Таким образом последовательность v_n равномерно ограничена по норме в L_2.

Далее, имеем:

$$\int\limits_C [v_n(P+h) - v_n(P)]^2\, dP = \int\limits_C\int\limits_C\int\limits_C [\nabla_P^2 G(P+h,\ Q_1) -$$

$$- \nabla_P^2 G(P,\ Q_1)]\, [\nabla_P^2 G(P+h,\ Q_2) - \nabla_P^2 G(P,\ Q_2)] \cdot$$

$$\cdot A(w_n)\, A(w_n)\, dP\, dQ_1\, dQ_2 =$$

$$= \int\limits_C\int\limits_C K(Q_1,\ Q_2,\ h)\, A(w_n)\, A(w_n)\, dQ_1\, dQ_2, \qquad (41)$$

где

$$K(Q_1,\ Q_2,\ h) = \int\limits_C [\nabla_P^2 G(P+h,\ Q_1) - \nabla_P^2 G(P,\ Q_1)] \cdot$$

$$\cdot [\nabla_P^2 G(P+h,\ Q_2) - \nabla_P^2 G(P,\ Q_2)]\, dP = \int\limits_C L\, dP. \qquad (42)$$

Докажем, что если $|h| \to 0$, то $K(Q_1, Q_2, h)$ равномерно стремится к нулю. В самом деле, имеем:

$$K(Q_1,\ Q_2,\ h) = \int\limits_{C_1} L\, dP + \int\limits_{C_2} L\, dP,$$

где C_1 — некоторая пограничная зона области C достаточно малой площади, а $C_2 = C - C_1$.

Принимая во внимание, что $\int\limits_C L\, dP$ сходится равномерно, если Q_1, $Q_2 \subset \overline{C} \times \overline{C}$, можно подобрать C_1 таким образом, чтобы для всех h до-

статочно малого модуля выполнялось неравенство:

$$\int_{C_1} L\,dP < \frac{\varepsilon}{2}, \quad Q_1,\ Q_2 \subset \overline{C} \times \overline{C},$$

где ε — наперед заданное число.

Докажем, что $\int_{C_2} L\,dP$ можно сделать сколь угодно малым за счет выбора h. Действительно, как известно,

$$G(P,\ Q) = \frac{1}{8\pi} r_{PQ}^2 \ln r_{PQ} + g(P,\ Q),$$

где $g(P,\ Q)$ имеет производные всех порядков в области $C_2 \times C$. Поэтому в $\overline{C}_2$ имеем:

$$|\nabla_P^2 G(P+h,\ Q_1) - \nabla^2 G(P, Q_1)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{P,\ Q_1}}\right| + \\ + |\nabla_P^2 g(P+h,\ Q_1) - \nabla_P^2 g(P, Q_1)|. \tag{43}$$

В силу непрерывности производных $g(P,\ Q)$ в замкнутой области $\overline{C}_2 \times \overline{C}$

$$|\nabla_P^2 g(P+h,\ Q_1) - \nabla_P^2 g(P,\ Q_1)| \leqslant \delta(h),$$

где $\delta(h) \to 0$, если $h \to 0$, откуда следует:

$$|K(Q_1,\ Q_2,\ h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \\ + \int_{C_2} \left[\frac{1}{2\pi}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| + \delta(h)\right]\left[\frac{1}{2\pi}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_2}}{r_{PQ_2}}\right| + \delta(h)\right] dP \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left\{\int_{C_2}\left[\frac{1}{2\pi}\left|\frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| + \delta(h)\right]^2 dP\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \\ \cdot \left\{\int_{C_2}\left[\frac{1}{2\pi}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_2}}{r_{PQ_2}}\right| + \delta(h)\right]^2 dP\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Для доказательства равномерного стремления к нулю $K(Q_1,\ Q_2,\ h)$, очевидно, достаточно показать, что

$$\int_{C_2} \ln\left|\frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP \to 0$$

равномерно относительно $Q_1 \subset \overline{C}$, если $|h| \to 0$.

Легко видеть, что

$$\int_{C_2}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP \leqslant \int_{D}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP, \tag{45}$$

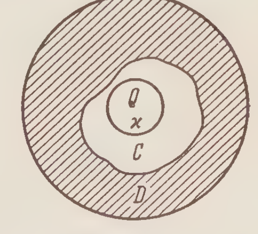


Рис. 2

где первый интеграл распространен на круг с центром в точке Q_1 и радиусом, равным диаметру области C (рис. 2).

Далее,

$$\int_{C_2}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP \leqslant \int_{\varkappa}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP + \int_{D-\varkappa}\left|\ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}}\right| dP, \tag{46}$$

где $\varkappa$ — круг достаточно малого радиуса.

Выберем радиус круга $\varkappa$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{\varkappa} \left| \ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}} \right| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

причем, очевидно, число ε можно считать зависящим только от радиуса круга $\varkappa$ и не зависящим от h, если оно мало. После этого можно выбрать h настолько малым, что будет выполнено неравенство:

$$\int\limits_{D-\varkappa} \left| \ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}} \right| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{C_2} \left| \ln \frac{r_{P+h,\ Q_1}}{r_{PQ_1}} \right| dP \leqslant \varepsilon. \tag{47}$$

Из (47) вытекает, что $|K(Q_1, Q_2, h)| \to 0$ при $h \to 0$ равномерно относительно $Q_1,\ Q_2 \subset \overline{C} \times \overline{C}$.

Из (41) и из (34) в силу этого вытекает, что

$$\int\limits_{C} [v_n(P+h) - v_n(P)]^2\, dP \to 0, \text{ если } |h| \to 0,$$

равномерно относительно h.

В силу критерия компактности в L_2 [см. ([2]), ([3])] можно заключить, что v_n содержит сходящуюся в среднем последовательность. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем считать, что v_n и есть эта сходящаяся последовательность.

В силу граничных условий (8), сходятся в среднем последовательности $\overline{w}_{nxx},\ \overline{w}_{nxy},\ \overline{w}_{nyy}$. Рассмотрим последовательность w_n, соответствующую выделенной последовательности.

В силу самого способа определения w_n, имеем:

$$w_n = \int\limits_{C} G_n(P,\ Q)\, A(Q)\, dQ. \tag{48}$$

Вычитая соотношение (48) из (36), получим:

$$\overline{w}_n - w_n = \int\limits_{C} R_n(P,\ Q)\, A(Q)\, dQ, \tag{49}$$

где

$$R_n(P,\ Q) = G(P,\ Q) - G_n(P, Q) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(Q)}{\lambda_i}.$$

Далее, из (49) имеем:

$$\int\limits_{C} (\nabla^2 \overline{w}_n - \nabla^2 w_n)^2\, dP =$$

$$= \iiint\limits_{CCC} \nabla^2_P R_n(P, Q_1)\, \nabla^2_P R_n(P,\ Q_2)\ A(w_n)\, A(w_n)\, dP\, dQ_1\, dQ_2. \tag{50}$$

Меняя порядок интегрирования в (50) (что возможно, так как

$\nabla^2_P R_n(P, Q)$ имеет логарифмическую особенность), получим:

$$\int_C (\nabla^2 \overline{w}_n - \nabla^2 w_n)^2 \, dP = \iint_{CC} R_n(Q_1, Q_2) A(w_n) A(w_n) \, dQ_1 dQ_2, \tag{51}$$

поскольку

$$\int_C \nabla^2_P R_n(P, Q_1) \nabla^2 R_n(P, Q_2) \, dP = R_n(Q_1, Q_2). \tag{52}$$

Так как ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P) \varphi_i(Q)}{\lambda_i}$$

в силу теоремы Мерсера равномерно сходится, то R_n стремится к нулю равномерно относительно Q_1, Q_2. В таком случае из (51) заключаем, что

$$\lim \int_C (\nabla^2 \overline{w}_n - \nabla^2 w_n)^2 \, dP |_{n \to \infty} = 0, \tag{53}$$

т. е. что последовательность w_n сходится в среднем. Этим по существу и доказано утверждение 2 § 1.

Из полноты пространства B [см. (2), стр. 48—52] о вложении функциональных пространств следует, что существует функция w, обладающая обобщенными производными w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, и такая, что $w_n \to w_n$ равномерно, $w_{nx} \to w_x$, $w_{ny} \to w_y$ по норме в L_p при любом $p > 1$, причем w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy} сходятся к w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} в среднем. Далее будет доказано утверждение 3 § 1 о том, что w удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (16), откуда будет следовать существование у w обычных производных до 2-го порядка включительно.

Прежде чем доказать утверждение 3 § 1, установим следующие три леммы.

ЛЕММА А. *Пусть $\Phi(Q)$ интегрируема в C с квадратом, а $\psi(Q)$ интегрируема с любой степенью $p > 1$. Тогда $\Phi(Q)\psi(Q)$ интегрируема со степенью $2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leqslant 2$.*

Доказательство леммы получаем непосредственно, применяя неравенство Гельдера:

$$\int_C (\Phi\psi)^{2-\varepsilon} dQ \leqslant \left\{ \int_C |\Phi|^{\frac{2-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot dQ \right\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \int_C |\psi|^{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} 2} dQ \right\}^{\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_C \Phi^2 dQ \right\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \int_C |\psi|^{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} 2} dQ \right\}^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{54}$$

ЛЕММА В. *Пусть последовательность a_n сходится в среднем, а последовательность b_n сходится по норме в L_p при любом $p > 1$. Тогда $a_n b_n$ сходится по норме в L_q, причем $q = 2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2$.*

Действительно, в силу неравенства Минковского, имеем:

$$\left\{\iint\limits_C (a_m b_m - a_n b_n)^{2-\varepsilon}\, dQ\right\}^{\frac{1}{2-\varepsilon}} =$$

$$= \left\{\iint\limits_C [a_m(b_m - b_n) + b_n(a_m - a_n)]^{2-\varepsilon}\, dQ\right\}^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\iint\limits_C |a_m(b_m - b_n)|^{2-\varepsilon}\, dQ\right\}^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \left\{\iint\limits_C |b_n(a_m - a_n)|^{2-\varepsilon}\, dQ\right\}^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \tag{55}$$

Применяя к (55) неравенство Гельдера, получим:

$$\left\{\iint\limits_C (a_m b_m - a_n b_n)^{2-\varepsilon}\, dQ\right\}^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\iint\limits_C a_m^2 dQ\right\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \left\{\iint\limits_C |b_m - b_n|^{\frac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}\, dP\right\}^{\frac{\varepsilon}{2}} +$$

$$+ \left\{\iint\limits_C (a_m - a_n)^2\, dQ\right\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \left\{\iint\limits_C |b_n|^{\frac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}\, dQ\right\}^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{56}$$

Неравенство (56) и доказывает лемму B.

ЛЕММА C. *Пусть последовательность $\theta_n(Q)$ сходится по норме в $L_{2-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 2$. Тогда*

$$B_n = \int\limits_C G_{11x}(P, Q)\, \theta_n(Q)\, dQ, \tag{57}$$

$$D_n = \int\limits_C G_{11y}(P, Q)\, \theta_n(Q)\, dQ \tag{58}$$

сходятся по норме в L_2.

Рассмотрим, например, последовательность B_n. Учитывая, что

$$|G_{11x}(P, Q)| \leqslant \frac{\nu}{r_{PQ}},$$

где ν — некоторая постоянная для данной области, получаем:

$$|B_m - B_n| \leqslant \nu \int\limits_C \frac{1}{r_{PQ}} |\theta_m - \theta_n|\, dQ. \tag{59}$$

В силу известных свойств интегралов типа потенциала [см. ([2])],

$$\| B_m - B_n \|_{L_{q^*}} \leqslant K_1 \| \theta_m - \theta_n \|_{L_{2-\varepsilon}},$$

причем

$$q^* < \frac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{60}$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым, то, очевидно, q^* может быть выбрано равным 2. На основании приведенных лемм легко доказать, что последовательности ε_{1n}, ε_{2n}, ε_{12n} сходятся в среднем.

Действительно, рассмотрим, например, последовательность

$$\varepsilon_{1n} = u_{1n} + \frac{1}{2} w_{nx}^2 + u_{0x}. \tag{61}$$

Очевидно, достаточно доказать сходимость в среднем последовательности u_{1n}. Из формул (10), (12) и (13) видно, что для этого достаточно доказать сходимость в среднем последовательностей вида:

$$B_n = \int_C G_{11x} w_{nx} w_{nxx}\, dQ, \quad D_n = \int_C G_{11x} w_{ny} w_{nxy}\, dQ \tag{62}$$

и т. д. Поскольку доказано, что w_{nx}, w_{ny} принадлежат L_p, $p > 0$, а w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy} принадлежат L_2, то, в силу леммы А, последовательности

$$w_{nx} w_{nxx}, \quad w_{nx} w_{nxy}, \ldots$$

принадлежат $L_{2-\varepsilon}$ и, в силу леммы В, сходятся по норме в этом пространстве.

В силу леммы С, в среднем сходятся B_n, D_n и т. д. Таким образом доказана сходимость в среднем последовательностей ε_{1n}, ε_{2n}, ε_{12n}.

Из формулы (2) вытекает сходимость в среднем N_{1n}, N_{2n}, N_{12n}.

Переходим к доказательству утверждения 3 § 1. Рассмотрим

$$d = w - \int_C G(P, Q) A(w)\, dQ. \tag{63}$$

Имеем:

$$d = w - \overline{w}_n - \int_C G(P, Q) [A(w) - A(\overline{w}_n)]\, dQ =$$

$$= w - \overline{w}_n - \int_C G(P, Q) [N_1(k_1 - w_{xx}) - N_{1n}(k_1 - w_{nxx}) + \cdots]\, dQ. \tag{64}$$

Далее,

$$|d| \leqslant |w - \overline{w}_n| + |G|_{\max} \cdot \Big\{ \int_C |k_1|\, |N_1 - N_{1n}|\, dQ +$$

$$+ \int_C |N_1| \cdot |w_{xx} - w_{nxx}|\, dQ + \int_C |w_{nxx}| \cdot |N_1 - N_{1n}|\, dQ + \cdots \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant |w - \overline{w}_n| + |G|_{\max} \cdot \Big\{ \Big(\int_C k_1^2\, dQ \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_C (N_1 - N_{1n})^2\, dQ \Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big(\int_C N_1^2 dQ \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\int_C (w_{xx} - w_{nxx})^2\, dQ \Big]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big(\int_C w_{nxx}^2\, dQ \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\int_C (N_1 - N_{1n})^2\, dQ \Big]^{\frac{1}{2}} + \cdots \Big\}. \tag{65}$$

В силу интегрируемости с квадратом k_1, k_2, равномерной сходимости $\overline{w}_n$, сходимости в среднем w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy} и N_{1n}, N_{2n}, N_{12n} легко заключить, что d не может отличаться от нуля, что и доказывает требуемое утверждение.

Замечание 1. Как следует из самого способа доказательства всех утверждений, они останутся справедливыми, если вместо условия (7)

взять любые относительно тангенциального напряженного состояния граничные условия, при которых доказано существование решения соответствующей плоской задачи теории упругости.

Замечание 2. Все доказанные утверждения остаются в силе, если вместо системы функций $\varphi_n(P)$ применить ортонормированную систему $\psi_n(P)$, удовлетворяющую следующему условию: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nabla_P^2 \psi_n(P) \psi_n(Q)$$

сходится в среднем к $\nabla_P^2 G(P, Q)$ по аргументу P, причем остаток ряда, будучи функцией Q, должен равномерно стремиться к нулю, если $Q \subset \overline{C}$.

Замечание 3. Последовательности ε_{1n}, ε_{2n}, ε_{12n}, N_{1n}, N_{2n}, N_{12n}, как легко видеть, сходятся по норме в L_p при любом $p > 1$, если ε_{10}, ε_{20}, $\varepsilon_{120} \subset L_p$.

Это важно с точки зрения практического применения метода.

Отметим, что возможно построить и другое доказательство существования решений нашей задачи с применением некоторых результатов, сформулированных в ([4]).

Поступило
20.V.1954

ЛИТЕРАТУРА

1 Власов В. З., Общая теория оболочек, М.— Л., 1949.

2 Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. гос. университета им. А. А. Жданова, 1950.

3 Немыцкий В. В., Метод неподвижных точек в анализе, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936), 141—175.

4 Красносельский М. А., Новые теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, т. 88, 6 (1953), 949—952.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 187—200

Л. А. ДИКИЙ

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

(*Представлено академиком* **А. А. Дородницыным**)

В работе доказываются некоторые тождества, связывающие ряды, содержащие собственные значения и собственные функции, с коэффициентами дифференциального выражения. Изучается поведение некоторых аналитических функций, относящихся к дифференциальному оператору.

При изучении собственных значений дифференциального оператора весьма полезную роль может играть так называемая дзета-функция оператора [см. ([1]), ([2])]. Это есть функция

$$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s},$$

где λ_n — собственные значения. Ее поведение в комплексной плоскости зависит от характера роста λ_n, и, наоборот, зная это поведение, можно судить об асимптотике чисел λ_n. С другой стороны, функция $Z(s)$, как мы увидим, может быть выражена через коэффициенты дифференциального уравнения.

В работе дается способ вычисления коэффициентов асимптотического разложения чисел λ_n по степеням n и вычисляются суммы $\sum\lambda_n^k$. (Расходящиеся ряды нужно надлежащим образом «регуляризовать».) Первая из этих сумм (при $k=1$) была впервые вычислена И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [см. ([3]), а также ([4])]. Остальные суммы вычислены независимо Гельфандом и нами. Полученные формулы могут служить для вычисления собственных чисел.

Далее, совершенно сходным путем рассматривается функция

$$Z(s;\, x,\, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\varphi_n(x)\,\varphi_n(y),$$

где $\varphi_n(x)$ — нормированные собственные функции, и изучается асимптотика последних. Доказывается ряд новых тождеств, содержащих собственные функции.

1. Основные результаты. Методы, развиваемые в настоящей работе, пригодны для изучения дифференциальных операторов любого

порядка на конечном отрезке. Для простоты будем рассматривать оператор

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)u, \quad u(0) = u(\pi) = 0. \tag{1}$$

а) Важную роль в дальнейшем будут играть функции $A_l(s, x)$ (x задается на отрезке $[0, \pi]$, s — комплексный параметр). Мы определим их следующим образом:

$$A_l(s, x) = \sum_{m=0}^{l} B_{l,m}(x) \binom{s}{\frac{l+m}{2}},$$

где

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Если $l+m$ — нечетное число, то $B_{l,m}(x)$ считается равным нулю. В свою очередь, $B_{l,m}(x)$ определяются из рекуррентных формул:

$$\begin{gathered} B_{0,0}(x) \equiv 1, \quad B_{l,m}(x) \equiv 0 \text{ при } m > l, \\ B_{l+2,m}(x) = p(x) B_{l,m}(x) - B''_{l,m}(x) + 2iB'_{l+1,m-1}(x), \end{gathered} \tag{2}$$

причем $B_{l,m}$ считается равным нулю, если l или m — отрицательное число.

Чем больше членов асимптотики λ_n мы хотим узнать, тем больше функций $A_l(s, x)$ нужно вычислить. Например,

$$\left.\begin{gathered} A_0(s, x) = 1, \quad A_1(s, x) = 0, \quad A_2(s, x) = sp(x), \\ A_3(s, x) = 2i\binom{s}{2} p'(x), \quad A_4(s, x) = -4p''(x)\binom{s}{3} + (p^2 - p'')\binom{s}{2}, \\ A_5(s, x) = -4ip'''\left[2\binom{s}{4} + \binom{s}{3}\right] + 6ipp'\binom{s}{3} \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

и т. д.

б) Образуем функцию $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$. Ряд сходится при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

ТЕОРЕМА 1. *В частном случае, когда функция $p(x)$ со всеми своими производными обращается в нуль на концах интервала $[0, \pi]$, функцию $Z(s)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексного переменного s. Она имеет простые полюсы в точках $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$. Вычет в точке $\frac{1}{2}$ равен $\frac{1}{2}$, в точке $-k+\frac{1}{2}$ вычет равен*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} A_{2k}\left(k - \frac{1}{2}, x\right) dx. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. *В общем случае полюсы находятся в тех же точках. Вычет в точке $s = -k + \frac{1}{2}$ равен (штрихи означают производные по x)*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} A_{2k}\left(k - \frac{1}{\pi}, \pi\right) dx + \frac{A_{2k-1}\left(k-\frac{1}{2}, \pi\right) - A_{2k-1}\left(k - \frac{1}{2}, 0\right)}{2^2\pi i} +$$

$$+\frac{A'_{2k-2}\left(k-\frac{1}{2},\pi\right)-A'_{2k-2}\left(k-\frac{1}{2},0\right)}{2^3\pi i^2}+\frac{A''_{2k-3}\left(k-\frac{1}{2},\pi\right)-A''_{2k-3}\left(k-\frac{1}{2},0\right)}{2^4\pi i^3}+$$
$$+\cdots+\frac{A_2^{(2k-3)}\left(k-\frac{1}{2},\pi\right)-A_2^{(2k-3)}\left(k-\frac{1}{2},0\right)}{2^{2k-1}\,i^{2k-2}}. \qquad (5)$$

в) Мы не доказываем факта существования асимптотического разложения

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \cdots, \qquad (6)$$

но из наших формул нетрудно получить выражения для коэффициентов c_k. В самом деле, возводя разложение (6) в степень $-s$, получим:

$$\lambda_n^{-s} = n^{-2s} - sc_0 n^{-2s-2} + \left[\frac{s(s+1)}{2}c_0^2 - sc_2\right]n^{-2s-4} + \cdots$$
$$\cdots + n^{-2s-2m}\sum_{r=1}^{m}\binom{-s}{r}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=m-r} c_{2\alpha_1}c_{2\alpha_2}\cdots c_{2\alpha_r} + \cdots,$$

откуда

$$\sum \lambda_n^{-s} = \zeta(2s) - sc_0\zeta(2s+2) + \cdots.$$

Здесь $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ есть дзета-функция Римана.

Ряд, стоящий в левой части, сходится при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Если взять несколько членов суммы в правой части, кончая $\zeta(2s+l)$, то остаток представляет функцию, аналитическую при $\operatorname{Re} s > -\frac{l+1}{2}$. Известно, что $\zeta(s)$ имеет один простой полюс при $s=1$ с вычетом 1. Следовательно, $Z(s)$ имеет простые полюсы там, где аргумент одной из ζ-функций в правой части (2) равен 1, т. е. в точках $s=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$. Вычет в точке $s=\frac{1}{2}$ равен $\frac{1}{2}$, в точке $s=-k+\frac{1}{2}$ вычет равен

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\binom{k-\frac{1}{2}}{r}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=m-r} c_{2\alpha_1}c_{2\alpha_2}\ldots c_{2\alpha_r}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (5), можно получить рекуррентную систему уравнений для определения коэффициентов асимптотики. В каждое следующее уравнение входит новый неизвестный коэффициент в первой степени. Так,

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx,$$

$$c_2 = -\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx\right)^2 + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi p^2(x)\,dx - \frac{p'(\pi)-p'(0)}{12\pi}.$$

г) После того как мы аналитически продолжим функцию $Z(s)$ на всю плоскость, можно найти ее значения в целых отрицательных точках, т. е. $Z(-1)$, $Z(-2)$, $Z(-3)$. Условно можно называть эти значения суммами $\Sigma\lambda_n$, $\Sigma\lambda_n^2$, $\Sigma\lambda_n^3, \ldots$.

ТЕОРЕМА 3. *В частном случае, когда функция $p(x)$ со всеми своими производными обращается в нуль на концах интервала* $[0, \pi]$,

$$\sum \lambda_n^k = 0. \tag{7}$$

ТЕОРЕМА 4. *В общем случае*

$$\sum \lambda_n^k = \frac{A_{2k}(k, 0) + A_{2k}(k, \pi)}{(2i)^2} + \frac{A'_{2k-1}(k, 0) + A'_{2k-1}(k, \pi)}{(2i)^3} + \\ + \frac{A''_{2k-2}(k, 0) + A''_{2k-2}(k, \pi)}{(2i)^4} + \cdots + \frac{A_2^{(2k-2)}(k, 0) + A_2^{(2k-2)}(k, \pi)}{(2i)^{2k}}. \tag{8}$$

Заметим, что определить понятие $\Sigma\lambda_n$, $\Sigma\lambda_n^2$, ... можно и не прибегая к аналитическому продолжению. Напишем асимптотическое разложение

$$\lambda_n^k = n^{2k} + d_2(k)\, n^{2k-2} + d_4(k)\, n^{2k-4} + \cdots + d_{2k}(k).$$

Тогда мы утверждаем, что

$$Z(-k) = \sum (\lambda_n^k - n^{2k} - d_2 n^{2k-2} - \cdots - d_{2k}) - \frac{1}{2}\, d_{2k}.$$

Действительно, ряд

$$\sum [\lambda_n^{-s} - n^{-2s} - d_2(s)\, n^{-2s-2} - \cdots - d_{2k}(s) n^{-2s-2k}]$$

сходится при $\operatorname{Re} s > -k - \frac{1}{2}$, и сумма его равна

$$Z(s) - \zeta(2s) - d_2(s)\,\zeta(2s+2) - \cdots - d_{2k}(s)\,\zeta(2s+2k).$$

Учитывая, что $\zeta(-2l) = 0$ при l целом и большем нуля и $\zeta(0) = \frac{1}{2}$, мы получим требуемое равенство. Таким образом имеет место

ТЕОРЕМА 5. $\Sigma\lambda_n^k$ *или* $Z(-k)$ *можно понимать как сумму чисел* λ_n^k *без тех членов асимптотики* λ_n^k, *которые мешают сходимости. От суммы надо отнять еще половину свободного члена асимптотики.*

В развернутом виде первые два тождества (8) выглядят следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx - \frac{p(0) + p(\pi)}{4}, \; *$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n^2 - n^4 - \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx - \left[2c_2 + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= c_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx \right)^2 - \frac{p''(0) + p''(\pi)}{8} - \frac{p^2(0) + p^2(\pi)}{4},$$

где c_2 определяется формулой из в).

д) Для функции

$$Z(s; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \varphi_n(x)\, \varphi_n(y), \tag{9}$$

---

* См. ([3]) и ([4]).

где $\varphi_n(x)$ — нормированные собственные функции оператора, получаются аналогичные результаты. Ряд (9) сходится при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, и его можно аналитически продолжить на всю плоскость.

ТЕОРЕМА 6. *Функция* $Z(s; x, y)$ *при* $x \neq y$ *является целой. При* $x = y$ *она имеет простые полюсы в точках* $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$. *В точке* $\frac{1}{2}$ *вычет равен* $\frac{1}{2\pi}$, *в точке* $s = -k + \frac{1}{2}$ *вычет равен* $\frac{1}{2\pi} A_{2k}\left(k - \frac{1}{2}, x\right)$.

е) Аналогично тому, как это было сделано в п. в), можно составить рекуррентную систему для определения коэффициентов асимптотического разложения

$$\varphi_n(x) = \left[1 + \frac{a_2(x)}{n^2} + \frac{a_4(x)}{n^4} + \ldots\right] \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \\ + \left[\frac{a_1(x)}{n} + \frac{a_3(x)}{n^3} + \ldots\right] \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx. \tag{10}$$

Соответствующие формулы будут приведены в дальнейшем.

ж) ТЕОРЕМА 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k \varphi_n(x) \varphi_n(y) = 0 \tag{11}$$

(в смысле аналитического продолжения).

ТЕОРЕМА 8. $\Sigma \lambda_n^k \varphi_n(x) \varphi_n(y)$ *есть сумма сходящегося ряда, члены которого получаются из* $\lambda_n^k \varphi_n(x) \varphi_n(y)$ *вычитанием той части асимптотического разложения, которая мешает сходимости.*

2. Связь дзета-функции с коэффициентами дифференциального выражения. Наша задача — выразить функцию $Z(s)$ через коэффициенты дифференциального выражения. Введем оператор A^{-s} равенствами

$$A^{-s}\varphi_n = \lambda_n^{-s}\varphi_n.$$

Тем самым оператор A^{-s} будет определен для всех достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям. Очевидно,

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (A^{-s}\varphi_n, \varphi_n), \quad \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}.$$

Введем обозначения:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad \tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx.$$

Отправной точкой для всего исследования явится формула, выражающая равенство следов оператора в разных базисах:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A^{-s}\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (A^{-s}\psi_n, \psi_n), \quad \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Доказательство проводится так же, как и в конечномерном случае.

Если нам удастся определение оператора A^{-s} сделать независимым от собственных функций φ_n, то справа в равенстве (12) будет находиться известная функция от s, которую мы сможем аналитически продолжить на всю комплексную плоскость.

Возведем оператор A в целую положительную степень k, обозначив при этом $D = i\,\frac{d}{dx}$:

$$A^k = (D^2 + p)^k = D^{2k} + pD^{2k-2} + D^2pD^{2k-4} + D^4pD^{2k-6} + \cdots .$$

В каждом слагаемом операторы можно переставить так, чтобы слева стояли операторы умножения на функцию, а справа — операторы дифференцирования. При этом следует воспользоваться соотношением коммутации оператора D и оператора умножения на функцию f:

$$Df = fD + if'.$$

Расположим результат по убывающим степеням D:

$$A^k = D^{2k} + kpD^{2k-2} + ik(k-1)\,p'D^{2k-3} + \\ + \left\{\frac{k(k-1)}{2}\,p^2 - \left[\frac{2k(k-1)(k-2)}{3} + \frac{k(k-1)}{2}\right]p''\right\} D^{2k-4} + \cdots .$$

Запишем это равенство в следующей форме:

$$A^k = D^{2k} + A_2(k, x)\,D^{2k-2} + A_3(k, x)\,D^{2k-3} + \cdots \\ \cdots + A_l(k, x)\,D^{2k-l} + R_l(k, x, D); \qquad (13)$$

формулы для A_i будут приведены в следующем пункте. $A_i(k, x)$ представляют собой многочлены от k, коэффициенты которых зависят от $p(x)$ и производных. Остаточный член R_l обладает тем свойством, что $R_lD^{-2k+l+1}$ — ограниченный оператор. Мы это будем записывать следующим образом:

$$R_l(k, x, D) = O(D^{2k-l-1}).$$

Основную роль в дальнейшем играет

ЛЕММА. *Для любого комплексного s имеет место формула:*

$$A^s = D^{2s} + A_2(s, x)\,D^{2s-2} + A_3(s, x)\,D^{2s-3} + \cdots \\ \cdots + A_l(s, x)\,D^{2s-l} + R_l(s, x, D), \qquad (14)$$

где

$$R_l(s, x, D) = O(D^{2s-l-1}).$$

Здесь оператор D^{2s-m} понимается как $(D^2)^{s-m}\cdot D^m$ (D^2 — положительный оператор). Заметим, что $R_l(s, x, D) = 0$ для s целых и меньших $\frac{l+1}{2}$.

3. Доказательство основной леммы. Формулы для $A_l(s, x)$.

а) Аналогично тому, как это было сделано для оператора A^k [см. формулу (13)], разложим оператор $(A - z)^k$, где z — комплексный параметр, по убывающим степеням оператора $D^2 - z$, учитывая соотношение коммутации:

$$(D^2 - z)f = f(D^2 - z) + 2if'D - f''.$$

Раскрыв скобки в выражении

$$[(D^2 - z) + p]^k$$

и переставив налево все операторы умножения на функцию, мы, в соответствии с правилами коммутации, получим следующее выражение:

$$(A - z)^k = \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(k, x)(D^2 - z)^{k - \frac{l+m}{2}} D^m. \tag{15}$$

Здесь $A_{l,m}(k, x)$ представляют собой многочлены от k, причем важно, что они от z не зависят. Эти многочлены равны нулю, если $l + m$ — число нечетное. Положив $z = 0$ и сравнивая полученную формулу с формулой (13), мы находим:

$$A_l(k, x) = \sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(k, x).$$

Умножим обе части (15) на $(A - z)$. Слева мы получим $(A - z)^{k+1}$, а справа заменим $(A - z) A_{l,m}(k, x)$ равным ему выражением:

$$A_{l,m}(k, x)(D^2 - z) - A''_{l,m}(k, x) + p(x) A_{l,m}(k, x) + 2iA'_{l,m}(k, x)D$$

(штрихи означают производные по x). Сравнивая это выражение с формулой для $(A - z)^{k+1}$, найдем рекуррентное соотношение:

$$A_{l+2,m}(k + 1, x) - A_{l+2,m}(k, x) =$$
$$= -A''_{l,m}(k, x) + p(x) A_{l,m}(k, x) + 2iA'_{l+1,m-1}(k, x). \tag{16}$$

Начальные условия при решении этой рекуррентной системы следующие:

$$A_{0,0}(k, x) \equiv 1, \quad A_{l,m}(k, x) = 0,$$

если $m > l$ и если один из индексов отрицательный. Кроме того,

$$A_{l,m}(0, x) = 0,$$

если l или m отличны от нуля.

Имея в виду формулу для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} = \binom{k}{m},$$

легко по индукции доказать, что

$$A_{l,m}(k, x) = B_{l,m}(x) \binom{k}{\frac{l+m}{2}}, \tag{17}$$

где $B_{l,m}(x)$ от k не зависят. Из рекуррентной формулы (16) получим рекуррентную формулу (2).

б) Докажем, что

$$(A - z)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(-1, x)(D^2 - z)^{-1 - \frac{l+m}{2}} D^m, \tag{18}$$

причем ряд здесь бесконечный и равенство асимптотическое, т. е. если оборвать ряд на некотором l, то остаток есть $O(D^{3-l})$. Соотношение (16), верное для целых положительных k, верно и тождественно для любых k, в том числе и для $k=-1$. Запишем формулу (18) с остаточным членом:

$$(A-z)^{-1} = \sum_{l=0}^{l_1} \sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(-1, x)(D^2-z)^{-1-\frac{l+m}{2}} D^m + R_{l_1}. \qquad (18')$$

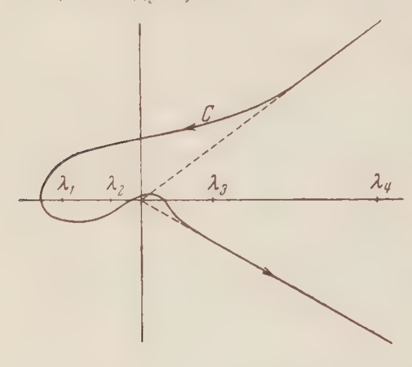
Умножим обе части этого равенства на $A-z$. Учитывая рекуррентные формулы (16), выводим:

$$1 = 1 + \sum_{l=0}^{l_1-2} \sum_{m=0}^{l} A_{l+2,m}(0, x)(D^2-z)^{-1-\frac{l+m}{2}} D^m +$$

$$+ \sum_{l=l_1-1}^{l_1} \sum_{m=0}^{l} [-A''_{l,m}(-1, x) + p(x) A_{l,m}(-1, x)](D^2-z)^{-1-\frac{l+m}{2}} D^m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} 2iA'_{l_1,m-1}(-1, x)(D^2-z)^{-\frac{l_1+m}{2}} D^m + (A-z) R_{l_1}.$$

Так как $A_{l,m}(0, x) = 0$ при $l > 0$, то первая двойная сумма в этой формуле равна нулю. Остальные суммы представляют собой $Q(D^{-l_1})$ Отсюда следует, что



$$0 = (A-z) R_{l_1} + O(D^{-l_1})$$

и

$$R_{l_1} = O(D^{-l_1}).$$

Более того, если z лежит на контуре C, изображенном на рисунке, то нормы операторов $R_{l_1} \cdot D^{l_1}$ ограничены в совокупности одной константой. В самом деле,

$$\left\| \frac{D^2}{D^2-z} \right\| = \max \left| \frac{n^2}{n^2-z} \right|,$$

но $|n^2-z| > \mathrm{const} \cdot n^2$ для z, лежащих на C.

в) Будем доказывать лемму сначала в предположении, что $\mathrm{Re}\, s < -1$. Воспользуемся формулой

$$\binom{s}{n} a^{s-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^s dz}{(z-a)^{n+1}}$$

контур обходит вокруг точки a). Из этой формулы следует, что

$$A^s = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^s dz}{z-A}.$$

В самом деле, $\frac{1}{z-A}$ — оператор, ограниченный по норме одной константой на контуре C. При $\mathrm{Re}\, s < -1$ интеграл сходится по норме операторов, следовательно, это — ограниченный оператор. Кроме

того,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^s dz}{z-A}\varphi_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^s dz}{z-\lambda_n}\varphi_n = \lambda_n^s\varphi_n = A^s\varphi_n,$$

так как подинтегральная функция быстро убывает на бесконечности Совершенно таким же путем проверим, что

$$\binom{s}{n}(D^2)^{s-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^s dz}{(z-D^2)^{n+1}}.$$

Умножим обе части (18′) на $\frac{1}{2\pi i}z^s$ и проинтегрируем по контуру C. Получим:

$$-A^s = \sum_{l=0}^{l}\sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(-1,\ x)\cdot(-1)^{-1-\frac{l+m}{2}}\binom{s}{\frac{l+m}{2}}(D^2)^{s-\frac{l+m}{2}}D^m +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^s R_{l_1}\,dz,$$

где остаточный член имеет требуемый порядок малости. Заменим $A_{l,m}(-1,\ x)$ его значением $B_{l,m}(x)\cdot(-1)^{\frac{l+m}{2}}$ по формуле (17):

$$A^s = \sum_{l=0}^{l_1}\sum_{m=0}^{l} A_{l,m}(s,\ x)\,D^{2s-l} + O(D^{-l}) =$$

$$=\sum_{l=0}^{l_1} A_l(s,\ x)\,D^{2s-l} + O(D^{-l_1}),$$

что и является утверждением леммы. Так как l_1 произвольно, то ясно, что остаток можно записать как $O(D^{2s-l_1-1})$.

Чтобы доказать эту формулу для $\mathrm{Re}\,s > -1$, следует умножить обе ее части на A. Применив справа перестановочные соотношения и рекуррентные формулы, можно получить ту же формулу для $\mathrm{Re}\,s < 0$ и т. д.

4. Аналитическое продолжение дзета-функции. Теперь нетрудно вычислить $\Sigma(A^{-s}\psi_n\psi_n)$. Мы имеем:

$$A^{-s}\psi_n = n^{-2s}\psi_n + A_2(-s,\ x)\,n^{-2s-2}\,\psi_n + A_3(-s,\ x)\,in^{-2s-3}\,\tilde{\psi}_n +$$
$$+ A_4(-s,\ x)\,n^{-2s-4}\,\psi_n + \dots + A_l(-s,\ x)\,n^{-2s-l}\psi_n + R_l\psi_n,$$

если l — четное. Но

$$R_l\psi_n = R_l D^{2s+l+1}n^{-2s-l-1}i\tilde{\psi}_n = O(n^{-2s-l-1}).$$

Отсюда получаем:

$$Z(s) = \sum n^{-2s} + \sum n^{-2s-2}\,(A_2(-s,\ x)\,\psi_n,\ \psi_n) +$$
$$+\sum n^{-2s-3}\,(iA_3(-s,\ x)\,\tilde{\psi}_n\psi_n) + \dots$$
$$\dots + \sum n^{-2s-l}\,(A_l(-s,\ x)\,\psi_n, \psi_n) + \sum O(n^{-2s-l-1}).$$

Остается найти аналитическое продолжение каждого члена. Имеем:

$$\psi_n^2 = \frac{2}{\pi}\sin^2 nx = \frac{1}{\pi}(1-\cos 2nx), \quad \tilde{\psi}_n\psi_n = \frac{1}{\pi}\sin 2nx.$$

Следовательно,

$$Z(s) = \zeta(2s) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi A_2(-s, x)\,dx\cdot\zeta(2s+2) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi A_4(-s, x)\,dx\cdot\zeta(2s+4) + \cdots + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi A_l(-s, x)\,dx\cdot\zeta(2s+l) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum n^{-2s-2}\int_0^\pi A_2(-s, x)\cos 2nx\,dx +$$

$$+\frac{i}{\pi}\sum n^{-2s-3}\int_0^\pi A_3(-s, x)\sin 2nx\,dx -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum n^{-2s-4}\int_0^\pi A_4(-s, x)\cos 2nx\,dx - \cdots + \sum O(n^{-2s-l-1}). \qquad (19)$$

Слагаемое $\Sigma O(n^{-2s-l-1})$ представляет собой функцию, аналитическую при $\operatorname{Re} s > -\frac{l}{2}$; $\zeta(s)$ есть дзета-функция Римана Σn^{-s}.

Чтобы доказать теорему 1, заметим, что коэффициенты Фурье

$$\int_0^\pi A_k(-s, x)\cos 2nx\,dx$$

для рассматриваемого в теореме случая стремятся к нулю быстрее любой отрицательной степени n, так как $A_l(s, x)$ также обращается в нуль со всеми производными на концах отрезка $[0, \pi]$. Поэтому слагаемые в формуле (19), содержащие косинусы, являются целыми функциями. Полюсы у $Z(s)$ имеются лишь в тех точках, где аргумент одной из ζ-функций равен единице, т. е. в точках $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}, \ldots$. Вычет $\zeta(s)$ при $s=1$ равен 1. Отсюда получаем вычеты функции $Z(s)$, которые и указаны в теореме 1. Мы продолжили функцию в область $\operatorname{Re} s > -\frac{l}{2}$, но l произвольно.

В общем случае (теорема 2) полюсы имеют и слагаемые в формуле (19), содержащие косинусы и синусы. Мы найдем эти полюсы при помощи интегрирования по частям:

$$\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{f'(\pi)-f'(0)}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2 i^2}\int_0^\pi f''(x)\cos 2nx\,dx =$$

$$= \frac{f'(\pi)-f'(0)}{(2n)^2} + \frac{f'''(\pi)-f'''(0)}{(2n)^4 i^2} + \frac{f^{\mathrm{V}}(\pi)-f^{\mathrm{V}}(0)}{(2n)^6 i^4} + O\left(\frac{1}{n^8}\right) = \cdots$$

и

$$\int_0^\pi f(x)\sin 2nx\,dx = \frac{f(\pi)-f(0)}{2ni^2} + \frac{f''(\pi)-f''(0)}{(2n)^3 i^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) = \cdots.$$

Теперь легко сосчитать

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-2}\int_0^{\pi} A_2(-s,x)\cos 2nx\,dx = \frac{A_2'(-s,\pi)-A_2'(-s,0)}{(2i)^2\pi}\zeta(2s+4)+$$
$$+\frac{A_2'''(-s,\pi)-A_2'''(-s,0)}{(2i)^4\pi}\zeta(2s+6)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_2^{(2k-3)}(-s,\pi)-A_2^{(2k-3)}(-s,0)}{(2i)^{2k-2}\pi}\zeta(2s+2k)-$$
$$-\frac{1}{(2i)^{2k-2}\pi}\sum n^{-2s-2k}\int_0^{\pi} A_2^{(2k-2)}(-s,x)\cos 2nx\,dx;$$

$$\frac{i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-3}\int_0^{\pi} A_3(-s,x)\sin 2nx\,dx= \tag{20}$$
$$=\frac{A_3(-s,\pi)-A_3(-s,0)}{2i\pi}\zeta(2s+4)+\frac{A_3''(-s,\pi)-A_3''(-s,0)}{(2i)^3\pi}\zeta(2s+6)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_3^{(2k-4)}(-s,\pi)-A_3^{(2k-4)}(-s,0)}{(2i)^{2k-3}\pi}\zeta(2s+2k)-$$
$$-\frac{1}{(2i)^{2k-3}}\sum n^{-2s-2k}\int_0^{\pi} A_3^{(2k-3)}(-s,x)\cos 2nx\,dx.$$

Сумма всех коэффициентов при $\zeta(2s+2k)$, умноженная на $\frac{1}{2}$ (вычет функции $\zeta(2s+2k)$), и дает дополнительный вычет $Z(s)$ при $s=-k+\frac{1}{2}$. Мы получили утверждение теоремы 2.

5. Вычисление $\Sigma\lambda_n^k$. Найдем значение функции $Z(s)$ в целой отрицательной точке $s=-k$. При этом мы воспользуемся формулой (19) и тем обстоятельством, что $\zeta(-2m)=0$ при m целом положительном. Кроме того, возьмем $l=2k$, тогда остаточный член равен нулю (см. конец п. 2). Имеем:

$$Z(-k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\,dx\cdot\zeta(0)-\frac{1}{\pi}\sum n^{2k-2}\int_0^{\pi} A_2(k,x)\cos 2nx\,dx+$$
$$+\frac{i}{\pi}\sum n^{2k-3}\int_0^{\pi} A_3(k,x)\sin 2nx\,dx-\ldots-\frac{1}{\pi}\sum\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\cos 2nx\,dx.$$

Но $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$; следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\,dx-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\cos 2nx\,dx=$$
$$=-\frac{2}{4\pi}\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\,dx-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\cos(n\cdot 0)+$$
$$+\cos n\pi\int_0^{\pi} A_{2k}(k,x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2nx\,dx=-\frac{A_{2k}(k,0)+A_{2k}(k,\pi)}{4}$$

Для вычисления остальных сумм воспользуемся формулой (20) интегрирования по частям. При подстановке $-k$ вместо s можно не выписывать слагаемых, содержащих ζ-функцию, у которой аргумент окажется отрицательным. Тогда получим:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-2}\int_0^{\pi} A_2(k, x)\cos 2nx\,dx = -\frac{1}{(2i)^{2k-2}\pi\cdot 2}\int_0^{\pi} A_2^{(2k-2)}(k, x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{(2i)^{2k-2}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} A_2^{(2k-2)}(k, x)\cos 2nx\,dx = -\frac{A_2^{(2k-2)}(k, 0)+A_2^{(2k-2)}(k, \pi)}{(2i)^{(2k-2)}\cdot 4}.$$

Точно так же вычисляются и другие суммы. Из этих формул непосредственно следует теорема 4.

$\Sigma\lambda_n^k$ выражается только через значения функции $p(x)$ и ее производных на концах отрезка $[0, \pi]$; следовательно, если эти значения равны нулю, то и $\Sigma\lambda_n^k = 0$, что составляет содержание теоремы 3.

6. Изучение собственных функций.

а) Введем функцию

$$Z(s; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\varphi_n(x)\varphi_n(y). \tag{9}$$

Функции $\varphi_n(x)$ имеют асимптотику:

$$\varphi_n(x) = \left[1 + \frac{a_2(x)}{n^2} + \frac{a_4(x)}{n^4} + \cdots\right]\psi_n(x) +$$

$$+\left[\frac{a_1(x)}{n} + \frac{a_3(x)}{n^3} + \cdots\right]\tilde{\psi}_n(x) \tag{10}$$

(можно было бы записать коэффициенты и при остальных степенях n, но они в дальнейшем оказались бы равными нулю). Отсюда получаем:

$$\sum\lambda_n^{-s}\varphi_n(x)\varphi_n(y) =$$

$$= \sum n^{-2s}\psi_n(x)\psi_n(y) + \sum n^{-2s-1}\{a_1(x)\tilde{\psi}_n(x)\psi_n(y) + a_1(y)\psi_n(x)\tilde{\psi}_n(y)\} +$$

$$+\sum n^{-2s-2}\{-sC_0\psi_n(x)\psi_n(y) +$$

$$+[a_2(x) + a_2(y)]\psi_n(x)\psi_n(y) + a_1(x)a_1(y)\tilde{\psi}_n(x)\tilde{\psi}_n(y)\} + \ldots.$$

Функции $\Sigma n^{-s}\sin nx$, $\Sigma n^{-s}\cos nx$ являются целыми аналитическими; следовательно, функция

$$\sum n^{-s}\sin nx\sin ny = \frac{1}{2}\sum n^{-s}[\cos n(x-y) - \cos n(x+y)]$$

при $x \neq y$ является целой, а при $x = y$ имеет полюс с вычетом, равным $\frac{1}{2}$. Вычет функции $\Sigma n^{-2s}\psi_n^2(x)$ при $s = \frac{1}{2}$ равен $\frac{1}{2\pi}$. То же справедливо и для функции $\Sigma n^{-2s}\tilde{\psi}_n^2(x)$. Функция $\Sigma n^{-2s}\psi_n(x)\tilde{\psi}_n(y)$ является целой.

Выразим вычеты функции $Z(s; x, y)$ через коэффициенты асимптотики.

При $x=y$, $s=\frac{1}{2}$ вычет равен $\frac{1}{2\pi}$, в точке $s=-k+\frac{1}{2}$ вычет равен

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{2m_1+m_2+m_3=2k}\sum_{r=1}^{m_1}\binom{\frac{2k-1}{2}}{r}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=m_1-r} c_{2\alpha_1}\, c_{2\alpha_2}\dots c_{2\alpha_r}\, a_{m_2}(x)\, a_{m_3}(x). \tag{21}$$

В дальнейшем мы выразим эти вычеты через функцию $p(x)$, что само по себе не даст еще системы уравнений, из которой можно было бы найти $a_1(x)$, $a_2(x), \dots$, так как в каждом следующем вычете участвуют по два новых коэффициента a_k. Можно добавить еще ряд новых уравнений, рассматривая вычеты функции

$$\frac{\partial^2 Z(s;\,x,\,y)}{\partial x\,\partial y}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\,\varphi_n'(x)\varphi_n'(y).$$

Функции φ_n имеют асимптотику:

$$\varphi_n'=\left[\frac{a_2'}{n^2}+\frac{a_4'}{n^4}+\cdots\right]\psi_n+\left[n+\frac{a_2}{n}+\cdots\right]\tilde{\psi}_n+$$
$$+\left[\frac{a_1'}{n}+\frac{a_3'}{n^3}+\cdots\right]\tilde{\psi}_n-\left[a_1+\frac{a_3}{n^2}+\cdots\right]\psi_n,$$

или

$$\varphi_n'=n\left\{\left[1+\frac{a_2+a_1'}{n^2}+\frac{a_4+a_3'}{n^4}+\cdots\right]\tilde{\psi}_n+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{-a_1}{n}+\frac{-a_3+a_2'}{n^3}+\cdots\right]\psi_n\right\},$$

откуда следует, что функция $\frac{\partial^2 Z(s;\,x,\,y)}{\partial x\,dy}$ в точке $s=\frac{3}{2}$ при $x=y$ имеет вычет, равный $\frac{1}{2\pi}$. В точке $-k+\frac{3}{2}$ вычет равен

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{2m_1+m_2+m_3}\sum_{r=1}^{m_1}\binom{k-\frac{3}{2}}{r}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=m_1-r} c_{2\alpha_1}\, c_{2\alpha_2}\dots c_{2\alpha_r}\cdot$$
$$\cdot\left[(-1)^{m_2}a_{m_2}+a_{m_2-1}'\right]\cdot\left[(-1)^{m_3}a_{m_3}+a_{m_3-1}'\right]. \tag{22}$$

б) Выразим $Z(s;\,x,\,y)$ через $p(x)$:

$$\sum\lambda_n^{-s}\,\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)=\sum\{A^{-s}\varphi_n(x)\}\,\varphi_n(y)=\sum\{A^{-s}\psi_n(x)\}\,\psi_n(y)$$

при $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$ (и та и другая суммы служат ядром интегрального оператора A^{-s}), поэтому

$$Z(s;\,x,\,y)=\sum n^{-2s}\,\psi_n(x)\,\psi_n(y)+A_2(-s,\,x)\sum n^{-2s-2}\,\psi_n(x)\,\psi_n(y)+$$
$$+\,iA_3(-s,\,x)\sum n^{-2s-3}\,\tilde{\psi}_n(x)\,\psi_n(y)+\dots.$$

Из этой формулы следует теорема 6. Аналогично,

$$\frac{\partial^2 Z(s;\,x,\,y)}{\partial x\,\partial y}=\sum n^{-2s+2}\,\tilde{\psi}_n(x)\,\tilde{\psi}_n(y)+A_2(-s,\,x)\sum n^{-2s}\,\tilde{\psi}_n(x)\,\tilde{\psi}(y)-$$
$$-\,A_2'(-s,\,x)\sum n^{-2s-1}\,\tilde{\psi}_n(x)\,\psi_n(y)+\dots.$$

Таким образом в точке $s=\frac{3}{2}$ вычет равен $\frac{1}{2\pi}$, в точке $s=\frac{1}{2}$ вычет равен $\frac{1}{2\pi}A_2\left(-\frac{1}{2}, x\right)$, в точке $-\frac{1}{2}$ вычет равен $\frac{1}{2\pi}A_4\left(\frac{1}{2}, x\right)$ и т. д. Сравнивая это с формулами (21), (22) и теоремой 6, получим рекуррентную систему для определения коэффициентов асимптотики. Так, например,

$$\frac{1}{4\pi}c_0+\frac{1}{\pi}a_2(x)+\frac{1}{2\pi}[a_1(x)]^2=\frac{1}{4\pi}p(x),$$

$$-\frac{1}{4\pi}c_0+\frac{1}{\pi}a_2(x)+\frac{1}{2\pi}[a_1(x)]^2+\frac{a_1'(x)}{\pi}=-\frac{1}{4\pi}p(x).$$

Отсюда

$$a_1'(x)=-\frac{1}{2}p(x)+\frac{1}{2}c_0,$$

$$a_1(x)=\frac{x}{2\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^x p(x)\,dx \tag{23}$$

(постоянная интегрирования должна быть такой, чтобы $a_1(0)=0$),

$$a_2(x)=\frac{1}{4}p(x)-\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx-\frac{1}{8}\left\{\frac{x}{\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx-\int_0^x p(x)\,dx\right\}^2. \tag{23'}$$

в) Для собственных функций можно также получить серию тождеств, аналогичных тождествам Гельфанда—Левитана для собственных значений. Заметим, что

$$\sum_1^\infty n^{-s}\sin 2nx=\frac{1}{2i\Gamma(s)\sin(s-1)\pi}\int_L(-z)^{s-1}\frac{e^z\sin 2x}{e^{2z}-2e^z\cos 2x+1}\,dz,$$

где контур L приходит из $+\infty$, огибает начало координат в положительном направлении и уходит в $+\infty$. При $s=-2k+1$ полюс $\Gamma(s)$ уничтожается нулем $\sin(s-1)\pi$, а интеграл равен нулю, так как он приводится к

$$\oint(-z)^{-2k}\frac{e^z\sin 2x}{e^{2z}-2e^z\cos 2x+1}\,dz.$$

Дробь, стоящая под интегралом, — четная функция. Мы получим:

$$\sum n^{2k-1}\sin 2nx=0$$

(в смысле аналитического продолжения). Точно так же получим, что при $k>0$

$$\sum n^{2k}\cos 2nx=0.$$

При $k=0$ эта сумма равна $-\frac{1}{2}$. Эти соображения приводят к теоремам 7 и 8.

Поступило
10. IV. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minakshisundaram S., A generalization of Epstein zeta functions, Canadian J. of math., 1 (1949), 320—327.

[2] Bureau F., Les séries de fonctions fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Acta math., 89 (1953), 1—43.

[3] Гельфанд И. М. и Левитан Б. М., Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, Доклады Ак. наук СССР, 88, № 4 (1953), 593—596.

[4] Дикий Л. А., Об одной формуле Гельфанда—Левитана, Успехи матем. наук, 8, № 2 (1953), 119—123.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 201—220

А. В. ШТРАУС

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Формула обобщенных резольвент симметрических операторов применяется к построению формулы всех спектральных функций одного класса дифференциальных операторов второго порядка на интервале с одним сингулярным концом.

Рассмотрим на интервале $(0, +\infty)$ квазидифференциальную операцию

$$l = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q, \qquad (*)$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ измеримы и вещественны, причем для любого $b > 0$

$$\int_0^b \frac{dx}{|p(x)|} < +\infty, \quad \int_0^b |q(x)|\, dx < +\infty.$$

Таким образом левый конец интервала $(0, +\infty)$ является регулярным, а правый — сингулярным.

Пусть L — порожденный операцией l квазидифференциальный оператор в $L^2(0, +\infty)$ с минимальной областью определения *. Как известно**, оператор L может иметь индекс дефекта либо (1,1), либо (2,2). В настоящей работе рассматривается лишь случай индекса дефекта (1,1). Целью работы является получение формулы всех спектральных функций (ортогональных и неортогональных) оператора L с индексом дефекта (1,1).

Исходя из формулы обобщенных резольвент симметрического оператора в том виде, в каком она рассмотрена в статье ([7]), мы получаем в § 1 формулу всех обобщенных резольвент оператора L.

Для того чтобы в дальнейшем облегчить применение этой формулы к построению спектральных функций, мы рассматриваем в § 2 несколько несложных предложений, относящихся к теории аналитических функций.

Пользуясь результатами первых двух параграфов и формулой обращения Стильтьеса, мы устанавливаем в § 3 формулу всех спектральных функций оператора L и некоторые другие соотношения, связанные с этой формулой.

---

* По поводу определения оператора L см. ([1]), стр. 425.

** См. ([1]), стр. 427, теорема 2.

В заключение еще раз отметим, что на протяжении всей работы дефектные числа оператора L предполагаются равными единице *.

§ 1. Формула обобщенных резольвент оператора L

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

где l — квазидифференциальная операция, определенная формулой (*), а λ — произвольное комплексное число.

Пусть $u_1(x;\lambda)$, $u_2(x;\lambda)$ — решения уравнения (1.1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям:

$$u_1(0;\lambda) = 1, \quad p(x)\,u_1'(x;\lambda)\,|_{x=0} = 0, \tag{1.2}$$

$$u_2(0;\lambda) = 0, \quad p(x)\,u_2'(x;\lambda)\,|_{x=0} = -1. \tag{1.3}$$

ЛЕММА 1. *Пусть α и β — произвольные действительные числа, не равные одновременно нулю, а λ — произвольное невещественное число. Тогда квадрат модуля функции*

$$w(x) = \alpha u_1(x;\lambda) + \beta u_2(x;\lambda)$$

не суммируем в промежутке $(0, +\infty)$, *т. е.*

$$w(x) \overline{\in} L^2(0, +\infty).$$

Доказательство. Будем вести доказательство от противного. Предположим, что $w(x) \in L^2(0, +\infty)$. Тогда $w(x)$ принадлежит области определения D_{L^*} оператора L^*, сопряженного с L. Принимая во внимание, что в случае индекса дефекта (1.1) для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из D_{L^*} имеет место соотношение **

$$\lim_{x\to\infty}\{p(x)[\varphi(x)\overline{\psi'(x)} - \varphi'(x)\overline{\psi(x)}]\} = 0, \tag{1.4}$$

получаем:

$$(L^*w, w) - (w, L^*w) = p(x)\,[w(x)\overline{w'(x)} - w'(x)\overline{w(x)}]\,|_0^{+\infty} = 0. \tag{1.5}$$

Рассмотрим самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L, определяемое граничным условием

$$\alpha p(x)\,\varphi'(x)\,|_{x=0} + \beta\varphi(0) = 0.$$

Из соотношений (1.2), (1.3) и (1.5) следует, что $w(x) \in D_{\tilde{L}}$. Это, однако, невозможно, так как самосопряженный оператор не может иметь собственных функций для невещественного λ. Полученное противоречие доказывает лемму.

Поскольку дефектные числа оператора L равны единице, легко заключить, принимая во внимание лемму 1, что для любого невещественного λ существует единственное, притом невещественное, число $m(\lambda)$ такое, что

$$\psi(x;\lambda) = u_2(x;\lambda) + m(\lambda)\,u_1(x;\lambda) \in L^2(0; +\infty). \tag{1.6}$$

* В работе (4) М. Г. Крейн попутно указывает, что его методы позволяют решить вопросы, к которым близок рассматриваемый здесь вопрос о спектральных функциях оператора L. Отметим, однако, что в настоящей работе для решения поставленной задачи применяется метод, отличный от методов М. Г. Крейна.

** См. (1), стр. 431, доказательство теоремы 3.

Ясно также, что при любом невещественном λ

$$m(\bar{\lambda}) = \overline{m(\lambda)},$$

поэтому достаточно $m(\lambda)$, как функцию от λ, изучить в одной из полуплоскостей (верхней или нижней) комплексной плоскости.

Для дальнейшего полезно отметить, что при любом невещественном λ

$$\psi(x, \bar{\lambda}) = \overline{\psi(x; \lambda)}.$$

ЛЕММА 2. *Определенная соотношением* (1.6) *функция* $m(\lambda)$ *регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть.*

Доказательство. Рассмотрим самосопряженное расширение $\overset{0}{L}$ оператора L, определяемое граничным условием

$$p(x)\varphi'(x)|_{x=0} = 0.$$

Ядро резольвенты

$$\overset{0}{R}_\lambda = (\overset{0}{L} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$$

имеет, как известно, следующий вид *:

$$K(x, s; \lambda) = \begin{cases} u_1(s; \lambda)\psi(x; \lambda) & (s \leqslant x), \\ u_1(x; \lambda)\psi(s; \lambda) & (s > x), \end{cases}$$

где $\psi(x; \lambda)$ определяется формулой (1.6).

В силу (1.2) и (1.3),

$$K(0, 0; \lambda) = m(\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0). \tag{1.7}$$

Для любой функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ имеем:

$$\overset{0}{R}_\lambda f = \int_0^{+\infty} K(x, s; \lambda) f(s)\, ds \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0).$$

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(x > \frac{1}{n}\right) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда, согласно (1.7),

$$\lim_{n \to \infty} (\overset{0}{R}_\lambda f_n, f_n) = m(\lambda). \tag{1.8}$$

С другой стороны, при любом n $(n = 1, 2, \ldots)$ $(\overset{0}{R}_\lambda f_n, f_n)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией от λ, причем мнимая часть этой функции положительна, так как

$$\operatorname{Im}(\overset{0}{R}_\lambda f_n, f_n) = \operatorname{Im}\lambda \cdot \| \overset{0}{R}_\lambda f_n \|^2.$$

Поскольку семейство функций, регулярных в верхней полуплоскости и имеющих положительную мнимую часть, нормально, то из соотношения (1.8) следует, что $m(\lambda)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией, причем $\operatorname{Im} m(\lambda) \geqslant 0$. Но знак равенства здесь исключается, как мы видели, в силу леммы 1. Таким образом лемма доказана.

---

* См. ([1]), стр. 459.

2. В соответствии с установленной в работе ([7]) формулой совокупность обобщенных резольвент R_λ оператора L определяется равенством

$$R_\lambda = (L_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0), \tag{1.9}$$

где λ_0 — какое-либо фиксированное невещественное число, $F(\lambda)$ — произвольная регулярная в полуплоскости операторная функция из дефектного подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящая по норме единицы, а $L_{F(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора L, определяемое оператором $F(\lambda)$ *.

Выясним, какова область определения оператора $L_{F(\lambda)}$. Заметим прежде всего, что при любом $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0)$ оператор $L_{F(\lambda)}$ является частью оператора L^*, сопряженного с L. В рассматриваемом нами случае дефектные подпространства оператора L одномерны и при любом невещественном λ функция $\psi(x; \lambda)$, определенная формулой (1.6), является ненулевым элементом подпространства $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

Введем обозначение $\psi_\lambda = \psi(x; \lambda)$ и заметим, что при любом невещественном λ

$$\| \psi_\lambda \| = \| \psi_{\bar{\lambda}} \|.$$

Положим $\lambda_0 = i$. Тогда операторную функцию $F(\lambda)$ можно задать формулой

$$F(\lambda)\,\psi_i = \omega(\lambda)\,\psi_i \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{1.10}$$

где $\omega(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, не превосходящая по модулю единицы.

При любом невещественном λ из верхней полуплоскости область определения $D_{L_{F(\lambda)}}$ оператора $L_{F(\lambda)}$ можно теперь охарактеризовать как многообразие элементов g вида

$$g = f + [\omega(\lambda)\,\psi_i - \psi_{-i}] \cdot c,$$

где $f \in D_L$, а c — произвольная постоянная.

Для дальнейшего целесообразно дать несколько иное описание многообразия $D_{L_{F(\lambda)}}$.

Заметим сначала, что, в силу легко доказываемого соотношения

$$(L_{F(\lambda)})^* = L_{F^*(\lambda)},$$

область определения оператора $(L_{F(\lambda)})^*$, сопряженного с $L_{F(\lambda)}$, можно охарактеризовать как совокупность элементов вида:

$$h = f + [\overline{\omega(\lambda)}\,\psi_{-i} - \psi_i] \cdot c,$$

где попрежнему $f \in D_L$, а c — произвольная постоянная.

Полагая

$$v_\lambda = v(x; \lambda) = \overline{\omega(\lambda)}\,\psi_{-i} - \psi_i, \tag{1.11}$$

* В соответствии с обозначениями, которых мы придерживались в работе ([7]), $\mathfrak{N}_\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ обозначает ортогональное дополнение в $L^2(0, +\infty)$ к линейному многообразию элементов вида $(L - \lambda E) f$, где $f \in D_L$. Таким образом $\mathfrak{N}_\lambda$ состоит из всевозможных решений уравнения $(L^* - \bar{\lambda}E)\,g = 0$.

По поводу рассматриваемых здесь квазисамосопряженных расширений см., например, ([7]).

легко заключить, что многообразие $D_{L_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех элементов $y = y(x)$ из D_{L^*}, для которых имеет место равенство

$$(L^*y, v_\lambda) - (y, L^*v_\lambda) = 0.$$

В силу тождества Лагранжа и соотношения (1.4), это равенство равносильно следующему:

$$p(x)\,[y(x)\,\overline{v'(x;\lambda)} - y'(x)\,\overline{v(x;\lambda)}]\,|_{x=0} = 0,$$

или, согласно (1.11),

$$p(x)\,\{y(x)\,[\omega(\lambda)\,\psi'(x;i) - \psi'(x;-i)] - \\ - y'(x)\,[\omega(\lambda)\,\psi(x;i) - \psi(x;-i)]\}\,|_{x=0} = 0. \qquad (1.12)$$

Так как, согласно соотношениям (1.2), (1.3) и (1.6), при любом невещественном λ имеют место равенства

$$\psi(0;\lambda) = m(\lambda), \qquad p(x)\,\psi'(x;\lambda)\,|_{x=0} = -1, \qquad (1.13)$$

то соотношению (1.12) можно придать вид:

$$y(0)\,[1 - \omega(\lambda)] - [\omega(\lambda)\,m(i) - m(-i)]\,p(x)\,y'(x)\,|_{x=0} = 0. \qquad (1.14)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\omega(\lambda)\,m(i) - m(-i)}{1 - \omega(\lambda)} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \qquad (1.15)$$

причем полагаем $\vartheta(\lambda) = \infty$, если $\omega(\lambda) = 1$.

Принимая во внимание, что $\operatorname{Im} m(i) > 0$ и $m(-i) = \overline{m(i)}$, легко заключить, что формулой (1.15) определяется взаимно однозначное соответствие между классом функций $\omega(\lambda)$, регулярных в верхней полуплоскости и не превосходящих по модулю единицы, и классом регулярных в этой полуплоскости функций $\vartheta(\lambda)$ с неотрицательной мнимой частью, причем последний класс пополнен несобственной функцией, равной бесконечности.

Согласно равенству (1.14), можно, наконец, область определения $D_{L_{F(\lambda)}}$ оператора $L_{F(\lambda)}$ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) описать следующим образом: $D_{L_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех функций $y(x)$ из D_{L^*}, которые удовлетворяют граничному условию

$$y(0) = \vartheta(\lambda)\,p(x)\,y'(x)\,|_{x=0} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0); \qquad (1.16)$$

при $\vartheta(\lambda) = \infty$ это условие заменяется следующим:

$$p(x)\,y'(x)\,|_{x=0} = 0.$$

Поскольку $F(\lambda)$ может быть произвольной операторной функцией из $\mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{N}_{-i}$, регулярной в верхней полуплоскости и не превосходящей по норме единицы, то, согласно формулам (1.10) и (1.15), $\vartheta(\lambda)$ может быть любой регулярной в верхней полуплоскости функцией с неотрицательной мнимой частью или тождественно обращаться в бесконечность.

Из предыдущего ясно, что соответствие между классом операторных функций $F(\lambda)$ и классом функций $\vartheta(\lambda)$ взаимно однозначно.

Заметим, что самосопряженные расширения оператора L мы получаем тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или бесконечность.

3. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала.

Положим

$$y(x;\lambda) = R_\lambda f \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0),$$

где R_λ — какая-либо обобщенная резольвента оператора L, определяемая операторной функцией $F(\lambda)$ согласно формуле (1.9).

На основании формулы (1.9) заключаем, что $y(x;\lambda)$ является решением уравнения

$$l[y] - \lambda y = f \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

причем это решение принадлежит области определения оператора $L_{F(\lambda)}$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, получим:

$$y(x;\lambda) = \psi(x;\lambda)\int_0^x f(s)\,u_1(s;\lambda)\,ds -$$

$$- u_1(x;\lambda)\int_0^x f(s)\,\psi(s;\lambda)\,ds + c_1 u_1(x;\lambda) + c_2\psi(x;\lambda), \tag{1.17}$$

где $u_1(x;\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (1.1), определяемая условиями (1.2), (1.3) и (1.6), а постоянные c_1 и c_2 еще подлежат определению.

Из условия принадлежности $y(x;\lambda)$ к $L^2(0,+\infty)$ следует:

$$c_1 = \int_0^{+\infty} f(s)\,\psi(s;\lambda)\,ds. \tag{1.18}$$

Так как $y(x;\lambda) \in D_{L_{F(\lambda)}}$, то функция $y(x;\lambda)$ должна удовлетворять граничному условию (1.16), где функция $\vartheta(\lambda)$ связана с $F(\lambda)$ соотношениями (1.10) и (1.15). Принимая во внимание равенства (1.2) и (1.13), получим:

$$c_1 + c_2 m(\lambda) = -\vartheta(\lambda)\,c_2,$$

откуда

$$c_2 = -\frac{1}{\vartheta(\lambda) + m(\lambda)}\,c_1,$$

т. е., в силу (1.18),

$$c_2 = -\frac{1}{\vartheta(\lambda) + m(\lambda)}\int_0^{+\infty} f(s)\,\psi(s;\lambda)\,ds. \tag{1.19}$$

В силу равенств (1.18) и (1.19), формула (1.17) принимает вид:

$$R_\lambda f = \psi(x;\lambda)\int_0^x f(s)\,u_1(s;\lambda)\,ds + u_1(x;\lambda)\int_x^{+\infty} f(s)\,\psi(s;\lambda)\,ds -$$

$$- \frac{1}{\vartheta(\lambda) + m(\lambda)}\,\psi(x;\lambda)\int_0^{+\infty} f(s)\,\psi(s;\lambda)\,ds \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{1.20}$$

Принимая во внимание соотношение $R_{\bar\lambda} = R_\lambda^*$, легко получить из формулы (1.20) следующее равенство:

$$R_{\bar\lambda} f = \overline{\psi(x;\lambda)}\int_0^x f(s)\,\overline{u_1(s;\lambda)}\,ds + \overline{u_1(x;\lambda)}\int_x^{+\infty} f(s)\,\overline{\psi(s;\lambda)}\,ds -$$

$$- \frac{1}{\overline{\vartheta(\lambda)} + \overline{m(\lambda)}}\,\overline{\psi(x;\lambda)}\int_0^{+\infty} f(s)\,\overline{\psi(s;\lambda)}\,ds \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{1.21}$$

Впрочем, формулу (1.21) можно было бы получить аналогично формуле (1.20), если учесть, что

$$u_j(x;\bar\lambda) = \overline{u_j(x;\lambda)} \quad (j=1,2), \quad m(\bar\lambda) = \overline{m(\lambda)}$$

и что

$$R_{\bar\lambda} = (L_{F^*(\lambda)} - \bar\lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

где $F^*(\lambda)$ — операторная функция из $\mathfrak{N}_{-i}$ в $\mathfrak{N}_i$, сопряженная с $F(\lambda)$.

Формула (1.20) была нами выведена в предположении, что $f(x)$ есть функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала.

Однако несобственные интегралы в правой части (1.20) сходятся для любой функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$.

Принимая во внимание ограниченность оператора R_λ, легко отсюда заключить, что равенство (1.20) имеет место для любой функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ *.

Резюмируя, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Совокупность всех обобщенных резольвент оператора L определяется формулой* (1.20), *где $\vartheta(\lambda)$ есть произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, или обращается в бесконечность. При этом различным функциям $\vartheta(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Формулой* (1.20) *определяется резольвента самосопряженного расширения в пространстве $L^2(0, +\infty)$ оператора L тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность.*

4. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, +\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Для дальнейшего целесообразно несколько преобразовать правую часть формулы (1.20). Принимая во внимание (1.6), легко получим:

$$R_\lambda f = u_2(x;\lambda)\int_0^x f(s)\,u_1(s;\lambda)\,ds + u_1(x;\lambda)\int_x^{+\infty} f(s)\,u_2(s;\lambda)\,ds +$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x;\lambda)\,F_k(f;\lambda)\,\Phi_{jk}(\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{1.22}$$

где

$$F_k(f;\lambda) = \int_0^{+\infty} f(s)\,u_k(s;\lambda)\,ds \quad (k=1,\ 2), \tag{1.23}$$

$$\Phi_{11}(\lambda) = \frac{m(\lambda)\,\vartheta(\lambda)}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)}, \qquad \Phi_{22}(\lambda) = -\frac{1}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)},$$
$$\Phi_{12}(\lambda) = \Phi_{21}(\lambda) = -\frac{m(\lambda)}{\vartheta(\lambda)+m(\lambda)} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{1.24}$$

Аналогично, принимая во внимание (1.6) и равенство

$$\overline{u_j(x;\lambda)} = u_j(x;\bar\lambda) \quad (j=1,\ 2),$$

---

* Формулу (1.20) можно также получить, исходя из формулы обобщенных резольвент, найденной М. Г. Крейном [см., например, ([1]), стр. 384—393].

придадим формуле (1.21) следующий вид:

$$R_{\bar{\lambda}} f = u_2(x; \bar{\lambda}) \int_0^x f(s)\, u_1(s; \bar{\lambda})\, ds + u_1(x; \bar{\lambda}) \int_x^{+\infty} f(s)\, u_2(s; \bar{\lambda})\, ds + \sum_{j,\,k=1}^{2} u_j(x; \bar{\lambda})\, F_k(f; \bar{\lambda})\, \overline{\Phi_{jk}(\lambda)} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{1.25}$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $\Phi_{jk}(\lambda)$ (j, $k = 1, 2$), определенных формулами (1.24). Принимая во внимание лемму 2 и свойства функции $\vartheta(\lambda)$, убедимся, что $\Phi_{11}(\lambda)$ и $\Phi_{22}(\lambda)$ являются регулярными в верхней полуплоскости функциями с неотрицательными мнимыми частями.

Действительно, если $\vartheta(\lambda) \infty \neq$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Phi_{11}(\lambda) &= \frac{|\vartheta(\lambda)|^2 \operatorname{Im} m(\lambda) + |m(\lambda)|^2 \operatorname{Im}\vartheta(\lambda)}{|\vartheta(\lambda) + m(\lambda)|^2}, \\ \operatorname{Im}\Phi_{22}(\lambda) &= \frac{\operatorname{Im}\vartheta(\lambda) + \operatorname{Im} m(\lambda)}{|\vartheta(\lambda) + m(\lambda)|^2}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Если же $\vartheta(\lambda) = \infty$, то

$$\Phi_{11}(\lambda) = m(\lambda), \quad \Phi_{22}(\lambda) = 0 \tag{1.27}$$

и, следовательно, наше утверждение справедливо и в этом случае.

Докажем теперь, что функция $\Phi_{12}(\lambda)$ представима в виде разности двух регулярных в верхней полуплоскости функций, имеющих неотрицательные мнимые части.

Действительно, если $\vartheta(\lambda) \neq \infty$, то, согласно (1.24),

$$\operatorname{Im}\Phi_{12}(\lambda) = -\frac{\operatorname{Im}[m(\lambda)]\operatorname{Re}[\vartheta(\lambda)] - \operatorname{Re}[m(\lambda)]\operatorname{Im}[\vartheta(\lambda)]}{|\vartheta(\lambda) + m(\lambda)|^2},$$

откуда

$$|\operatorname{Im}\Phi_{12}(\lambda)| \leqslant \frac{|\vartheta(\lambda)| \operatorname{Im} m(\lambda) + |m(\lambda)| \operatorname{Im}\vartheta(\lambda)}{|\vartheta(\lambda) + m(\lambda)|^2}.$$

Возводя обе части в квадрат и применяя к числителю дроби неравенства Коши — Буняковского, получим:

$$|\operatorname{Im}\Phi_{12}(\lambda)|^2 \leqslant \frac{\{|\vartheta(\lambda)|^2 \operatorname{Im} m(\lambda) + |m(\lambda)|^2 \operatorname{Im}\vartheta(\lambda)\}\{\operatorname{Im} m(\lambda) + \operatorname{Im}\vartheta(\lambda)\}}{|\vartheta(\lambda) + m(\lambda)|^4},$$

т. е., согласно (1.26),

$$|\operatorname{Im}\Phi_{12}(\lambda)|^2 \leqslant \operatorname{Im}[\Phi_{11}(\lambda)] \cdot \operatorname{Im}[\Phi_{22}(\lambda)]. \tag{1.28}$$

Отсюда вытекает неравенство:

$$|\operatorname{Im}\Phi_{12}(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\{\operatorname{Im}\Phi_{11}(\lambda) + \operatorname{Im}\Phi_{22}(\lambda)\}.$$

Этим наше утверждение доказано для случая $\vartheta(\lambda) \neq \infty$.

Если же $\vartheta(\lambda) = \infty$, то, согласно (1.24),

$$\Phi_{12}(\lambda) = 0, \tag{1.29}$$

и, следовательно, наше утверждение в этом случае тривиально.

Заметим, что при $\vartheta(\lambda) = \infty$ соотношение (1.28), согласно (1.27) и (1.29), остается в силе.

Отметим еще, что при любом фиксированном $x\,(0 \leqslant x < +\infty)$ $u_j(x;\lambda)$ $(j=1,2)$ является целой функцией от λ. В силу этого, целыми функциями от λ являются два первых интегральных члена, входящих в формулу (1.22), а также функции $F_k(f;\lambda)$ $(k=1,2)$, определенные равенством (1.23).

§ 2. Вспомогательные предложения

1. Рассмотрим некоторые предложения, относящиеся к теории аналитических функций.

ЛЕММА 3. *Если $\Phi(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, то для любых фиксированных вещественных чисел α и β $(\alpha<\beta)$*

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Phi(\sigma+i\tau)|\,d\tau = O\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)$$

при $\tau \to +0$.

Доказательство. Функция $\Phi(\lambda)$ допускает, как известно *, следующее представление:

$$\Phi(\lambda) = a + b\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t\lambda}{t-\lambda}\,d\rho(t), \tag{2.1}$$

где $b \geqslant 0$ и a — две вещественные постоянные, а $\rho(t)$ — неубывающая ограниченная функция.

После элементарного преобразования правой части придем к формуле:

$$\Phi(\lambda) = a + c\lambda + (1+\lambda^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{t-\lambda},$$

где

$$c = b + \rho(+\infty) - \rho(-\infty).$$

Положим

$$\Psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{t-\lambda}. \tag{2.2}$$

Тогда для доказательства леммы достаточно установить, что при $\tau \to +0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Psi(\sigma+i\tau)|\,d\sigma = O\left(\ln\frac{1}{\tau}\right).$$

В силу вытекающего из формулы (2.2) неравенства

$$|\Psi(\sigma+i\tau)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{\sqrt{(\sigma-t)^2+\tau^2}},$$

имеем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Psi(\sigma+i\tau)|\,d\sigma \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{\sqrt{(\sigma-t)^2+\tau^2}}.$$

---

* См., например, ([1]), стр. 209—210.

Справа можно произвести перестановку порядка интегрирования, после чего получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Psi(\sigma + i\tau)|\, d\sigma \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\beta - t + \sqrt{(\beta - t)^2 + \tau^2}}{\alpha - t + \sqrt{(\alpha - t)^2 + \tau^2}}\, d\rho(t). \tag{2.3}$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{\beta - t + \sqrt{(\beta - t)^2 + \tau^2}}{\alpha - t + \sqrt{(\alpha - t)^2 + \tau^2}} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Легко видеть, что при любом t $f(t) > 1$. Элементарные средства дифференциального исчисления позволяют также обнаружить, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t = \frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{[\beta - \alpha + \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4\tau^2}]^2}{4\tau^2}.$$

Заменяя в правой части (2.3) подинтегральную функцию ее наибольшим значением, получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Psi(\sigma + i\tau)|\, d\sigma \leqslant 2 \ln \frac{\beta - \alpha + \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4\tau^2}}{2\tau} [\rho(+\infty) - \rho(-\infty)] =$$

$$= O\left(\ln \frac{1}{\tau}\right).$$

Лемма доказана.

Следующее предложение тесно связано с формулой обращения Стильтьеса и легко доказывается при помощи этой формулы.

ЛЕММА 4. *Если $\Phi(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, то для любых фиксированных вещественных чисел α и β $(\alpha < \beta)$ интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} \Phi(\sigma + i\tau)\, d\sigma$$

имеет конечный предел при $\tau \to +0$ *.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, воспользуемся представлением функции $\Phi(\lambda)$ в виде (2.1). В силу этой формулы, имеем:

$$\operatorname{Im} \Phi(\sigma + i\tau) = b\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(1 + t^2)}{(t - \sigma)^2 + \tau^2}\, d\rho(t).$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} \Phi(\sigma + i\tau)\, d\sigma = b\tau(\beta + \alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(1 + t^2)}{(t - \sigma)^2 + \tau^2}\, d\rho(t). \tag{2.4}$$

Пусть $N_1 < \alpha$. Рассмотрим выражение

$$I_1(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_{-\infty}^{N_1} \frac{\tau(1 + t^2)}{(t - \sigma)^2 + \tau^2}\, d\rho(t).$$

* В книге Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна приводится без доказательства формула, выражающая значение этого предела и являющаяся обобщением формулы обращения Стильтьеса [см. (2), стр. 53]. В ходе доказательства леммы мы эту формулу получим.

Легко видеть, что при $\tau \to +0$ $I_1(\tau) \to 0$.

Действительно, поскольку в рассматриваемом случае $t < \alpha \leqslant \sigma$, то

$$\frac{1+t^2}{(t-\sigma)^2+\tau^2} < \frac{1+t^2}{(t-\alpha)^2},$$

и остается заметить, что справа мы имеем функцию от t, ограниченную в промежутке $(-\infty, N_1)$.

Совершенно аналогично можно убедиться в том, что для $N_2 > \beta$ интеграл

$$I_2(\tau) = \int_\alpha^\beta d\sigma \int_{N_2}^{+\infty} \frac{\tau(1+t^2)}{(t-\sigma)^2+\tau^2} d\rho(t)$$

стремится к нулю при $\tau \to +0$.

Положим

$$I(\tau) = \int_\alpha^\beta d\sigma \int_{N_1}^{N_2} \frac{\tau}{(t-\sigma)^2+\tau^2} d\omega(t), \tag{2.5}$$

где

$$\omega(t) = \int_0^t (1+t^2)\, d\rho(t). \tag{2.6}$$

Равенству (2.4) можно придать следующий вид:

$$\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} \Phi(\sigma+i\tau)\, d\sigma = b\tau(\beta-\alpha) + I_1(\tau) + I_2(\tau) + I(\tau). \tag{2.7}$$

Так как при $\tau \to +0$ три первых члена в правой части стремятся к нулю, то остается убедиться в существовании предела последнего члена $I(\tau)$, определенного формулой (2.5). Но в силу формулы обращения Стильтьеса,

$$\lim_{\tau\to+0} I(\tau) = \pi\left[\frac{\omega(\beta+0)+\omega(\beta-0)}{2} - \frac{\omega(\alpha+0)+\omega(\alpha-0)}{2}\right],$$

где $\omega(t)$ определяется формулой (2.6) *.

Таким образом, согласно (2.7),

$$\lim_{\tau\to+0} \int_\alpha^\beta \operatorname{Im} \Phi(\sigma+i\tau)\, d\sigma = \pi\left[\frac{\omega(\beta+0)+\omega(\beta-0)}{2} - \frac{\omega(\alpha+0)+\omega(\alpha-0)}{2}\right],$$

и лемма доказана.

Замечание. Очевидно, лемма остается в силе и в более общем случае, когда функция $\Phi(\lambda)$ представима в виде разности двух регулярных в верхней полуплоскости функций с неотрицательными мнимыми частями.

В то время как при выполнении условий леммы функция

$$\varphi(t) = \lim_{\tau\to+0} \int_0^t \operatorname{Im} \Phi(\sigma+i\tau)\, d\sigma$$

* См., например, (6), стр. 92—95. Чтобы применить формулу обращения к рассматриваемому здесь случаю, следует функцию $\omega(t)$ считать вне промежутка $[N_1, N_2]$ постоянной.

$(-\infty < t < +\infty)$ является неубывающей, в указанном здесь более общем случае $\varphi(t)$ представима в виде разности двух неубывающих функций, т. е. имеет ограниченное изменение на любом конечном промежутке.

2. При помощи лемм 3 и 4 можно установить следующее предложение, которое в сочетании с формулой обращения Стильтьеса позволит легко получить из формулы обобщенных резольвент спектральные функции дифференциального оператора L.

ЛЕММА 5. *Пусть $\Phi(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью и $\Psi(\lambda)$ — функция, регулярная в некоторой области, содержащей отрезок $[\alpha, \beta]$ вещественной оси. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to+0}\int_\alpha^\beta[\Phi(\sigma+i\tau)\Psi(\sigma+i\tau)-\overline{\Phi(\sigma+i\tau)}\Psi(\sigma-i\tau)]\,d\sigma=\int_\alpha^\beta\Psi(\sigma)\,d\rho(\tau), \quad (2.8)$$

где $\rho(\sigma)$ есть неубывающая на всей числовой оси функция, определяемая формулой

$$\rho(\sigma)=\frac{1}{\pi}\lim_{\tau\to+0}\int_0^\sigma \operatorname{Im}\Phi(\sigma+i\tau)\,d\sigma. \quad (2.9)$$

Доказательство. Положим

$$w(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta[\Phi(\lambda)\Psi(\lambda)-\overline{\Phi(\lambda)}\Psi(\bar\lambda)]\,d\sigma,$$

где $\lambda=\sigma+i\tau$. Имеет место легко проверяемое равенство:

$$w(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Im}[\Phi(\lambda)]\cdot\Psi(\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\{\Phi(\lambda)[\Psi(\lambda)-\Psi(\sigma)]-\overline{\Phi(\lambda)}[\Psi(\bar\lambda)-\Psi(\sigma)]\}\,d\sigma. \quad (2.10)$$

Так как функция $\Psi(\lambda)$ регулярна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то для всех достаточно малых $\tau>0$ и при любом $\sigma\in[\alpha, \beta]$

$$|\Psi(\sigma\pm i\tau)-\Psi(\sigma)|<\tau K, \quad (2.11)$$

где K — некоторое число, не зависящее ни от τ, ни от σ.

Из неравенства (2.11) в соединении с леммой 3 следует, что второй интеграл в формуле (2.10) стремится к нулю при $\tau\to+0$.

Для завершения доказательства леммы достаточно первый интеграл в формуле (2.10) представить в виде

$$\int_\alpha^\beta\Psi(\sigma)\,d_\sigma\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \operatorname{Im}\Phi(\sigma+i\tau)\,d\sigma\right],$$

после чего остается сослаться на лемму 4 и вторую теорему Хелли. Лемма доказана.

Замечание. В более общем случае, когда функция $\Phi(\lambda)$ представима в виде разности двух регулярных в верхней полуплоскости функций, имеющих неотрицательные мнимые части, а $\Psi(\lambda)$ — такая же, как в лемме 5, соотношения (2.8) и (2.9) остаются в силе, причем $\rho(\sigma)$ есть функция с ограниченным изменением на любом конечном промежутке.

§ 3. Спектральные функции оператора L

1. В этом параграфе мы сохраним обозначения, которыми мы пользовались в § 1.

Пусть $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью или же бесконечная константа и R_λ — соответствующая ей обобщенная резольвента оператора L в смысле, указанном теоремой 1.

Пусть, далее, $E_t\,(-\infty < t < +\infty)$ — спектральная функция оператора L, с которой эта обобщенная резольвента R_λ связана соотношением:

$$R_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0). \;*$$

Как известно, спектральная функция однозначно восстанавливается по обобщенной резольвенте в силу формулы обращения Стильтьеса: для любых $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2(0, +\infty)$ и для любых вещественных чисел α и β $(\alpha < \beta)$ имеет место равенство:

$$\left(\left[\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right] f, g\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to +0} \int\limits_\alpha^\beta ([R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}] f, g)\, d\sigma. \quad (3.1)$$

Наша задача и состоит в том, чтобы, после того как построена обобщенная резольвента R_λ, построить формулу спектральных функций оператора L.

Поскольку для заданного оператора L обобщенная резольвента R_λ определяется функцией $\vartheta(\lambda)$, мы будем говорить, что функцией $\vartheta(\lambda)$ определяется и спектральная функция E_t. Так как соответствие между совокупностью функций $\vartheta(\lambda)$ и совокупностью всех обобщенных резольвент взаимно однозначно, то и соответствие между совокупностью функций $\vartheta(\lambda)$ и совокупностью всех спектральных функций E_t оператора L является взаимно однозначным.

2. В соответствии с результатами п. 4 § 1 и леммой 4 (§ 2, п.1) положим:

$$\rho_{jk}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int\limits_0^t \operatorname{Im} \Phi_{jk}(\sigma + i\tau)\, d\sigma$$
$$(-\infty < t < +\infty, \quad j, k = 1, 2), \quad (3.2)$$

где функции $\Phi_{jk}(\lambda)$ определяются формулами (1.24). Согласно замечанию к лемме 4, функции $\rho_{11}(t)$ и $\rho_{22}(t)$ — неубывающие, а функция $\rho_{12}(t) = \rho_{21}(t)$ имеет ограниченное изменение в любом конечном промежутке.

При помощи соотношения (1.28) и неравенства Коши— Буняковского легко доказать, что для любых вещественных t'_1, t'' $(t' < t'')$ имеет место неравенство:

$$|\rho_{12}(t'') - \rho_{12}(t')|^2 \leqslant [\rho_{11}(t'') - \rho_{11}(t')]\,[\rho_{22}(t'') - \rho_{22}(t')]. \quad (3.3)$$

---

* По поводу определения спектральной функции см., например, (1), стр. 370. Отметим, что, согласно определению, спектральная функция предполагается непрерывной слева, т. е. $E_{t-0} = E_t\,(-\infty < t < +\infty)$.

Из сказанного вытекает, что при любых комплексных ζ_1, ζ_2 формула

$$\sum_{j,k=1}^{2} \rho_{jk}(t)\,\overline{\zeta_j}\,\zeta_k$$

является неубывающей функцией от t.

Рассмотрим линейное многообразие непрерывных векторных функций $\vec{F}(t)\,\{F_1(t),\ F_2(t)\}$ $(-\infty < t < +\infty)$, равных нулю вне конечного интервала. Введем скалярное произведение

$$(\vec{F}, \vec{G}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k=1}^{2} F_j(t)\,\overline{G_k(t)}\,d\rho_{jk}(t). \tag{3.4}$$

Пополняя метризованное таким образом линейное многообразие, получим гильбертово пространство векторных функций, которое обозначим через $L^2_{\tilde{\rho}}(-\infty, +\infty)$.

На функциональной характеристике пространства $L^2_{\tilde{\rho}}(-\infty, +\infty)$ мы останавливаться не будем *. Отметим лишь, что формула (3.4) остается в силе для любых векторных функций $\vec{F}(t)$, $\vec{G}(t)$ из $L^2_{\tilde{\rho}}(-\infty, +\infty)$. При этом в частном случае ограниченных в каждом конечном промежутке векторных функций правая часть обозначает

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} \sum_{j,k=1}^{2} F_j(t)\,\overline{G_k(t)}\,d\rho_{jk}(t). \;**$$

В случае неограниченных векторных функций предельный переход осуществляется обычным способом при помощи «срезанных» векторных функций.

3. Перейдем к рассмотрению основного предложения настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью или бесконечная константа, а $E_t\,(-\infty < t < +\infty)$ — определяемая ею спектральная функция оператора L. Тогда для любой функции $f(x)$ из $L^2(0, +\infty)$, каковы бы ни были вещественные числа α и β, имеют место следующие равенства:*

$$\left(\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right) f = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x;\sigma)\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma), \tag{3.5}$$

$$f(x) = \underset{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x;\sigma)\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma), \tag{3.6}$$

$$\left(\left|\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right| f, f\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j,k=1}^{2} \overline{F_j(f;\sigma)}\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma), \tag{3.7}$$

---

* См. ([3]). Справка по этому поводу имеется, например, в ([1]), стр. 280—281.

** Интегралы следует понимать в смысле Лебега—Стильтьеса.

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \overline{F_j(f;\sigma)} F_k(f;\sigma)\, d\rho_{jk}(\sigma), \tag{3.8}$$

где функции $\rho_{jk}(\sigma)$ $(j,\ k=1,\ 2;\ -\infty < \sigma < +\infty)$ *определяются формулой* (3.2), *а функции* $F_k(f;\sigma)$ $(k=1,\ 2;\ -\infty<\sigma<+\infty)$ *служат компонентами векторной функции* $\vec{F}(f;\sigma)$, *которая в пространстве* $L^2_{\tilde{\rho}}(-\infty, +\infty)$, *порождаемом матричной функцией* $\|\rho_{jk}\|^2_{j,k=1}$, *является пределом при* $n\to\infty$ *последовательности векторных функций* $\vec{F}^{(n)}(f;\sigma)$ *с компонентами*

$$F_k^{(n)}(f;\sigma) = \int_0^n f(s)\, u_k(s;\sigma)\, ds \quad (k=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.9}$$

В частности, если $f(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала, то

$$F_k(f;\sigma) = \int_0^{+\infty} f(s)\, u_k(s;\sigma)\, ds \quad (k=1,\ 2). \tag{3.10}$$

Доказательство. Предположим сначала, что функция $f(x)$ из $L^2(0, +\infty)$ обращается в нуль вне конечного интервала. Пусть R_λ — обобщенная резольвента оператора L, соответствующая функции $\vartheta(\lambda)$. Положим

$$y(x;\lambda) = R_\lambda f \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$w(x;\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta [y(x;\sigma+i\tau) - y(x;\sigma-i\tau)]\, d\sigma$$
$$(0 \leqslant x < +\infty, \quad \tau \neq 0).$$

При любом $\tau\ (\tau\neq 0)$

$$w(x;\tau) \in L^2(0, +\infty)$$

и, в силу (3.1), при $\tau \to +0$

$$w(x;\tau) \xrightarrow{\text{сл}} \left(\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right) f. \tag{3.11}$$

С другой стороны, принимая во внимание формулы (1.22) и (1.25), при любом $\tau > 0$ получаем:

$$w(x;\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta [G(x;\sigma+i\tau) - G(x;\sigma-i\tau)]\, d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \sum_{j,k=1}^{2} [u_j(x;\sigma+\tau i)\, F_k(f;\sigma+\tau i)\, \Phi_{jk}(\sigma+\tau i) -$$
$$- u_j(x;\sigma-\tau i)\, F_k(f;\sigma-\tau i)\, \overline{\Phi_{jk}(\sigma+\tau i)}]\, d\sigma, \tag{3.12}$$

где

$$G(x;\lambda) = u_2(x;\lambda)\int_0^x f(s)\, u_1(s;\lambda)\, ds + u_1(x;\lambda)\int_x^{+\infty} f(s)\, u_2(s;\lambda)\, ds,$$

а функции $F_k(f;\lambda)$, $\Phi_{jk}(\lambda)$ $(j,\ k=1,\ 2)$ определяются по формулам (1.23), (1.24).

Для любого фиксированного x $(0 \leqslant x < +\infty)$ первый интеграл в правой части равенства (3.12) стремится к нулю при $\tau \to +0$, так как $G(x; \lambda)$ является целой функцией от λ. Принимая во внимание свойства функций $\Phi_{jk}(\lambda)$, рассмотренные в п. 4 § 1, и применяя ко второму интегралу в равенстве (3.12) лемму 5 (с учетом замечания к лемме), находим, что при любом фиксированном значении $x (0 \leqslant x < +\infty)$ имеет место формула:

$$\lim_{\tau \to +0} w(x; \tau) = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j, k=1}^{2} u_j(x; \sigma) F_k(f; \sigma) d\rho_{jk}(\sigma), \tag{3.13}$$

где, в частности, $F_k(f; \sigma)$ $(k = 1, 2)$ определяется формулой (3.10). Итак, согласно соотношениям (3.11) и (3.13), при $\tau \to +0$ $w(x; \tau)$ имеет предел в смысле слабой сходимости в $L^2(0, +\infty)$, а также предел в смысле сходимости всюду на промежутке $[0, +\infty)$. Но тогда, как известно, обе предельные функции эквивалентны в $L^2(0+\infty)$ и, следовательно, из сопоставления соотношений (3.11) и (3.13) вытекает равенство (3.5).

Умножая скалярно обе части (3.5) на $f(x)$, легко получим равенство (3.7). Переходя в формулах (3.5) и (3.7) к пределу при $\alpha \to -\infty$, $\beta \to +\infty$, получим равенства (3.6) и, соответственно, (3.8).

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны для того частного случая, когда $f(x)$ является функцией из $L^2(0, +\infty)$, обращающейся в нуль вне конечного интервала.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, +\infty)$. Введем в рассмотрение последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся в среднем к $f(x)$, полагая

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0 & \text{при } x > n. \end{cases} \tag{3.14}$$

В силу равенства (3.8), справедливость которого уже доказана для функций, обращающихся в нуль вне конечного интервала, имеем:

$$(f_n, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j, k=1}^{2} \overline{F_j^{(n)}(f; \sigma)} F_k^{(n)}(f; \sigma) d\rho_{jk}(\sigma) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.15}$$

где, согласно (3.10),

$$F_k^{(n)}(f; \sigma) = \int_0^{+\infty} f_n(s) u_k(s; \sigma) ds = \int_0^n f(s) u_k(s; \sigma) ds \quad (k = 1, 2).$$

На основании равенства (3.15) легко заключить, что последовательность векторных функций

$$\vec{F}^{(n)}(f; \sigma) \{F_1^{(n)}(f; \sigma), \ F_2^{(n)}(f; \sigma)\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

является фундаментальной в пространстве $L^2_{\tilde{\rho}}(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, сходится в этом пространстве к некоторой векторной функции $\vec{F}(f; \sigma)$ с компонентами $F_1(f; \sigma)$, $F_2(f; \sigma)$. Переходя в равенстве (3.15) к пределу при $n \to \infty$, получим (3.8).

Заметим, далее, что последовательность векторных функций $\vec{F}^{(n)}(f;\sigma)$, компоненты которых определяются формулой (3.9), сходится к векторной функции $\vec{F}(f;\sigma)$ и в смысле метрики пространства $L^2_{\widetilde{\rho}}(\alpha,\beta)$, т. е., если все эти функции рассматривать лишь в промежутке $[\alpha,\beta]$. Так как для функций $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ формула (3.7) имеет место, то

$$\left(\left[\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}\right]f_n, f_n\right)=\int\limits_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}\overline{F_j^{(n)}(f;\sigma)}\,F_k^{(n)}(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma)\ (n=1,2\ldots).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n\to\infty$, установим справедливость формулы (3.7) в рассматриваемом общем случае.

Докажем равенство (3.5). Поскольку для функций из $L^2(0,+\infty)$, обращающихся в нуль вне конечного интервала, эта формула уже доказана, то

$$\left(\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}\right)f_n=$$
$$=\int\limits_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,F_k^{(n)}(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma)\quad(n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.16}$$

При любом фиксированном $x\,(0\leqslant x<+\infty)$ правую часть равенства (3.16) можно рассматривать как скалярное произведение, в смысле метрики пространства $L^2_{\widetilde{\rho}}(\alpha,\beta)$, двух векторных функций:

$$\vec{F}^{(n)}(f;\sigma)\,\{F_1^{(n)}(f;\sigma),\ F_2^{(n)}(f;\sigma)\}\qquad\text{и}\qquad\vec{u}_x(\sigma)\,\{u_1(x;\sigma),\ u_2(x;\sigma)\}.$$

Согласно сделанному выше замечанию о последовательности $\vec{F}^{(n)}(f;\sigma)$ $(n=1, 2, \ldots)$, можно заключить, что при любом фиксированном значении x $(0\leqslant x<+\infty)$ правая часть (3.16) имеет при $n\to\infty$ предел

$$\int\limits_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma). \tag{3.17}$$

Но левая часть равенства (3.16) сходится в пространстве $\bar{L}^2(0,+\infty)$ при $n\to\infty$ к пределу

$$\left(\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}\right)f, \tag{3.18}$$

и, следовательно, функции (3.17) и (3.18) эквивалентны в пространстве $L^2(0,+\infty)$ и формула (3.5), таким образом, доказана.

Равенство (3.6) является очевидным следствием формулы (3.5).

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Если в каком-либо промежутке функция $f(x)$ из $L^2(0,+\infty)$ непрерывна, а несобственный интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma)$$

сходится и также является непрерывной функцией от x, то для любого значения x из рассматриваемого промежутка

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,F_k(f;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma).$$

Следствие 2. *Для того чтобы точка* γ $(-\infty<\gamma<+\infty)$ *являлась точкой непрерывности спектральной функции* E_t *оператора* L, *необходимо и достаточно, чтобы это была точка непрерывности матричной функции* $\|\rho_{jk}(t)\|_{j,\,k=1}^2$.

Заметим, что матричная функция $\|\rho_{jk}(t)\|_{j,\,k=1}^2$ непрерывна при $t=\gamma$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция

$$\rho(t)=\rho_{11}(t)+\rho_{22}(t).$$

В этом легко убедиться, если принять во внимание неравенство (3.3).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* E_t $(-\infty<t<+\infty)$ — *спектральная функция оператора* L, *определяемая какой-либо функцией* $\vartheta(\lambda)$ *так же, как в теореме 2. Тогда, каковы бы ни были вещественные числа* α *и* β $(\alpha<\beta)$, *оператор*

$$\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}$$

является интегральным оператором с ядром

$$K(x,s)=\int_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,u_k(s;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma)\quad(0\leqslant s,\quad x<+\infty),\quad(3.19)$$

причем для любого фиксированного x $K(x,s)\in L^2(0,+\infty)$. *Функции* $\rho_{jk}(\sigma)$ $(j,k=1,2)$ *попрежнему определяются формулой* (3.2).

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0,+\infty)$. Будем исходить из соотношения (3.16), где функции $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ определяются формулами (3.14). В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что правая часть равенства (3.16) имеет конечный предел при $n\to\infty$ для любого фиксированного значения x $(0\leqslant x<+\infty)$.

Подставляя в правую часть (3.16) вместо $F_k^{(n)}(f;\sigma)$ соответствующее выражение из (3.9) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\left(\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}\right)f_n=\int_0^n f(s)\,ds\int_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)u_k(s;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma)\,(n=1,2,\ldots).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$ и принимая во внимание, что выражение в правой части имеет предел для любого фиксированного значения x $(0\leqslant x<+\infty)$, получим:

$$\left(\frac{E_\beta+E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_\alpha+E_{\alpha+0}}{2}\right)f=\int_0^{+\infty}f(s)\,ds\int_\alpha^\beta\sum_{j,k=1}^{2}u_j(x;\sigma)\,u_k(s;\sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma).\quad(3.20)$$

Поскольку несобственный интеграл справа сходится для любой функции $f(s)\in L^2(0,+\infty)$ при любом фиксированном x $(0\leqslant x<+\infty)$, то отсюда, как известно, следует, что ядро (3.19) при любом фиксированном x принадлежит пространству $L^2(0,+\infty)$ [см., например, ([1]), стр. 60—61].

Формула (3.20) в соединении с последним замечанием и доказывает теорему.

4. Из изложенных в предыдущем пункте результатов легко получить хорошо известные формулы для ортогональных спектральных функций

оператора L^*. Заметим прежде всего, что спектральная функция E_t является ортогональной тогда и только тогда, когда определяющая ее функция $\vartheta(\lambda)$ равна вещественной постоянной или бесконечности.

Предположим, что $\vartheta \neq 0, +\infty$. Тогда, в силу (1.24) и (3.2), имеем:

$$\begin{aligned} \rho_{12}(\sigma) &= \rho_{21}(\sigma) = -\frac{1}{\vartheta}\rho_{11}(\sigma), \\ \rho_{22}(\sigma) &= \frac{1}{\vartheta^2}\rho_{11}(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < +\infty). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, +\infty)$. Принимая во внимание (3.21), формулам (3.5)—(3.8) и (3.19) можно придать в рассматриваемом случае соответственно следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right) f = \int_\alpha^\beta \Phi(f; \sigma)\, v(x; \sigma)\, d\rho(\sigma), \\ &f(x) = \underset{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to +\infty}}{\text{l. i. m.}} \int_\alpha^\beta \Phi(f; \sigma)\, v(x; \sigma)\, d\rho(\sigma), \\ &\left(\left[\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2}\right] f, f\right) = \int_\alpha^\beta |\Phi(f; \sigma)|^2\, d\rho(\sigma), \\ &(f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(f; \sigma)|^2\, d\rho(\sigma), \\ &K(x, s) = \int_\alpha^\beta v(x; \sigma)\, v(s; \sigma)\, d\rho(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

где введены обозначения:

$$\rho(\sigma) = \rho_{11}(\sigma), \quad v(x; \sigma) = u_1(x; \sigma) - \frac{1}{\vartheta} u_2(x; \sigma),$$

а $\Phi(f; \sigma)$ есть предел в смысле сходимости в $L^2_\rho(-\infty, +\infty)$ последовательности

$$\Phi^{(n)}(f; \sigma) = \int_0^n f(s)\, v(s; \sigma)\, ds \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

при $n \to \infty$.

Если $\vartheta = \infty$, то формулы (3.22) остаются в силе, причем попрежнему

$$\rho(\sigma) = \rho_{11}(\sigma),$$

а

$$v(x; \sigma) = u_1(x; \sigma).$$

Если, наконец, $\vartheta = 0$, то, согласно (1.24) и (3.2),

$$\rho_{11}(\sigma) = \rho_{12}(\sigma) = \rho_{21}(\sigma) = 0.$$

В соответствии с теоремами 2 и 3 формулы (3.22) снова оказываются справедливыми, но на этот раз следует положить

$$\rho(\sigma) = \rho_{22}(\sigma),$$

$$v(x; \sigma) = u_2(x; \sigma).$$

Поступило
12.IV.1954

* См., например, (1), стр. 445—464, а также (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.— Л , 1950.

[2] Ахиезер Н. и Крейн М., О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Харьков, 1938.

[3] Кац И., О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями, Записки Научно-исследовательского института математики и механики и Харьковского математ. общ-ва, т. XXII (1950), 95—114.

[4] Крейн М. Г., Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале (0, ∞), Доклады Ак. наук СССР, т. 74, № 1 (1950), 9—12.

[5] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, М.— Л., 1950.

[6] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, М.— Л., 1947.

[7] Штраус А. В., Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., т. 18, № 1 (1954), 51—86.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 221—246

С. Б. СТЕЧКИН

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(ВТОРОЕ СООБЩЕНИЕ)

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В настоящей работе, являющейся продолжением и развитием работы автора (13) *, строится несколько новых примеров не абсолютно сходящихся рядов Фурье, а также рядов Фурье, не имеющих ни одной точки абсолютной сходимости.

Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, $\tilde{f}(x)$ — тригонометрически сопряженная с ней функция. Если ряд Фурье функции $f(x)$

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

абсолютно сходится, т. е.

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

то будем писать $f(x) \in A$; в противном случае будем писать $f(x) \bar{\in} A$. Через $\mathfrak{M}$ будем обозначать некоторый (фиксированный) класс непрерывных периодических функций.

Обычно задача исследования абсолютной сходимости рядов Фурье рассматривается в следующей постановке [см., например, (4) или (I)]:

Задача 1. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $f(x) \bar{\in} A$?

Если ответ на этот вопрос положителен, то имеет смысл поставить несколько дальнейших задач:

Задача 2. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $\tilde{f}(x) \in \mathfrak{M}$ и $f(x) \bar{\in} A$?

Задача 3. Существует ли функция $f(x) \in \mathfrak{M}$ такая, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[f]$ и $\mathfrak{S}[\tilde{f}]$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости?

Задача 4. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $\tilde{f}(x) \in \mathfrak{M}$ и такая, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[f]$ и $\mathfrak{S}[\tilde{f}]$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости?

* В дальнейшем эта работа цитируется как (I).

Из того, что для фиксированного класса $\mathfrak{M}$ задача 1 решается положительно, еще не вытекает такое же решение задачи 2. Например, если $\mathfrak{M}$ есть класс $\mathfrak{A}$ абсолютно непрерывных функций, то, как хорошо известно,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n} \in \mathfrak{A},$$

и, следовательно, задача 1 решается положительно. С другой стороны, согласно одной теореме Харди и Литтльвуда [см. ([19]), и ([20]), а также ([16]) и ([7])], условия $f(x) \in \mathfrak{A}$, $\tilde{f}(x) \in \mathfrak{A}$ влекут $f(x) \in A$, т. е. задача 2 решается для класса $\mathfrak{A}$ отрицательно.

В этой работе устанавливается, что для некоторых классов $\mathfrak{M}$, встречающихся при исследовании абсолютной сходимости рядов Фурье, не только задача 1 решается положительно, но также имеется положительное решение задач 2 и 4. Тем самым достигается усиление известных примеров не абсолютно сходящихся рядов Фурье. При этом задачи 2 и 4 рассматриваются нами не в терминах пар сопряженных рядов Фурье, а в эквивалентных им терминах рядов Тейлора.

В § 1 исследуется задача 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$E_n^*(f) = O(G_n),$$

где $E_n^*(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n-1$, а $\{G_n\}$ — заданная невозрастающая последовательность положительных чисел. При построении примеров § 1 употребляется конструкция, впервые указанная С. Н. Бернштейном ([4]).

В § 2 рассматривается задача 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$\omega_k(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

где $\omega_k(\delta, f)$ — модуль непрерывности k-го порядка функции $f(x)$, а $\omega(\delta)$ — заданная положительная функция. Некоторые результаты этого параграфа являются новыми даже в постановке задачи 1.

§ 3 посвящен исследованию задачи 4 для тех же классов $\mathfrak{M}$. При выводе основных теорем этого параграфа используются результаты § 1 и 2.

Выражаю благодарность Н. К. Бари за постоянный интерес к моей работе и постановку задачи, рассматриваемой в § 3; а также А. Г. Постникову, который указал мне необычайно простое доказательство леммы 2.

§ 1. Об абсолютной сходимости рядов Тейлора

1.1. Постановка задачи. Из результатов С. Н. Бернштейна ([4]) [см. также (I), Введение] вытекает справедливость следующего предложения:

ТЕОРЕМА I. *Пусть* $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \downarrow 0$. *Для того чтобы соотношения*

$$E_n^*(f) = O(G_n) \tag{1.1}$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} G_n. \tag{1.2}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1.3}$$

регулярную в круге $|z| < 1$ и непрерывную в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Обозначим через $E_n(F)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ее наилучшие приближения в круге $|z| \leqslant 1$ посредством многочленов $p_{n-1}(z)$ степени $n - 1$:

$$E_n(F) = \inf_{p_{n-1}} \| F(z) - p_{n-1}(z) \| = \inf_{p_{n-1}} \max_{|z| \leqslant 1} | F(z) - p_{n-1}(z)|.$$

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$$

сходится, то будем писать $F(z) \in A$.

Зададим последовательность $\{G_n\}$, удовлетворяющую условиям

$$G_n > 0 \ (n = 1, 2, \ldots), \ G_n \downarrow 0,$$

и рассмотрим класс функций $F(z)$, для которых

$$E_n(F) = O(G_n). \tag{1.4}$$

Останется ли теорема I справедливой, если в ее формулировке заменить условие (1.1) условием (1.4)? Как хорошо известно, из соотношений (1.1), вообще говоря, не вытекает, что и сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет аналогичным условиям

$$E_n^*(\tilde{f}) = O(G_n).$$

Поэтому возможность указанной замены не является непосредственным следствием из теоремы I. Тем не менее мы покажем, что такая замена все-таки возможна. Для этого мы воспользуемся решением одной экстремальной задачи для обыкновенных многочленов, которая рассматривается в п. 1.2. Отметим, что как основной результат этого параграфа, так и употребляемая для его доказательства конструкция будут использованы в дальнейших разделах работы.

1.2. Одна экстремальная задача. Рассмотрим всевозможные многочлены вида

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i \beta_\nu} z^\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqslant \beta_\nu < 1) \tag{1.5}$$

и положим

$$M_n = \inf_{\beta_\nu} \| p_n(z) \| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.6}$$

где, как и выше,

$$\| p_n(z) \| = \max_{|z| \leqslant 1} | p_n(z) | = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} | p_n(e^{2\pi i x}) |.$$

Здесь будет показано, что

$$M_n \sim \sqrt{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \ * \tag{1.7}$$

* Запись $A_n \sim B_n$ означает, что найдутся положительные константы C_1 и C_2, для которых $C_1 B_n \leqslant A_n \leqslant C_2 B_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Оценка M_n снизу не представляет труда. По равенству Парсеваля, имеем:

$$\int_0^1 |p_n(e^{2\pi i x})|^2\,dx = n+1,$$

откуда

$$\|p_n(z)\| \geqslant \left\{\int_0^1 |p_n(e^{2\pi i x})|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n+1}$$

и, следовательно,

$$M_n \geqslant \sqrt{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.8}$$

Оценка M_n сверху непосредственно вытекает из известных результатов Харди и Литтльвуда ([17]) показали, что если иррациональность μ разлагается в непрерывную дробь с ограниченными неполными частными (например, $\mu=\sqrt{2}$), то многочлены

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i \mu \nu^2} z^\nu \tag{1.9}$$

удовлетворяют условию

$$\|p_n(z)\| \leqslant C_3\sqrt{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.10}$$

Кроме того, Харди и Литтльвуд ([18]) доказали, что если $\alpha \neq 0$ и

$$p_n(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i \alpha \nu \ln \nu} z^\nu, \tag{1.11}$$

то снова выполняется условие (1.10). Каждый из этих примеров показывает, что

$$M_n \leqslant C_3\sqrt{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

откуда, в связи с (1.8), вытекает (1.7).

Мы дадим здесь еще один, более простой, пример последовательности многочленов вида (1.5), удовлетворяющих условиям (1.10). Для этого нам понадобится одна лемма о тригонометрических суммах, установленная Р. О. Кузьминым ([8]) [см. также ([22]) и ([23]), где приведено весьма простое доказательство, и ([21])].

ЛЕММА 1. *Пусть $g(\nu)$ — действительная функция, удовлетворяющая условиям*

$$0 < \theta \leqslant g(1)-g(0) \leqslant g(2)-g(1) \leqslant \cdots \leqslant g(n)-g(n-1) \leqslant 1-\theta, \tag{1.12}$$

где $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i g(\nu)}\right| < \frac{1}{\theta}. \tag{1.13}$$

Эта лемма может с успехом применяться для оценки тригонометрических сумм в тех случаях, где обычно пользуются леммами Ван дер

Корпута ([15]) [см. также ([7]), § 5.3]. Отметим, что изменение значений функции $g(\nu)$ на целые числа, очевидно, не влияет на величину тригонометрической суммы

$$\sum_{\nu}^{n} e^{2\pi i g(\nu)};$$

поэтому лемма 1 справедлива также, если

$$p+\theta \leqslant g(1)-g(0) \leqslant g(2)-g(1) \leqslant \ldots \leqslant g(n)-g(n-1) \leqslant p+1-\theta, \tag{1.14}$$

где $0<\theta \leqslant \frac{1}{2}$, а p — произвольное целое число.

ЛЕММА 2. *Пусть $a=1$ или 2 и $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant N$. Тогда*

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right)}=O(\sqrt{N+1}) \qquad (N=0, 1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

равномерно относительно m, n и относительно $x \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. Имеем:

$$g(\nu)=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right), \qquad g(\nu)-g(\nu-1)=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{2\nu-1}{N}+x\right).$$

Таким образом разности $h_\nu=g(\nu)-g(\nu-1)$ монотонно возрастают вместе с ν и соседние точки h_ν находятся друг от друга на расстоянии $\frac{a}{\pi N}$. Отрезок $\Delta=[h_{m+1}, h_n]$ имеет длину

$$\frac{a}{\pi} \frac{n-m-1}{N}<\frac{a}{\pi} \leqslant \frac{2}{\pi}.$$

Поэтому при $N \geqslant N_0$ имеется не более одной целой точки p, принадлежащей отрезку Δ или отстоящей от него на расстояние, не превосходящее $\frac{1}{2\sqrt{N}}$.

Пусть $N \geqslant N_0$ и неравенство $|p-h_\nu| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{N}}$ выполняется для $n_1 \leqslant \nu \leqslant n_2$ $(m+1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n)$. Представим сумму (1.15) в форме

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right)}=\sum_{\nu=m}^{n_1-1}+\sum_{\nu=n_1}^{n_2}+\sum_{\nu=n_2+1}^{n}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3$$

(каждая из сумм $\sum_j$ может случайно оказаться пустой). Тогда сумма $\sum_2$ содержит не более $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot N\right)=O(\sqrt{N})$ членов, откуда

$$\sum\nolimits_2=O(\sqrt{N}).$$

Применяя к суммам $\sum_1$ и $\sum_2$ лемму 1 с $\theta=\frac{1}{2\sqrt{N}}$, получаем, что

$$\sum\nolimits_1=O(\sqrt{N}) \text{ и } \sum\nolimits_3=O(\sqrt{N}).$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right)} = O(\sqrt{N}) \qquad (N \geqslant N_0)$$

равномерно относительно m, n и относительно x. Так как оценка (1.15), очевидно, справедлива также для $N < N_0$, то лемма 2 доказана.

Из этой леммы непосредственно вытекает, что многочлены

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{i\frac{\nu^2}{n}} z^\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.16}$$

удовлетворяют условию (1.10), откуда, как и выше, следует (1.7).

Заметим, что формула (1.7) позволяет определить порядок роста верхней грани

$$T_n = \sup_{\|p_n\| \leqslant 1} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|,$$

распространенной на многочлены $p_n(z)$ вида

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu. \; *$$

В самом деле, с одной стороны,

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \leqslant \sqrt{(n+1) \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2} \leqslant \sqrt{n+1}\, \|p_n(z)\|,$$

откуда

$$T_n \leqslant \sqrt{n+1}.$$

С другой стороны, полагая

$$p_n(z) = \frac{\hat{p}_n(z)}{C_3\sqrt{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где многочлены $\hat{p}_n(z)$ имеют вид (1.5) и удовлетворяют условию (1.10), будем иметь:

$$\|p_n(z)\| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \geqslant \frac{n+1}{C_3\sqrt{n+1}} = C_4\sqrt{n+1},$$

откуда

$$T_n \geqslant C_4\sqrt{n+1}.$$

Окончательно,

$$T_n \sim \sqrt{n+1}. \tag{1.17}$$

Впрочем, этот результат в дальнейшем не используется.

1.3. Аналог теоремы I.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \downarrow 0$. *Для того чтобы соотношения*

$$E_n(F) = O(G_n) \tag{1.18}$$

---

* Аналогичная задача для тригонометрических полиномов рассматривалась ранее С. Н. Бернштейном [см. (1), (2), (3) и (6)].

влекли $F(z) \in A$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} G_n. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \operatorname{Re} F(e^{ix})$ *. Так как

$$E_n^*(f) \leqslant E_n(F) = O(G_n),$$

то сходимость ряда (1.19) влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} E_n^*(f),$$

откуда, в силу теоремы I, $f(x) \in A$ и, следовательно, $F(z) \in A$. Тем самым достаточность условий теоремы установлена.

Для доказательства их необходимости допустим, что ряд (1.19) расходится, и построим функцию $F_1(z) \overline{\in} A$, для которой выполняются соотношения (1.18). Согласно лемме 2, многочлены

$$P_k(z) = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{i2^{-k}n^2} z^n = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} D_n z^n \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют условию

$$\| P_k(z) \| \leqslant C_5 2^{\frac{k}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{1.20}$$

кроме того, очевидно,

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} | D_n | = 2^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.21}$$

Зададим произвольно последовательность $\{G_n\}$ с расходящимся рядом (1.19) и положим

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k P_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{i2^{-k}n^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1.22}$$

где

$$u_k = 2^{-\frac{k}{2}} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}).$$

Покажем, что $F_1(z) \overline{\in} A$ и что для этой функции выполняются соотношения (1.18). Полагая

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu,$$

получаем, в силу (1.20):

$$E_{2^k-1}(F_1) \leqslant \| F_1(z) - s_{2^k-1-1}(z) \| = \| \sum_{\varkappa=k}^{\infty} u_\varkappa P_\varkappa(z) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varkappa=k}^{\infty} u_\varkappa \| P_\varkappa(z) \| \leqslant C_5 \sum_{\varkappa=k}^{\infty} 2^{\frac{\varkappa}{2}} u_\varkappa = C_5 \sum_{\varkappa=k}^{\infty} (G_{2^\varkappa} - G_{2^{\varkappa+1}}) = C_5 G_{2^k}.$$

---

* Если $w = u + iv$, где u и v действительны, то $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w = v$.

Отсюда, ввиду монотонности последовательностей $\{E_n(F_1)\}$ и $\{G_n\}$,

$$E_n(F_1) \leqslant E_{2^{k-1}}(F_1) \leqslant C_5 G_{2^k} \leqslant C_5 G_n \quad (2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k,\ k=1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$E_n(F_1) = O(G_n).$$

Остается показать, что ряд $\sum |c_n|$ расходится. Имеем, согласно (1.21):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |D_n| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}).$$

Допустим, что этот ряд сходится. Тогда

$$\sum_{\varkappa=k}^{\infty} 2^{\frac{\varkappa}{2}} (G_{2^\varkappa} - G_{2^{\varkappa+1}}) \geqslant 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\varkappa=k}^{\infty} (G_{2^\varkappa} - G_{2^{\varkappa+1}}) = 2^{\frac{k}{2}} G_{2^k},$$

откуда

$$2^{\frac{k}{2}} G_{2^k} = o(1).$$

В силу этой оценки законно преобразование Абеля, и мы получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2^{\frac{1}{2}} G_2 + (1 - 2^{-\frac{1}{2}}) \sum_{k=2}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} G_{2^k} \right\} \geqslant C_6 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} G_{2^k}. \qquad (1.23)$$

Но, согласно теореме Коши, из расходимости ряда (1.19) вытекает расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} G_{2^k}.$$

Отсюда и из (1.23) $\sum |c_n| = \infty$. Таким образом предположение о сходимости ряда $\sum |c_n|$ ведет к противоречию и, следовательно, $\sum |c_n| = \infty$.

Теорема доказана.

1.4. Замечания. Для доказательства второй половины теоремы 1 мы могли бы вместо многочленов $P_k(z)$ воспользоваться любой другой последовательностью многочленов, обладающих аналогичными свойствами. В частности, такие многочлены можно построить на основе примеров Харди и Литтльвуда [см. (1.9) и (1.11)]; однако это не дало бы в данном случае никаких упрощений доказательства.

В качестве непосредственного следствия из теоремы 1 вытекает решение сформулированной во введении задачи 2 для класса $\mathfrak{M}$ непрерывных периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (1.1):

Пусть $G_n > 0, G_n \downarrow 0$; *для того чтобы существовала функция* $f(x) \overline{\in} A$ *такая, что*

$$E_n^*(f) = O(G_n), \quad E_n^*(\tilde{f}) = O(G_n),$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд (1.19).

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f(x) = \operatorname{Re} F_1(e^{ix}),$$

где $F_1(z)$ — функция, построенная в доказательстве теоремы 1.

Результаты пп. 1.2—1.3 позволяют весьма просто рассмотреть следующую сходную задачу. Пусть

$$R_n(F) = \| F(z) - s_{n-1}(z) \| \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.24}$$

где $s_n(z)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора функции $F(z)$. Какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную последовательность $\{G_n\}$ для того, чтобы соотношения

$$R_n(F) = O(G_n) \tag{1.25}$$

влекли $F(z) \in A$?

Поскольку последовательность наилучших приближений $\{E_n(F)\}$ является невозрастающей, то в качестве ее мажорант $\{G_n\}$ имело смысл рассматривать снова только невозрастающие последовательности. Как известно, последовательность приближений суммами Тейлора $\{R_n(F)\}$ может уже и не быть монотонной. Поэтому в качестве ее мажорант рассматриваются произвольные положительные последовательности $\{G_n\}$, не обязательно невозрастающие.

Решение поставленной задачи дается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$; *для того чтобы соотношения* (1.25) *влекли* $F(z) \in A$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1} n^{-\frac{1}{2}} G_n^*, \tag{1.26}$$

где

$$G_n^* = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} G_k \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.27}$$

Доказательство. Пусть ряд (1.26) сходится. В силу (1.25)

$$E_k(F) \leqslant R_k(F) \leqslant C_7 G_k.$$

Но последовательность $\{E_k(F)\}$ не возрастает. Поэтому

$$E_n(F) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} E_k(F) \leqslant C_7 \min_{1 \leqslant k \leqslant n} G_k = C_7 G_n^*,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} E_n(F) < \infty$$

и, следовательно, $F(z) \in A$.

Пусть теперь ряд (1.26) расходится. Для последовательности $\{G_n^*\}$ построим функцию $F_1(z) \overline{\in} A$, как указано в доказательстве теоремы 1, и покажем, что эта функция удовлетворяет условию

$$R_n(F_1) = O(G_n^*),$$

а тем более и условию (1.25). Пусть $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Имеем:

$$F_1(z) - s_{n-1}(z) = u_k \sum_{\nu=n}^{2^k-1} e^{i2^{-k}\nu^2} z^\nu + \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} u_\varkappa \sum_{\nu=2^{\varkappa-1}}^{2^\varkappa-1} e^{i2^{-\varkappa}\nu^2} z^\nu.$$

Оценим это выражение. Согласно лемме 2,

$$\left\| \sum_{\nu=n}^{2^k-1} e^{i2^{-k}\nu^2} z^\nu \right\| \leqslant C_8 2^{\frac{k}{2}} \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{\nu=2^{\varkappa-1}}^{2^\varkappa-1} e^{i2^{-\varkappa}\nu^2} z^\nu \right\| \leqslant C_8 2^{\frac{\varkappa}{2}}$$

Отсюда

$$R_n(F_1) = \| F_1(z) - s_{n-1}(z) \| \leqslant C_8 \left\{ 2^{\frac{k}{2}} u_k + \sum_{\varkappa=k+1}^{+\infty} 2^{\frac{\varkappa}{2}} u_\varkappa \right\} = C_8 G^*_{2^k} \leqslant C_8 G^*_n,$$

и теорема 2 доказана.

Аналогичные предложения можно было бы установить для многих других методов приближения функций (например, для сумм Фейера), но мы не будем задерживаться на этом.

§ 2. Об абсолютной сходимости рядов Тейлора (продолжение)

2.1. Постановка задачи. В работе (I) рассмотрена следующая задача. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $\omega(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности. Какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную функцию $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ для того, чтобы соотношения

$$\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.1}$$

влекли $f(x) \in A$? Ответ на этот вопрос дается такой теоремой:

ТЕОРЕМА II. *Пусть* $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — *положительная функция. Для того чтобы соотношения* (2.1) *влекли* $f(x) \in A$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^*(n^{-1}), \tag{2.2}$$

где $\omega^*(\delta)$ — *истинная мажоранта, построенная по мажоранте* $\omega(\delta)$.

Истинную мажоранту $\omega^*(t)$ можно определить как верхнюю грань значений модулей непрерывности $\omega(t, f)$, взятую по всевозможным непрерывным периодическим функциям $f(x)$, удовлетворяющим условию:

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

В работе (I) указано эквивалентное конструктивное определение истинной мажоранты, но оно нам не понадобится.

Здесь рассматривается вопрос о перенесении этой теоремы на ряды Тейлора, а также аналогичная задача относительно мажорант модулей непрерывности k-го порядка, тоже для рядов Тейлора. Отметим, что последняя задача не была до сих пор изучена даже для случая рядов Фурье.

План этого параграфа, в общем, совпадает с планом работы (I). Существенное новшество состоит лишь в том, что вместо построения истинной мажоранты мы употребляем здесь другой способ подправления

заданной мажоранты $\omega(\delta)$. Этот способ значительно проще старого даже для случая $k=1$ обыкновенных модулей непрерывности.

2.2. Модули непрерывности k-го порядка. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, вообще говоря, комплексная, и k — натуральное число. Модулем непрерывности k-го порядка функции $f(x)$ называется функция

$$\omega_k(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \max_x |\Delta_h^k f(x)| \quad (0<\delta\leqslant\pi),$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh)$$

— конечная разность функции $f(x)$ k-го порядка с шагом h.

В настоящее время неизвестны необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная функция $\omega(\delta)$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ являлась модулем непрерывности k-го порядка для некоторой непрерывной периодической функции. Исключение составляет лишь случай $k=1$, для которого такие условия были указаны С. М. Никольским ([10]).

Простейшие свойства модулей непрерывности k-го порядка рассмотрены мною в работе ([11]). Отметим здесь некоторые из них *:

1) $\omega_k(0, f)=0$, $\omega_k(\delta, f)\geqslant 0$;

2) $\omega_k(\delta, f)$ — неубывающая функция от δ;

3) $\omega_k(\delta, f)$ — непрерывная функция от δ; в частности,

$$\omega_k(\delta, f)\to 0 \quad (\delta\to +0);$$

4) если $0<\delta<\delta_1\leqslant\pi$, то

$$\delta_1^{-k}\omega_k(\delta_1, f)\leqslant 2^k\delta^{-k}\omega_k(\delta, f);$$

5) если $k\geqslant l\geqslant 1$, то

$$\omega_k(\delta, f)\leqslant 2^{k-l}\omega_l(\delta, f) \quad (0<\delta\leqslant\pi).$$

Далее, имеем такие свойства функции $\omega_k(\delta, f)$:

6) Пусть функция $u(\delta)$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ положительна и не убывает; если

$$\omega_k(n^{-1}, f) = O(u(n^{-1})) \quad (n=1, 2, \ldots),$$

то

$$\omega_k(\delta, f) = O(u(\delta)) \quad (0<\delta\leqslant\pi).$$

Докажем это утверждение. Пусть $0<\delta\leqslant\pi$ и n — наименьшее натуральное число, для которого $\delta\geqslant n^{-1}$. Тогда $\delta\leqslant\pi n^{-1}$. Поэтому, используя свойства 2), 4) и монотонность функции $u(\delta)$, получаем:

$$\omega_k(\delta, f) = \omega_k\left(\pi\cdot\frac{\delta}{\pi}, f\right)\leqslant 2^k\pi^k\omega_k\left(\frac{\delta}{\pi}, f\right)\leqslant$$
$$\leqslant(2\pi)^k\omega_k(n^{-1}, f) = O(u(n^{-1})) = O(u(\delta)).$$

* Строго говоря, в работе ([11]) рассматривается лишь случай действительных функций $f(x)$, однако все доказательства сохраняют силу и для комплексных $f(x)$.

7) $\omega_k(\delta, \operatorname{Re} f) \leqslant \omega_k(\delta, f)$, $\omega_k(\delta, \operatorname{Im} f) \leqslant \omega_k(\delta, f)$,

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \omega_k(\delta, \operatorname{Re} f) + \omega_k(\delta, \operatorname{Im} f).$$

Эти свойства очевидны.

Если функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, то ее модулем непрерывности k-го порядка будем называть функцию

$$\omega_k(\delta, F) = \omega_k(\delta, F(e^{ix})).$$

Такое определение модулей непрерывности аналитической функции «по окружности» является для нас наиболее удобным; однако возможны и другие определения.

8) Пусть функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда

$$E_n(F) \leqslant C_1(k)\, \omega_k(n^{-1}, F) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это неравенство вытекает из теоремы 1 работы ([11]), согласно которой для любой непрерывной периодической функции $f(x)$

$$E_n^*(f) \leqslant C_2(k)\, \omega_k(n^{-1}, f) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.3}$$

если учесть, что аппроксимирующие полиномы для функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ являются сопряженными тригонометрическими полиномами, и воспользоваться свойствами 7).

9) Пусть функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда

$$\omega_k(n^{-1}, F) \leqslant C_3(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(F).$$

Это неравенство можно установить точно так же, как доказывается теорема 8 работы ([11]). При этом нужно воспользоваться таким аналогом неравенства С. Н. Бернштейна для обыкновенных многочленов:

$$\| p_n'(z) \| \leqslant n \, \| p_n(z) \|$$

[см. ([24]), ([25]) или ([5])].

2.3. Операция $**$. Пусть k — натуральное число. Каждой положительной функции $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ отнесем «исправленную» функцию

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \{\eta^{-k} \inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi} \omega(\xi)\} \quad (0 < \delta \leqslant \pi)^*.$$

Для исследования этой операции расчленим ее на части, положив

$$\omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi} \omega(\eta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

и

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k} \omega^{(0)}(\eta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

---

* Эта операция обозначается через ** по аналогии с операцией *, введенной в работе (I).

Перечислим простейшие свойства функции $\omega_k^{**}(\delta)$:

1) если $1 \leqslant k < l$, то

$$0 \leqslant \omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega_l^{**}(\delta) \leqslant \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Первое неравенство вытекает из положительности функции $\omega(\delta)$. Далее, имеем:

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^k \omega^{(0)}(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^l \omega^{(0)}(\eta) = \delta^l \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-l}\omega^{(0)}(\eta) = \omega_l^{**}(\delta) \quad (1 \leqslant k < l).$$

Наконец,

$$\delta^{-k}\omega_k^{**}(\delta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) \leqslant \delta^{-k}\omega^{(0)}(\delta),$$

откуда

$$\omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi} \omega(\eta) \leqslant \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

2) $\delta^{-k}\omega_k^{**}(\delta)$ — невозрастающая функция от δ.

Действительно, если

$$0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi,$$

то

$$\delta^{-k}\omega_k^{**}(\delta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) \geqslant \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \delta_1^{-k}\omega_k^{**}(\delta_1).$$

3) $\omega_k^{**}(\delta)$ — неубывающая функция от δ. Пусть $0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi$. Рассмотрим отдельно два случая.

а) $\inf\limits_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \inf\limits_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta)$.

Тогда

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) <$$

$$< \delta_1^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \omega_k^{**}(\delta_1).$$

б) $\inf\limits_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) > \inf\limits_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta)$.

Тогда

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) \leqslant \omega^{(0)}(\delta). \tag{2.4}$$

Кроме того, в силу условия б),

$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \min\{\inf_{0<\eta\leqslant\delta}, \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1}\} = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta),$$

откуда, учитывая (2.4), выводим:

$$\omega_k^{**}(\delta_1) = \delta_1^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \delta_1^k \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) =$$

$$= \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \left(\frac{\delta_1}{\eta}\right)^k \omega^{(0)}(\eta) \geqslant \inf_{\delta\geqslant\eta\geqslant\delta_1} \omega^{(0)}(\eta) = \omega^{(0)}(\delta) \geqslant \omega_k^{**}(\delta).$$

Итак, в обоих случаях

$$\omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega_k^{**}(\delta_1) \quad (0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi),$$

и свойство 3) доказано.

Из установленных свойств функции $\omega_k^{**}(\delta)$ вытекает, между прочим, что если для некоторого η_0 $(0<\eta_0\leqslant\pi)$

$$\omega_k^{**}(\eta_0)=0,$$

то

$$\omega_k^{**}(\delta)\equiv 0.$$

В самом деле, если

$$0<\delta\leqslant\eta_0,$$

то, согласно 1) и 3),

$$0\leqslant\omega_k^{**}(\delta)\leqslant\omega_k^{**}(\eta_0),$$

т. е.

$$\omega_k^{**}(\delta)=0 \quad (0<\delta\leqslant\eta_0).$$

Если же $\eta_0\leqslant\delta\leqslant\pi$, то, согласно 1) и 2),

$$0\leqslant\omega_k^{**}(\delta)\leqslant(\delta\eta_0^{-1})^k\omega_k^{**}(\eta_0),$$

откуда снова

$$\omega_k^{**}(\delta)=0 \ (\eta_0\leqslant\delta\leqslant\pi).$$

Связь операции ** с мажорантами модулей непрерывности k-го порядка основана на следующем свойстве функции $\omega_k^{**}(\delta)$:

4) Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, $\omega(\delta)>0$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ и

$$\omega_k(\delta,f)\leqslant M\omega(\delta) \quad (0<\delta\leqslant\pi),$$

то

$$\omega_k(\delta,f)\leqslant 2^kM\omega_k^{**}(\delta) \quad (0<\delta\leqslant\pi).$$

Так как функция $\omega_k(\delta,f)$ не убывает, то

$$\omega_k(\delta,f)=\inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi}\omega_k(\eta,f)\leqslant M\inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi}\omega(\eta)=M\omega^{(0)}(\delta).$$

Далее, согласно свойству 4) модулей непрерывности k-го порядка,

$$\delta^{-k}\omega_k(\delta,f)\leqslant 2^k\eta^{-k}\omega_k(\eta,f) \quad (0<\eta\leqslant\delta\leqslant\pi),$$

откуда

$$\omega_k^{**}(\delta)=\delta^k\inf_{0<\eta\leqslant\delta}\eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta)\geqslant M^{-1}\delta^k\inf_{0<\eta\leqslant\delta}\eta^{-k}\omega_k(\eta,f)\geqslant$$
$$\geqslant M^{-1}\delta^k\cdot 2^{-k}\delta^{-k}\omega_k(\delta,f)=M^{-1}2^{-k}\omega_k(\delta,f),$$

т. е.

$$\omega_k(\delta,f)\leqslant 2^kM\omega_k^{**}(\delta) \quad (0<\delta\leqslant\pi).$$

Это свойство показывает, что в качестве мажорант модулей непрерывности k-го порядка естественно выбирать лишь такие функции, которые обладают всеми свойствами исправленных мажорант $\omega_k^{**}(\delta)$. В противном случае для мажоранты $\omega(\delta)$ можно построить исправленную функцию $\omega_k^{**}(\delta)$, которая вновь оказывается мажорантой модулей непрерывности k-го порядка.

2.4. Аналог и обобщение теоремы II.

ЛЕММА 3. *Пусть k — натуральное число, $-1 \leqslant \alpha < k-1$, и функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна, не убывает и удовлетворяет условию*

$$\eta^{-k} u(\eta) \leqslant C_4 \delta^{-k} u(\delta) \quad (0 < \delta < \eta \leqslant \pi). \tag{2.5}$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} u(n^{-1}) \tag{2.6}$$

расходится, то существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающая следующими свойствами:

1) $B_n \downarrow 0$,

2) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} B_n$ *расходится,*

3) $\sum_{n=1}^{N} n^{k-1} B_n = O(N^k u(N^{-1}))$.

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства леммы 2 работы (I), и мы его опускаем.

Теперь мы можем перейти к изложению основных результатов этого параграфа. Итак, пусть функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.7}$$

регулярна в круге $|z| < 1$, непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$ и k — натуральное число. При каких ограничениях на функцию $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ соотношения

$$\omega_k(\delta, F) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекут абсолютную сходимость ряда (2.16) в круге $|z| \leqslant 1$?

Начнем с рассмотрения того случая, когда мажоранта $\omega(\delta)$ ведет себя достаточно правильно.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть k — натуральное число, а функция $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна, не убывает и удовлетворяет условию*

$$\delta^{-k} \omega(\delta) \leqslant C_5 \delta_1^{-k} \omega(\delta_1) \quad (0 < \delta \leqslant \delta_1 \leqslant \pi). \tag{2.8}$$

Для того чтобы соотношения

$$\omega_k(\delta, F) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.9}$$

влекли $F(z) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}). \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть ряд (2.10) сходится. Согласно (2.3), свойству 7) модулей непрерывности (см. п. 2.2) и оценке (2.9), имеем:

$$E_n^*(\operatorname{Re} F(e^{ix})) \leqslant C_2(k)\,\omega_k(n^{-1}, \operatorname{Re} F(e^{ix})) \leqslant$$

$$\leqslant C_2(k)\,\omega_k(n^{-1}, F) \leqslant C_6(k)\,\omega(n^{-1}),$$

откуда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} E_n^*(\operatorname{Re} F(e^{ix})).$$

Отсюда, по теореме I, $\operatorname{Re} F(e^{ix}) \in A$ и, следовательно,

$$F(z) \in A.$$

Пусть теперь ряд (2.10) расходится. Функция $u(\delta) = \omega(\delta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 3 при $\alpha = -\frac{1}{2}$. Применяя эту лемму, получаем, что существует последовательность $B_n \downarrow 0$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} B_n = \infty$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} B_\nu = O(n^k \omega(n^{-1})). \tag{2.11}$$

Далее, воспользуемся теоремой 1, положив $G_n = B_n$. Получаем, что существует функция $F_1(z) \overline{\in} A$, для которой

$$E_n(F_1) = O(B_n).$$

Оценим модуль непрерывности этой функции. В силу свойств 9) и 6) модулей непрерывности и условия (2.11), имеем:

$$\omega_k(n^{-1}, F_1) = O\left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(F_1)\right) =$$

$$= O\left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} B_\nu\right) = O(\omega(n^{-1}))$$

и

$$\omega_k(\delta, F_1) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Итак, для построенной функции $F_1(z)$ выполняются соотношения (2.9). Теорема доказана.

Отметим, что условия этой теоремы выполняются, в частности, если функция $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности k-го порядка некоторой непрерывной периодической функции.

Переходим к рассмотрению общего случая, когда $\omega(\delta)$ — произвольная положительная функция.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, F) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.12}$$

влекли $F(z) \in A$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_k^{**}(n^{-1}), \tag{2.13}$$

где

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta<\delta} \{\eta^{-k} \inf_{\eta \leqslant \xi \leqslant \pi} \omega(\xi)\} \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Доказательство. В самом деле, из свойства 1) и 4) операции ** следует, что классы функций, удовлетворяющих условиям (2.12) и

$$\omega_k(\delta, F) = O(\omega_k^{**}(\delta)),$$

тождественны. Так как, кроме того, функция $\omega_k^{**}(\delta)$ удовлетворяет условию (2.8), то справедливость теоремы 4 вытекает из теоремы 3.

2.5. Замечания. Аналогично тому, как это указывалось в п. 1.4, из теоремы 4 вытекает решение задачи 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$\omega_k(\delta, f) = O(\omega(\delta)).$$

Следствие 4.1. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, f) = O(\omega(\delta)), \quad \omega_k(\delta, \tilde{f}) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (2.13).

Сформулируем также решение задачи 1 для этих классов $\mathfrak{M}$.

Следствие 4.2. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (2.13).

Отметим, что в случае $k=1$ это следствие дает более простое решение задачи, рассмотренной в работе (I). Сопоставляя следствие 4.2 (для случая $k=1$) с теоремой 2 работы (I), выводим, что для любой положительной функции $\omega(\delta)$ ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^{*}(n^{-1}) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1^{**}(n^{-1})$$

сходятся и расходятся одновременно.

2.6. О сходимости некоторых рядов. В заключение исследуем

вопрос о зависимости между условиями сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} E_n(F) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_k(n^{-1}, F) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

а также рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_k^{**}(n^{-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.15}$$

для произвольной положительной мажоранты $\omega(\delta)$.

Так как, согласно свойствам 8) и 5) модулей непрерывности,

$$E_n(F) \leqslant C_1(k)\, \omega_k(n^{-1}, F) \leqslant C_7(k, l)\, \omega_l(n^{-1}, F) \qquad (k > l \geqslant 1), \tag{2.16}$$

то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1(n^{-1}, F)$$

влечет сходимость всех рядов (2.14). Далее, если сходится хотя бы один из рядов (2.14), то, в силу первого неравенства (2.16), сходится и ряд

$$\sum n^{-\frac{1}{2}} E_n(F).$$

Отсюда, используя случай $k=1$ свойства 9) модулей непрерывности, получаем *:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1(n^{-1}, F) \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(F) =$$

$$= C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} E_\nu(F) \leqslant C_8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\frac{1}{2}} E_\nu(F) < \infty.$$

Таким образом все ряды (2.14) сходятся и расходятся одновременно.

Тем не менее, для одной и той же мажоранты $\omega(\delta)$ некоторые из рядов (2.15) могут сходиться, а другие — расходиться.

Зафиксируем натуральное число k и построим возрастающую последовательность положительных чисел $\{n_p\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, положив

$$n_0 = \frac{1}{\pi}, \qquad n_1 = 1, \qquad n_{p+1} = n_p^{2k^2+k} + 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что числа n_p $(p = 1, 2, \ldots)$ — натуральные и

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots .$$

Далее, положим

$$m_p = n_p^{\frac{k}{k+1}} n_{p+1}^{\frac{1}{k+1}} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любого $p \geqslant 1$ будем иметь:

$$n_p < m_p < n_{p+1},$$

$$\frac{n_p}{m_p} = \left(\frac{n_p}{n_{p+1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} = \left(\frac{n_p}{n_p^{2k^2+k}+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leqslant 2^{-\frac{1}{k+1}} \tag{2.17}$$

* Аналогичное рассуждение уже проводилось в работе ([12]).

и

$$\frac{m_p^{\frac{1}{2}}}{n_p^k} = n_p^{\frac{k}{2(k+1)}-k} n_{p+1}^{\frac{1}{2(k+1)}} > n_p^{-\frac{2k^2+k}{2(k+1)}} \cdot n_p^{\frac{2k^2+k}{2(k+1)}} = 1. \tag{2.18}$$

Определим мажоранту $\omega(\delta)$, положив

$$\omega(\delta) = n_{p-1}^{-k} \quad (n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots),$$

и подсчитаем для нее функцию $\omega_k^{**}(\delta)$. Так как $\omega(\delta)$ не убывает, то

$$\omega^{(0)}(\delta) = \omega(\delta).$$

Далее,

$$\inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = n_\mu^{-k} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k} = n_\mu^{-k} \cdot n_\mu^k = 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

и если $n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1} (p \geqslant 1)$, то

$$\inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\delta^{-1} \geqslant 1.$$

Поэтому для любого $\delta (0 < \delta \leqslant \pi)$

$$\inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) =$$

$$= \min\{\inf_{\mu \geqslant p} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta), \inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta)\} = 1$$

и, следовательно,

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) = \delta^k \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_k^{**}(n^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)} < \infty. \tag{2.19}$$

Переходим к оценке $\omega_{k+1}^{**}(\delta)$. Аналогично предыдущему имеем:

$$\inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta) = n_\mu^{-k} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1} = n_\mu^{-k} \cdot n_\mu^{k+1} = n_\mu$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots),$$

и если $n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}$ $(p \geqslant 1)$, то

$$\inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}.$$

Отсюда

$$\inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta) =$$

$$= \min\left\{\inf_{\mu \geqslant p} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta), \inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta)\right\} =$$

$$= \min\{n_p, n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}\} \quad (n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}, p = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, если $n_p < n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}$, т. е. $n_p^{-1} < \delta < m_{p-1}^{-1}$, то

$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta) = n_p,$$

откуда

$$\omega_{k+1}^{**}(\delta) = n_p\delta^{k+1} \quad (n_p^{-1} < \delta < m_{p-1}^{-1}).$$

Если же $n_p \geqslant n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}$, т. е. $m_{p-1}^{-1} \leqslant \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}$, то

$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1},$$

откуда

$$\omega_{k+1}^{**}(\delta) = n_{p-1}^{-k} \quad (m_{p-1}^{-1} \leqslant \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}).$$

Пользуясь последней формулой, а также оценками (2.17) и (2.18), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=n_p}^{n_{p+1}-1} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \geqslant \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=n_p}^{m_p-1} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k}\sum_{n=n_p}^{m_p-1} n^{-\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k}\int_{n_p}^{m_p} x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k}\left(m_p^{\frac{1}{2}} - n_p^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2\sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k} m_p^{\frac{1}{2}}\left(1 - \sqrt{\frac{n_p}{m_p}}\right) \geqslant C_9(k)\sum_{p=1}^{\infty} 1 = \infty. \tag{2.20}$$

Далее, так как, согласно свойству 1) операции**,

$$\omega_{k+1}^{**}(\delta) \leqslant \omega_l^{**}(\delta) \leqslant \omega(\delta) \quad (1 \leqslant k < l),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega(n^{-1}).$$

Сопоставляя эти неравенства с (2.19) и (2.20), выводим, что для построенной функции $\omega(\delta)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_{\varkappa}^{**}(n^{-1}) < \infty \quad (1 \leqslant \varkappa \leqslant k),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_l^{**}(n^{-1}) = \infty \quad (l > k)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega(n^{-1}) = \infty.$$

Несколько видоизменяя этот пример, мы могли бы получить функцию $\omega(\delta)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_k^{**}(n^{-1}) < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}) = \infty.$$

Эти примеры показывают, в частности, что в условиях теоремы 4 нельзя заменить ряд (2.13) рядом (2.10).

Реферируя работу (I), Д. Е. Меньшов ([9]) указал, что в ней построен пример функции $\omega(\delta)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}) = \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^{*}(n^{-1}) < \infty.$$

В действительности такого примера там нет, но его нетрудно получить. В самом деле, достаточно выбрать $\omega(\delta)$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}) = \infty,$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega_1^{**}(n^{-1}) < \infty,$$

и учесть, что, согласно сделанному выше замечанию, ряды

$$\sum n^{-\frac{1}{2}} \omega^{*}(n^{-1}) \quad \text{и} \quad \sum n^{-\frac{1}{2}} \omega_1^{**}(n^{-1})$$

сходятся и расходятся одновременно.

§ 3. О точках абсолютной сходимости рядов Фурье

3.1. Постановка задачи. Вопрос о том, при каких модулях непрерывности ряды Фурье непрерывных периодических функций могут не иметь ни одной точки абсолютной сходимости, возник в одной из моих бесед с Н. К. Бари.

Здесь рассматривается следующая более общая задача. При каких ограничениях на положительную функцию $\omega(\delta)$ существует функция $F(z)$, регулярная в круге $|z| < 1$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, удовлетворяющая условию

$$\omega_k(\delta, F) = O(\omega(\delta))$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости? Под точкой абсолютной сходимости

тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

здесь и в дальнейшем понимается точка, в которой сходится ряд

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|.$$

Оказывается, что теоремы 1 и 4 в части, касающейся существования функций $F(z)\overline{\in}A$, могут быть усилены таким образом, чтобы функции $\operatorname{Re}F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im}F(e^{ix})$ имели ряды Фурье без точек абсолютной сходимости. Это усиление и осуществляется в настоящем параграфе. Аналогичная задача для степенных рядов, очевидно, не возникает, так как из расходимости ряда $\sum|c_n|$ автоматически вытекает, что ряд $\sum|c_nz^n|$ расходится в каждой точке единичной окружности $|z|=1$.

3.2. Усиление теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой последовательности* $\{G_n\}$, *удовлетворяющей условиям*

$$G_n>0,\quad G_n\downarrow 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{2}}G_n=\infty, \tag{3.1}$$

найдется функция $F(z)$, *регулярная в круге* $|z|<1$, *для которой*

$$E_n(F)=O(G_n), \tag{3.2}$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re}F(e^{ix})$ *и* $\operatorname{Im}F(e^{ix})$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Доказательство. Покажем, что всеми требуемыми свойствами обладает функция

$$F_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}e^{i2^{-k}n^2}z^n, \tag{3.3}$$

где

$$u_k=2^{-\frac{k}{2}}(G_{2^k}-G_{2^{k+1}}).$$

Как нам уже известно из доказательства теоремы 1,

$$F_1(z)\overline{\in}A \text{ и } E_n(F_1)=O(G_n).$$

Остается показать, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[\operatorname{Re}F_1(e^{ix})]$ и $\mathfrak{S}[\operatorname{Im}F_1(e^{ix})]$ не имеют точек абсолютной сходимости. Рассмотрим, для определенности, ряд $\mathfrak{S}[\operatorname{Re}F_1(e^{ix})]$; для ряда $\mathfrak{S}[\operatorname{Im}F_1(e^{ix})]$ рассуждение аналогично. Имеем:

$$f_1(x)=\operatorname{Re}F_1(e^{ix})=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\cos(nx+2^{-k}n^2). \tag{3.4}$$

Таким образом нужно установить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\cos(nx + 2^{-k}n^2)| \qquad (3.5)$$

расходится для любого $x \in [0,2\pi]$. Для этого замечаем, что так как

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\cos(nx + 2^{-k}n^2)| \geqslant \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos^2(nx + 2^{-k}n^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \{1 + \cos 2(nx + 2^{-k}n^2)\} =$$

$$= 2^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2(nx + 2^{-k}n^2),$$

то

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\cos(nx + 2^{-k}n^2)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N} 2^k u_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2(nx + 2^{-k}n^2).$$

Оценим последнюю сумму. Используя лемму 2, получаем, что

$$\left| \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2(nx + 2^{-k}n^2) \right| = \left| \operatorname{Re} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{2i(2^{-k}n^2+nx)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{2i(2^{-k}n^2+nx)} \right| = O\left(2^{\frac{k}{2}}\right), \qquad (3.6)$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2(nx + 2^{-k}n^2) = O\left(\sum_{k=1}^{N} 2^{\frac{k}{2}} u_k\right)$$

и

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\cos 2(nx + 2^{-k}n^2)| \geqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N} 2^k u_k + O\left(\sum_{k=1}^{N} 2^{\frac{k}{2}} u_k\right).$$

Но, как уже подсчитывалось при доказательстве теоремы 1, ряд $\sum 2^k u_k$ расходится, а ряд $\sum 2^{\frac{k}{2}} u_k$ сходится. Отсюда вытекает, что для любого $x \in [0,2\pi]$

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\cos(nx + 2^{-k}n^2)| \geqslant \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N} 2^k u_k - O(1) \to \infty \quad (N \to \infty), \qquad (3.7)$$

и теорема доказана.

Так как оценка (3.6) является, согласно лемме 2, равномерной относительно x, то фактически нами установлено, что неравенство (3.7) имеет место равномерно относительно x, т. е. что ряд (3.5) равномерно расходится.

3.3. Усиление теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* k — *натуральное число,* $\omega(\delta)>0$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ *и расходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\omega_k^{**}(n^{-1}), \tag{3.8}$$

где

$$\omega_k^{**}(\delta)=\delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta}\left\{\eta^{-k}\inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi}\omega(\xi)\right\}.$$

Тогда существует функция $F(z)$, *регулярная в круге* $|z|<1$, *для которой*

$$\omega_k(\delta, F)=O(\omega(\delta)),$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re}F(e^{ix})$ *и* $\operatorname{Im}F(e^{ix})$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Для доказательства замечаем, что аналогичное усиление допускает также и теорема 3. Доказательство не меняется; только в том месте, где мы ссылались на теорему 1, нужно сослаться на более сильную теорему 5. После этого теорема 6 непосредственно вытекает из усиленной теоремы 3.

3.4. Замечания. Ясно, что аналогичное усиление можно также получить для теоремы 2. Излишне приводить здесь его формулировку.

Отметим следствия из теорем 5 и 6 для рядов Фурье.

Следствие 5.1. *Для любой последовательности* $\{G_n\}$, *удовлетворяющей условиям* (3.1), *найдется непрерывная периодическая функция* $f(x)$, *для которой*

$$E_n^*(f)=O(G_n),$$

и такая, что ряды $\mathfrak{S}[f]$ *и* $\mathfrak{S}[\tilde{f}]$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Следствие 6.1. *Пусть* k — *натуральное число,* $\omega(\delta)>0$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ *и расходится ряд* (3.8). *Тогда существует непрерывная периодическая функция* $f(x)$, *для которой*

$$\omega_k(\delta, f)=O(\omega(\delta)), \tag{3.9}$$

и такая, что ряды $\mathfrak{S}[f]$ *и* $\mathfrak{S}[\tilde{f}]$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Это последнее следствие вместе с теоремой 1 показывает, что все мажоранты модулей непрерывности $\omega(\delta)$ можно разделить на два класса: если ряд (3.8) сходится, то все непрерывные периодические функции $f(x)$, удовлетворяющие условию (3.9), обладают абсолютно сходящимися рядами Фурье; если же этот ряд расходится, то найдется функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условиям (3.9) и такая, что ее ряд Фурье не имеет ни одной точки абсолютной сходимости.

Любопытно отметить, что аналогичная альтернатива уже не имеет места в вопросе о простой сходимости рядов Фурье. В самом деле, хорошо известно, что существуют периодические функции, удовлетворяющие условию

$$\omega(\delta, f) = O\left\{(\ln \delta^{-1})^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right\}, \tag{3.10}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, и такие, что их ряды Фурье расходятся в отдельных точках. Однако в силу одного следствия из теоремы Колмогорова — Селиверстова [см. ([14]), следствие из теоремы 1], всякая функция, удовлетворяющая условию (3.10), имеет почти всюду сходящийся ряд Фурье.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
1.IV.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, C. R. Acad. Sci., 158 (1914), 1661—1663.

[2] Бернштейн С. Н., Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, (2), 14 (1914), 139—144.

[3] Бернштейн С. Н., Sur certaines fonctions périodiques qui s'ecartent le moins possible de zéro, Сообщ. Харьк. матем. об-ва (2), 14 (1914), 145—152.

[4] Бернштейн С. Н., Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, C. R. Acad. Sci., 199 (1934), 397—400.

[5] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л. — М., 1937.

[6] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. 1, Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР, 1952.

[7] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939.

[8] Кузьмин Р. О., О некоторых тригонометрических неравенствах, Журнал Ленинградск. физ.-матем. об-ва, 1 (1927), 233—239.

[9] Меньшов Д. Е., Реферат 162, Реферативный журнал Математика, № 1 (1953) 162—163.

[10] Никольский С. М., Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. наук СССР, 52 (1946), 191—194.

[11] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.

[12] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I, Матем. сборник, 29 (1951), 225—232.

[13] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 87—98.

[14] Стечкин С. Б., О теореме Колмогорова — Селиверстова, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 499—512.

[15] Corput J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen, 84 (1921), 53—79.

[16] Fejér L., Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie, Math. Annalen, 97 (1926), 104—123.

[17] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some problems of Diophantine approximation. IV, The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions, Acta Math., 37 (1914), 193—239.

[18] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some problems of Diophantine approximation. V. A remarkable trigonometrical series, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 2 (1916), 583—586.

[19] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some properties of fractional integrals, Proc. London Math. Soc., (2), 24, Records of Proc. at Meetings (1925), XXXVII—XLI.

20 Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some new properties of Fourier constants, Math. Annalen, 97 (1926), 159—209.

21 Koksma J. F., Diophantische Approximationen, Ergebn. der Mathem. und ihrer Grenzgebiete, 4, H. 4, Berlin, 1936.

22 Landau E., Über das Vorzeichen der Gaussschen Summe, Nachr. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1928, 19—20.

23 Landau E., Über eine trigonometrische Summe, Nachr. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1928, 21—24.

24 Riesz M., Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, Jahresber. der deutschen Math. Vereinigung, 23 (1914), 354—368.

25 Szasz O., Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Math. Zeitschr., 1 (1918), 163—183.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

19 (1955), 247—266

Е. Б. ДЫНКИН

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С БЕСКОНЕЧНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Обычные для теории восстановления характеристики последовательности сумм независимых случайных величин (например, величина первой суммы, превышающей заданное число x) изучаются в случае, когда слагаемые имеют бесконечные математические ожидания.

Находятся предельные распределения для таких характеристик и устанавливается их связь с распределениями длины скачка для процессов с независимыми приращениями.

1. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

— последовательность положительных независимых случайных величин с одинаковыми функциями распределения $F(x)$. Рассмотрим последовательность сумм

$$\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Обозначим через ν_x число сумм ζ_n, меньших чем x, и положим

$$\begin{gathered} \gamma_x' = \zeta_{\nu_x+1} - x, \quad \gamma_x'' = x - \zeta_{\nu_x}, \\ \gamma_x = \gamma_x' + \gamma_x'' = \xi_{\nu_x+1}. \end{gathered} \tag{3}$$

Наша задача — изучить предельные распределения для γ_x', γ_x'', γ_x при $x \to +\infty$ *.

К этой задаче приводит, например, следующая схема. Предположим, что некоторая система проходит в своем развитии определенные циклы, причем длительности этих циклов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ образуют последовательность независимых положительных случайных величин с одинаковыми распределениями вероятностей **. Пусть наблюдения начинаются в момент x. Тогда γ_x' означает время, в течение которого придется дожидаться конца текущего цикла, γ_x'' — время, прошедшее от начала этого цикла до начала наблюдений, наконец, γ_x означает полную длительность цикла, который мы застаем в момент начала наблюдений.

---

* В дальнейшем мы будем писать $x \to \infty$ вместо $x \to +\infty$, что не вызовет никаких недоразумений.

** Это условие будет выполнено, если допустить, что по истечении каждого цикла полностью возобновляются первоначальные условия развития процесса.

Аналогичная схема рассматривается в так называемой теории восстановления (Renewal Theory) [см., например, ([1]), стр. 282]. Эта теория имеет дело с рядом приборов, каждый из которых служит в течение некоторого промежутка времени, а затем приходит в негодность и заменяется новым прибором того же типа. Обозначим сроки службы этих приборов через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ и рассмотрим прибор, который действует в момент x. Величина γ''_x интерпретируется как время, которое этот прибор уже прослужил, величина γ'_x — как время, в течение которого он еще прослужит, и, наконец, величина γ_x — как полный срок его службы.

В теории восстановления обычно ограничиваются рассмотрением величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ с конечными математическими ожиданиями. В настоящей работе, напротив, основное внимание уделяется величинам с бесконечными математическими ожиданиями.

2. В случае, когда математические ожидания ξ_k конечны, вопрос о предельном поведении величин $\gamma'_x, \gamma''_x, \gamma_x$ решается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1. *Если $M\xi_k = \mu$ конечно и если распределение не является решетчатым* *, *то для любых $u > 0$, $v > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} P(\gamma'_x > u) = \lim_{x\to\infty} (\gamma''_x > u) = \int_u^\infty \frac{1-F(z)}{\mu}\, dz, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} P(\gamma'_x > u,\ \gamma''_x > v) = \int_{u+v}^\infty \frac{1-F(z)}{\mu}\, dz, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} P(\gamma_x > u) = \frac{1}{\mu}\int_u^\infty z\, dF(z). \tag{6}$$

(Решетчатый случай рассмотрен, например, в ([1]), стр. 283; там же указана библиография.)

3. Опираясь на очевидные соотношения

$$\begin{aligned} &P(\gamma''_x > u) = P(\gamma'_{x-u} > u),\\ &P(\gamma'_x > u,\ \gamma''_x > v) = P(\gamma'_{x-v} > u+v), \end{aligned} \tag{7}$$

можно свести изучение распределения γ''_x и совместного распределения γ'_x, γ''_x к изучению распределения γ'_x.

Обратимся к основному для нас случаю, когда $M\xi_k = \infty$. Нетрудно показать (см. п. 10), что в этом случае величина γ'_x сходится по вероятности к $+\infty$, т. е. для любого u

$$\lim_{x\to\infty} P(\gamma'_x > u) = 1.$$

Естественно поэтому ввести нормирующую функцию $c(x)$, подчиненную

* Распределение случайной величины ξ называется решетчатым, если существует $d > 0$ такое, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(\xi = nd) = 1$.

условию $\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = +\infty$ и искать предельное распределение для величины $\frac{\gamma'_x}{c(x)}$.

Мы ограничимся рассмотрением только положительных функций $c(x)$, непрерывных при $x > x_0 > 0$ и подчиненных условию:

для любого $k > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c(kx)}{c(x)}$ *существует и отличен от нуля.* (*)

Такие функции мы будем называть функциями конечной степени (примерами таких функций могут служить степенные функции x^α, а также функции $x^\alpha (\log x)^\beta$, $x^\alpha (\log x)^\beta (\log\log x)^\gamma$ и т. п.).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $c(x)$ — функция конечной степени, стремящаяся к бесконечности при $x\to\infty$. Если $\frac{c(x)}{x}$ стремится к нулю или к ∞, то распределение $\frac{\gamma'_x}{c(x)}$ не может сходиться ни к какому собственному распределению вероятностей. Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c(x)}{x} = 1$, то все собственные предельные распределения для $\frac{\gamma'_x}{c(x)}$ принадлежат однопараметрическому семейству, определяемому плотностями*

$$p_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} u^{-\alpha} (1+u)^{-1} & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u \leqslant 0. \end{cases} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы распределение $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходилось при $x\to\infty$ к распределению с плотностью $p_\alpha(u)$, необходимо и достаточно, чтобы суммы ζ_n притягивались к устойчивому закону с показателем α.*

Из соотношений (7) выводится нижеследующая теорема 4, полностью решающая вопрос о предельных распределениях для $\frac{\gamma''_x}{x}$, $\frac{\gamma_x}{x}$, а также о предельном совместном распределении для $\frac{\gamma'_x}{x}$, $\frac{\gamma''_x}{x}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если при $x\to\infty$ распределение $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходится к распределению с плотностью $p_\alpha(u)$, то совместное распределение γ'_x, γ''_x сходится к двумерному распределению с плотностью*

$$p_\alpha(u, v) = \begin{cases} \alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} (1-v)^{\alpha-1} (u+v)^{-1-\alpha} & \text{при } 0 < u,\ 0 < v < 1, \\ 0 & \text{при остальных } u, v, \end{cases} \tag{9}$$

а распределения величин $\gamma''(x)$ и $\gamma(x)$ сходятся, соответственно, к распределениям с плотностями

$$\begin{aligned} q_\alpha(u) &= \begin{cases} \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} (1-v)^{\alpha-1} v^{-\alpha} & \text{при } 0 < v < 1, \\ 0 & \text{при остальных } v, \end{cases} \\ r_\alpha(u) &= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} u^{-1-\alpha} g(u), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$g(u)=\begin{cases}0 & \text{при } u\leqslant 0,\\ 1-(1-u)^{\alpha} & \text{при } 0<u<1,\\ 1 & \text{при } u\geqslant 1.\end{cases} \qquad (11)$$

4. Обозначим через $\nu_{x,y}$ число элементов последовательности (2), удовлетворяющих неравенствам $x\leqslant\zeta_n<y$.

ТЕОРЕМА 5. *Если суммы ζ_n притягиваются к устойчивому закону с показателем $\alpha<1$, то для любого $u>0$*

$$\lim_{x\to\infty} P([1-F(x)]\,\nu_{x,\,x+kx}>u)=\Phi_k(u)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^k \frac{G_\alpha\left(\dfrac{k-z}{u^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{z^{\alpha}(1+z)}\,dz, \qquad (12)$$

где $G_\alpha(x)$ — функция распределения устойчивого закона, к которому притягиваются суммы ζ_n *.

Отметим, что предельное распределение вероятностей, определенное функцией $\Phi_k(u)$, абсолютно непрерывно на полупрямой $(0,\infty)$ и относит точке 0 положительную вероятность, равную

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^k \frac{dz}{z^{\alpha}(1+z)}.$$

5. Основные теоремы 2—5 доказываются в § 4 и 5. В § 1 выводится выражение для преобразования Лапласа случайной величины γ_x' и при помощи этого выражения доказывается теорема 1. В § 2 формулируются необходимые для дальнейшего свойства функций конечной степени. В § 3 дается в терминах асимптотического поведения $M\nu_x$ (при $x\to\infty$) условие, необходимое и достаточное для того, чтобы суммы (2) притягивались к устойчивому закону с показателем $\alpha<1$. Этот результат является усилением одной теоремы Феллера ([2]), который находит асимптотическое выражение для $M\nu_x$ в предположении, что суммы (2) *нормально* притягиваются к устойчивому закону. В § 6 даются приложения теорем 2—5 к процессам с независимыми приращениями. В § 7 рассматривается более общий случай, когда слагаемые $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ могут принимать и отрицательные значения. Во всей работе систематически применяется аппарат преобразований Лапласа, более удобный при изучении положительных случайных величин, чем аппарат характеристических функций.

§ 1. Основные формулы. Доказательство теоремы 1

6. Обозначим через $W_x(u)$ вероятность события $A_{x,u}$; отрезок $[x, x+u]$ не содержит ни одной точки последовательности (2). Тогда

$$P(\gamma_x'>u)=W_x(u).$$

* Преобразование Лапласа для распределения $G_\alpha(u)$ дается формулой $\int_0^\infty e^{-sx}dG_\alpha(x)=e^{-s^\alpha}$.

Условная вероятность события $A_{x,u}$ при условии, что $\xi_1 = y$, равна $W_{x-y}(u)$, если $0 < y < x$, нуль, если $x \leqslant y \leqslant x+u$, и единице, если $x+u < y$. По формуле полной вероятности, имеем:

$$W_x(u) = \int_0^x W_{x-y}(u)\,dF(y) + 1 - F(x+u). \qquad (13)$$

Полагая

$$B(\lambda, s) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x - su} dW_x(u)\,dx = -\int_0^\infty e^{-\lambda x} M e^{-s\gamma'_x} dx, \qquad (14)$$

после простых преобразований выводим из интегрального уравнения (13) следующее уравнение для $B(\lambda, s)$:

$$B(\lambda, s) = B(\lambda, s)\,\varphi(\lambda) - \frac{\varphi(s)-\varphi(\lambda)}{\lambda - s}, \qquad (15)$$

где

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x) = Me^{-s\xi_k} \qquad (16)$$

— преобразование Лапласа для случайной величины ξ_k.

Из (15) находим:

$$B(\lambda, s) = \frac{1}{\lambda - s}\left[\frac{1-\varphi(s)}{1-\varphi(\lambda)} - 1\right]. \qquad (17)$$

7. Положим $M(x) = M\nu_x$. Если $\xi_1 > x$, то $\nu_x = 0$. Если $\xi_1 = y$, где $0 < y < x$, то число сумм $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \ldots, \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n, \ldots$, меньших чем x, на единицу больше, чем число сумм $\xi_2, \xi_2+\xi_3, \ldots, \xi_2+\ldots+\xi_n, \ldots$, меньших чем $x-y$. Поэтому условное математическое ожидание ν_x при условии $\xi_1 = y$ равно $M(x-y)+1$. По формуле полного математического ожидания, имеем:

$$M(x) = \int_0^x [M(x-y)+1]\,dF(y) = \int_0^x M(x-y)\,dF(y) + F(x). \qquad (18)$$

Полагая

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dM(x),^{*} \qquad (19)$$

выводим из (18) следующее уравнение, связывающее $\psi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$:

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)\,\psi(\lambda) + \varphi(\lambda).$$

Отсюда

$$1 + \psi(\lambda) = \frac{1}{1-\varphi(\lambda)}. \qquad (20)$$

8. Опираясь на формулы (17) и (20), выведем выражение для преобразования Лапласа случайной величины γ'_x:

$$V_x(s) = Me^{-s\gamma'_x} = -\int_0^\infty e^{-su}\,dW_x(u). \qquad (21)$$

* Этот интеграл сходится, ибо, как нетрудно показать, $M(x) < Kx$, где K — некоторая константа.

Из (14), (17) и (21) следует:

$$-\int_0^\infty e^{-\lambda x} V_x(s)\,dx + \varphi(s)\int_0^\infty e^{sx} e^{-\lambda x}\,dx = (1-\varphi(s))\int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{sx}\,dx. \tag{22}$$

Согласно (19),

$$\psi(\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{sx}\,dx = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)} e^{sx}\,dM(y)\,dx.$$

Заменяя переменные в правой части по формулам $u = x + y$, $v = y$, имеем:

$$\psi(\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{sx}\,dx = \int_0^\infty e^{-\lambda u}\left[\int_0^u e^{s(u-v)}\,dM(v)\right] du. \tag{23}$$

Сопоставляя (22) и (23), получаем:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[-V_x(s) + \varphi(s)e^{sx}\right] dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[(1-\varphi(s))\int_0^x e^{s(x-y)}\,dM(y)\right] dx,$$

откуда, по теореме единственности для преобразований Лапласа,

$$-V_x(s) + e^{sx}\varphi(s) = [1-\varphi(s)]\int_0^x e^{s(x-y)}\,dM(y). \tag{24}$$

Используя (19) и (20), выводим из (24):

$$V_x(s) = [1-\varphi(s)]\,e^{sx}\int_x^\infty e^{-sy}\,dM(y). \tag{25}$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_x^\infty e^{-sy}\,dM(y) = e^{-sy}M(y)\Big|_x^\infty + s\int_x^\infty e^{-sy}M(y)\,dy. \tag{26}$$

Принимая во внимание, что при $s \neq 0$ $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-sy}M(y) = 0$ (см. сноску на стр. 251), выводим из (25) и (26):

$$V_x(s) = [1-\varphi(s)]\left[-M(x) + se^{sx}\int_x^\infty e^{-sy}M(y)\,dy\right]. \tag{27}$$

Заменяя переменные по формуле $z = y - x$, получаем:

$$V_x(s) = [1-\varphi(s)]\,s\int_0^\infty e^{-sz}[M(z+x) - M(x)]\,dz. \tag{28}$$

9. Доказательство теоремы 1. По теореме Блэквелла ([3]), если распределения ξ_k не являются решетчатыми и если $M\xi_k = \mu$, то

$$\lim_{x\to\infty}[M(z+x) - M(x)] = z/\mu. \tag{29}$$

Используя это соотношение и переходя формально к пределу в формуле (28), получаем:

$$\lim_{x\to\infty} V_x(s) = [1-\varphi(s)]\,s\int_0^\infty e^{-sz}\frac{z}{\mu}\,dz = \frac{1-\varphi(s)}{s\mu}. \tag{30}$$

Для обоснования этого предельного перехода покажем, что подинтегральная функция

$$e^{-sz}[M(x+z)-M(x)]$$

в формуле (28) мажорируется при всех x суммируемой на полупрямой $(0, \infty)$ функцией. Обозначим через $\tilde{\nu}_z$ число элементов последовательности (2), удовлетворяющих неравенству $\zeta_{\nu_x+1} < \zeta_n < \zeta_{\nu_x+1} + z$. Заметим, что

$$\nu_{x+z} \leqslant \nu_x + 1 + \tilde{\nu}_z. \qquad (31)$$

Величина $\tilde{\nu}_z$ распределена так же, как величина ν_z. Поэтому из (31) следует:

$$M(x+z) \leqslant M(x) + M(z) + 1$$

и

$$e^{-sz}[M(x+z)-M(x)] \leqslant e^{-sz}[M(z)+1] \leqslant e^{-sz}Kz,$$

где K — некоторая константа (см. сноску на стр. 251).

Чтобы доказать соотношение (4), остается воспользоваться равенством

$$\frac{1-\varphi(s)}{s\mu} = \int\limits_0^\infty e^{-sz}\frac{1-F(z)}{\mu}\,dz$$

и теоремой о том, что из сходимости преобразовании Лапласа вытекает сходимость распределений вероятностей. Соотношения (5) и (6) следуют из (4) и (7).

10. Замечание. Согласно теореме Блэквелла, соотношение (29), а следовательно, и соотношение (30) остаются справедливыми и при $\mu = \infty$. В этом случае соотношение (30) принимает вид

$$\lim_{x\to\infty} V_x^{\sim}(s) = 0, \qquad (32)$$

и так как для любого $A > 0$ выполнено неравенство

$$P(\gamma'_x < A) < \frac{Me^{-s\gamma'_x}}{e^{-sA}} = \frac{V_x(s)}{e^{-sA}}, \qquad (33)$$

то из (32) получаем:

$$\lim_{x\to\infty} P(\gamma'_x < A) = 0.$$

Таким образом, если $\mu = \infty$, то γ'_x стремится по вероятности к $+\infty$ при $x \to \infty$.

Отметим, что если d — наибольшее число такое, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(\zeta = nd) = 1,$$

то соотношение (29) сохраняет силу для значений x и z, кратных d. Используя это соотношение, было бы легко рассмотреть также и решетчатый случай.

§ 2. Свойства функций конечной степени

11. Определение функций конечной степени было сформулировано в п. 3.

ЛЕММА 1. *Для всякой функции конечной степени $c(x)$ существует постоянная α такая, что при всех $k > 0$*

$$\lim \frac{c(kx)}{c(x)} = k^{\alpha}. \tag{34}$$

Доказательство. Для каждого $k > 0$ существует предел

$$d(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{c(kx)}{c(x)}.$$

Из тождества

$$\frac{c(k_1k_2x)}{c(x)} = \frac{c(k_1k_2x)}{c(k_2x)} \frac{c(k_2x)}{c(x)}$$

имеем:

$$d(k_1k_2) = d(k_1)\,d(k_2). \tag{35}$$

Из соотношения (35), непрерывности $c(x)$ и очевидного равенства $d(1) = 1$ следует, что

$$d(k) = k^{\alpha}.$$

Число α будем называть *степенью* функции $c(x)$. Функции степени 0 мы будем называть *медленно меняющимися* функциями. Очевидно, всякая функция степени α может быть представлена в виде

$$c(x) = x^{\alpha} h(x), \tag{36}$$

где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция.

ЛЕММА 2. [см. ([6]), стр. 45]. *Всякая медленно меняющаяся функция $h(x)$ представима в виде*

$$h(x) = a(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{g(u)}{u} du}, \tag{37}$$

где $a(x)$ положительна и непрерывна и при $x \to \infty$ $a(x)$ стремится к пределу, отличному от нуля, а $g(x)$ стремится к нулю. Обратно, всякая функция, представимая в виде (37), *является медленно меняющейся.*

Из формул (36) и (37) легко вывести, что любая функция $c(x)$ степени α обладает следующими свойствами:

1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{c(x)}{x^{\gamma}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma > \alpha, \\ \infty, & \text{если } \gamma < \alpha. \end{cases} \tag{38}$$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует x_0 такое, что для всех $x > x_0$, $k > 1$ выполняется неравенство

$$(1-\varepsilon)\, k^{\alpha-\varepsilon} < \frac{c(kx)}{c(x)} < (1+\varepsilon)\, k^{\alpha+\varepsilon}. \tag{39}$$

§ 3. Условия притяжения сумм ζ_n к устойчивому закону с показателем $\alpha < 1$

12. В этом параграфе мы выведем нужные нам для дальнейшего различные формы необходимых и достаточных условий притяжения сумм (2) к устойчивому закону с показателем $\alpha < 1$. Мы будем опираться при этом на следующие две теоремы, устанавливающие связь между предельным поведением функции и ее преобразованием Лапласа [см. ([4]), стр. 460 и 511].

Пусть

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \Phi(x)\, dx. \tag{40}$$

ТЕОРЕМА А. *Если при* $x \to +\infty$ $\Phi(x)$ *есть функция степени* $\beta > -1$, *то при* $s \to +0$

$$f(s) \sim \frac{\Gamma(\beta+1)}{s} \Phi\left(\frac{1}{s}\right)^{*}. \tag{41}$$

ТЕОРЕМА Б. *Если при* $s \to +0$ $f(s)$ *есть функция степени* $-\beta \leqslant 0$ *и если* $\Phi(x)$ *монотонна, то при* $x \to +\infty$

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)\, x} f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{42}$$

13. Из теорем А и Б легко выводится

ТЕОРЕМА В. *Нижеследующие условия* I — III *равносильны между собой и каждое из них является необходимым и достаточным для того, чтобы суммы* (2) *притягивались к устойчивому закону с показателем* $\alpha < 1$:

I. $1 - F(x) \sim A x^{-\alpha} h(x)$ *при* $x \to +\infty$, (43)

II. $1 - \varphi(s) \sim A\Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha} h\left(\frac{1}{s}\right)$ *при* $s \to +0$, (44)

III. $M(x) \sim \dfrac{\alpha\pi}{A \sin \alpha\pi} \dfrac{x^{\alpha}}{h(x)}$ *при* $x \to +\infty$ (45)

(*A — произвольная положительная постоянная, $h(x)$ — медленно меняющаяся функция*).

Доказательство. Необходимость и достаточность условия I для притяжения сумм (2) к устойчивому закону с показателем α является общеизвестным фактом [см. например ([5]), стр. 189]. Докажем, что условия II и III равносильны условию I. Из формул (16) и (19) интегрированием по частям находим:

$$\frac{1-\varphi(s)}{s} = \int_0^\infty e^{-sx} (1 - F(x))\, dx, \tag{46}$$

$$\frac{\psi(s)}{s} = \int_0^\infty e^{-sx} M(x)\, dx. \tag{47}$$

Из соотношения (46), согласно теоремам А и Б, вытекает равносильность условий II и I. Далее, в силу формул (20), условие II эквивалентно следующему:

$$1 + \psi(s) \sim \frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)} s^{-\alpha} \frac{1}{h\left(\frac{1}{s}\right)}. \tag{48}$$

---

* Знак $\sim$ означает, что отношение связанных им выражений стремится к 1.

Согласно (38),

$$\lim_{s\to 0}\frac{s^{-\alpha}}{h\left(\frac{1}{s}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{h(x)}=\infty,$$

поэтому условие (48) равносильно условию:

$$\psi(s)\sim\frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)}s^{-\alpha}\frac{1}{h\left(\frac{1}{s}\right)},$$

или

$$\frac{\psi(s)}{s}\sim\frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)}s^{-\alpha-1}\frac{1}{h\left(\frac{1}{s}\right)}. \tag{49}$$

Сопоставляя (49) и (47) и применяя теоремы А и Б, заключаем, что условие (49) равносильно условию III.*

§ 4. Доказательство теоремы 2

14. Пусть

$$\lim P\left(\frac{\gamma'_x}{c(x)}<u\right)=G(u), \tag{50}$$

где $G(u)$ — некоторая собственнная функция распределения. Предположим, что $c(x)$ есть функция степени β, т. е. для любого $x>0$

$$\lim_{y\to\infty}\frac{c(yx)}{c(1)}=x^{\beta}. \tag{51}$$

Из (50) и (51) имеем:

$$\lim_{y\to\infty}P\left(\frac{\gamma'_{xy}}{c(y)}<u\right)=\lim_{y\to\infty}P\left(\frac{\gamma'_{xy}}{c(xy)}<u\frac{c(y)}{c(xy)}\right)=G(ux^{-\alpha}).$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to\infty}Me^{-s\gamma'_{xy}/c(y)}=\lim_{y\to\infty}V_{xy}\left(\frac{s}{c(y)}\right)=\int_0^{\infty}e^{-su}d_uG(ux^{-\alpha}). \tag{52}$$

Поскольку функции $e^{-\lambda x}V_{xy}(s/c(y))$ при всех y и s мажорируются на полупрямой $(0,\infty)$ функцией $e^{-\lambda x}$, из (52) следует, что

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}V_{xy}\left(\frac{s}{c(y)}\right)dx=\widetilde{B}(s,\lambda), \tag{53}$$

где

$$\widetilde{B}(s,\lambda)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x-sy}d_uG(ux^{-\alpha})\,dx. \tag{54}$$

---

* При этом используется формула:

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)=\alpha\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)=\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}.$$

Заметим, что, в силу (14) и (17),

$$-\int_0^\infty e^{-\lambda x} V_{xy}\left(\frac{s}{c(y)}\right) dx = \frac{1}{y} B\left(\frac{\lambda}{y}, \frac{s}{c(y)}\right) = \frac{1}{\lambda - \frac{sy}{c(y)}}\left[\frac{1-\varphi(s/c(y))}{1-\varphi\left(\frac{\lambda}{y}\right)} - 1\right]. \quad (55)$$

Положив

$$b(y) = \frac{c(y)}{y}, \quad \theta(y) = 1 - \varphi(y) \quad (56)$$

и сопоставив (53), (55) и (56), заключаем, что соотношение (50) влечет за собой соотношение

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\lambda - s/b(y)}\left[1 - \frac{\theta(s/b(y)\,y)}{\theta(\lambda/y)}\right] = \widetilde{B}(s, \lambda). \quad (57)$$

Рассмотрим отдельно три случая: 1) $b(y)\to\infty$, 2) $b(y)\to 0$, 3) $b(y)\to 1$ и в каждом из них найдем все возможные значения $\widetilde{B}(s, \lambda)$.

Предварительно заметим, что из (54) вытекает оценка

$$0 < \widetilde{B}(s, \lambda) < \frac{1}{\lambda}. \quad (58)$$

15. Если $b(y)\to\infty$, то

$$\frac{1}{\lambda - s/b(y)} \sim \frac{1}{\lambda}$$

и, согласно (57),

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\theta(s/b(y)\,y)}{\theta(\lambda/y)} = A(s, \lambda), \quad (59)$$

где

$$A(s, \lambda) = -\widetilde{B}(s, \lambda)\lambda + 1. \quad (60)$$

Из (59) имеем:

$$\frac{A(s, \lambda)}{A(s, s)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\theta(s/y)}{\theta(\lambda/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{s}{\lambda}\frac{1}{x}\right)}{\theta\left(\frac{1}{x}\right)}. \quad (61)$$

Соотношение (61) означает, что $\theta(1/x)$ является функцией конечной степени (при $x\to+\infty$). В силу леммы 1 § 2, предел (61) равен $\left(\frac{s}{\lambda}\right)^\alpha$, где α — некоторая постоянная. Итак,

$$\frac{A(s, \lambda)}{A(s, s)} = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^\alpha. \quad (62)$$

Далее,

$$\frac{A(s, s)}{A(1, 1)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{s}{b(y)\,y}\right)}{\theta\left(\frac{1}{b(y)\,y}\right)} \frac{\theta\left(\frac{1}{y}\right)}{\theta\left(\frac{s}{y}\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{s}{z}\right)}{\theta\left(\frac{1}{z}\right)} \lim_{y\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{1}{y}\right)}{\theta\left(\frac{s}{y}\right)}. \quad (63)$$

Из (62), (63) и (60) получаем:

$$\widetilde{B}(s, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - A\left(\frac{s}{\lambda}\right)^\alpha\right], \quad (64)$$

где $A = A(1, 1)$ — некоторая константа. Но выражение (64) ни при каких значениях A и α не удовлетворяет неравенству (58). Таким образом в рассматриваемом случае предельное соотношение (50) невозможно.

16. Предположим теперь, что $b(y) \to 0$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda - s/b(y)} \sim -\frac{b(y)}{s}$$

и

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\theta(s/b(y)\,y)\,b(y)}{\theta(\lambda/y)} = s\widetilde{B}(\lambda, s),$$

$$\frac{\widetilde{B}(\lambda, s)}{\widetilde{B}(s, s)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\theta(s/y)}{\theta(\lambda/y)}.$$

Отсюда, как и в п. 15 [ср. (61)], имеем:

$$\frac{\widetilde{B}(\lambda, s)}{\widetilde{B}(s, s)} = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha}. \tag{65}$$

Далее,

$$\frac{s\widetilde{B}(s, s)}{\widetilde{B}(1, 1)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\theta(s/b(y)\,y)}{\theta(1/b(y)\,y)} \frac{\theta(1/y)}{\theta(s/y)} = s^{\alpha}s^{-\alpha} = 1. \tag{66}$$

Из (65) и (66) получаем:

$$\widetilde{B}(\lambda, s) = B\frac{s^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha}}. \tag{67}$$

Из соотношения (67) и неравенства (58) следует, что $\alpha = 1$, $0 < B < 1$. Однако соотношение

$$\int_0^\infty dx e^{-\lambda x}\int_0^\infty e^{-su} d_u G(ux^{-\alpha}) = \frac{B}{\lambda}$$

определяет функцию

$$G(u) = \begin{cases} 0 \text{ при } u \leqslant 0, \\ B \text{ при } u > 0, \end{cases}$$

не являющуюся функцией распределения. Таким образом при $b(x) \to 0$ соотношение (50) также невозможно.

17. Рассмотрим, наконец, случай, когда $b(y) \to 1$. В этом случае

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{s}{b(y)\,y}\right)}{\theta\left(\frac{\lambda}{y}\right)} = A(\lambda, s),$$

где

$$A(\lambda, s) = 1 - (\lambda - s)\widetilde{B}(\lambda, s).$$

Как и в п. 15, выводим, что

$$A(\lambda, s) = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha}$$

и, следовательно,

$$\widetilde{B}(\lambda, s) = \frac{1}{\lambda - s}\left[1 - \frac{s^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}}\right]. \tag{68}$$

Из неравенства (58) вытекает, что $0<\alpha<1$. Как показывает непосредственная выкладка, функция $p_\alpha(u)$, определенная формулой (8), удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x-su}p_\alpha\left(\frac{u}{x}\right)du\,dz=\frac{1}{\lambda-s}\left[1-\frac{s^\alpha}{\lambda^\alpha}\right]=\widetilde{B}(\lambda,\ s). \tag{69}$$

На основании теоремы единственности для преобразований Лапласа, из (54) и (69) вытекает, что

$$G(ux^{-\beta})=\int_0^u p_\alpha\left(\frac{v}{x}\right)dv,$$

откуда

$$G(u)=\int_0^u p_\alpha(v)\,dv,$$

и теорема 2 доказана полностью.

§ 5. Доказательство теорем 3, 4 и 5

18. Доказательство теоремы 3. Согласно § 4, из сходимости распределения $\frac{\gamma_x'}{x}$ к распределению с плотностью $p_\alpha(u)$ вытекает, что

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\lambda-s}\left[1-\frac{1-\varphi\left(\frac{s}{y}\right)}{1-\varphi\left(\frac{\lambda}{y}\right)}\right]=\frac{1}{\lambda-s}\left[1-\frac{s^\alpha}{\lambda^\alpha}\right]$$

[ср. (57) и (69)] и, следовательно,

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\ln\varphi(s/y)}{\ln\varphi(1/y)}=\lim_{y\to\infty}\frac{1-\varphi(s/y)}{1-\varphi(1/y)}=s^\alpha. \tag{70}$$

Поскольку функция $\log\varphi(h)$ непрерывна, отрицательна при $h>0$ и равна нулю при $h=0$, то существует такое N, что для любого $n>N$ найдется h_n, удовлетворяющее условию

$$\log\varphi(h_n)=-\frac{1}{n}, \tag{71}$$

причем $h_n\to 0$. Из (70) и (71) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\varphi(h_ns)^n}{n\log\varphi(h_n)}=-\lim_{n\to\infty}\log\varphi(h_ns)^n=s^\alpha$$

и, следовательно,

$$\varphi(h_ns)^n\to e^{-s^\alpha}. \tag{72}$$

Если $\alpha<1$, то e^{-s^α} есть преобразование Лапласа для устойчивого закона с показателем α. Из (72) вытекает, что распределения $h_n\zeta_n$ сходятся к устойчивому распределению с показателем α.

Предположим теперь, что суммы ζ_n притягиваются к устойчивому

закону с показателем $\alpha < 1$. Преобразование Лапласа для случайной величины $\frac{\gamma'_x}{x}$, в силу (28), равно

$$Me^{-s\frac{\gamma'_x}{x}} = V_x\left(\frac{s}{x}\right) = \left[1 - \varphi\left(\frac{s}{x}\right)\right]^{\frac{s}{x}} \int\limits_0^\infty e^{-s\frac{z}{x}}\,[M(z+x) - M(x)]\,dz.$$

Заменяя переменные по формуле $w = \frac{z}{x}$, получаем:

$$Me^{-s\frac{\gamma'_x}{x}} = \left[1 - \varphi\left(\frac{s}{x}\right)\right] M(x)\, s \int\limits_0^\infty e^{-sw}\left[\frac{M[x(w+1)]}{M(x)} - 1\right] dw. \tag{73}$$

В силу теоремы С § 3,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \varphi\left(\frac{s}{x}\right)\right) M(x) = \frac{s^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{74}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M[x(w+1)]}{M(x)} = (w+1)^\alpha, \tag{75}$$

и формальный переход к пределу в равенстве (73) дает:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-s\frac{\gamma'_x}{x}} = \frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-sw}\,[(w+1)^\alpha - 1]\,dw. \tag{76}$$

Чтобы обосновать этот предельный переход, заметим, что, согласно (75), $M(x)$ является функцией степени α и, следовательно, в силу (39), существует такое x_0, что для всех $x > x_0$, $w > 0$

$$\frac{M[(w+1)x]}{M(x)} < 2(w+1)^{1+\alpha}.$$

Отсюда видно, что функция $e^{-sw}\frac{M[x(w+1)]}{M(x)}$, стоящая под знаком интеграла в формуле (73), мажорируется при всех $x > x_0$ суммируемой на полупрямой $(0, \infty)$ функцией $2(w+1)^{1+\alpha}e^{-sw}$.

Соотношение (76) показывает, что преобразование Лапласа случайной величины $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходится при $x \to \infty$ к некоторой непрерывной функции, не равной тождественно 1. Отсюда вытекает, что распределение $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходится к некоторому собственному распределению вероятностей. В силу теоремы 2, предельное распределение должно иметь плотность $p_\alpha(u)$.

19. Доказательство теоремы 4. Из формул (7) следует, что

$$P\left(\frac{\gamma'_x}{x} > u, \frac{\gamma''_x}{x} > v\right) = P\left(\frac{\gamma'_{x(1-v)}}{x} > u + v\right). \tag{77}$$

Предположим, что распределение $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходится к распределению с плотностью $p_\alpha(u)$. Тогда для любого $u > 0$

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{\gamma'_x}{x} > u\right) = \int\limits_u^\infty p_\alpha(y)\,dy = H(u)$$

и, следовательно, для любых $u>0,\ 1>v>0$

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{\gamma'_{x(1-v)}}{x} > u+v\right) = \lim_{z\to\infty} P\left(\frac{\gamma'_z}{z} > \frac{u+v}{1-v}\right) = H\left(\frac{u+v}{1-v}\right). \tag{78}$$

Подставляя в определяющее $H(u)$ выражение

$$H(u) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_u^\infty \frac{dy}{y^\alpha(1+y)}$$

вместо u дробь $\frac{u+v}{1-v}$ и заменяя переменную интегрирования по формуле $z = y(1-v)-v$, получим:

$$H\left(\frac{u+v}{1-v}\right) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(1-v)^\alpha \int_u^\infty \frac{dz}{(z+v)^\alpha(1+z)}.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} H\left(\frac{u+v}{1-v}\right) = \frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}(1-v)^{\alpha-1}(u+v)^{-\alpha-1}. \tag{79}$$

Из формул (77), (78) и (79) следует утверждение теоремы 4 относительно совместного распределения $\frac{\gamma'_x}{x}$ и $\frac{\gamma''_x}{x}$. Утверждения, относящиеся к величинам γ''_x и $\gamma_x = \gamma'_x + \gamma''_x$, доказываются теперь посредством элементарной выкладки.

20. Доказательство теоремы 5. Для того чтобы $\nu_{x,y} > u$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\zeta_{\nu_x+[u]+1} < 1$$

или

$$\zeta_{\nu_x+[u]+1} - x < y - x.$$

Случайная величина, стоящая в левой части последнего неравенства, равна $\gamma'_x + \eta_{[u]}$, где

$$\eta_{[u]} = \zeta_{\nu_x+[u]+1} - \zeta_{\nu_x+1}$$

есть величина, независимая от γ'_x и имеющая то же распределение, что $\zeta_{[u]}$. Итак, имеем:

$$P(\nu_{x,y} > u) = P(\gamma'_x + \eta_{[u]} < y - x). \tag{80}$$

Заменяя в этом тождестве y на $x+kx$ и u на $\frac{u}{1-F(x)}$, получаем

$$P(\nu_{x,x+kx}(1+F(x)) > u) = P\left(\frac{\gamma'_x}{x} + \frac{\eta_{[u/1-F(x)]}}{x} < k\right). \tag{81}$$

Воспользуемся теоремой Деблина [см., напр., ([2])], утверждающей, что если при $m\to\infty$

$$1 - F(b_m) \sim \frac{1}{m},$$

то распределение $\frac{\zeta_m}{b_m}$ $\left(\text{а следовательно, и } \frac{\eta_m}{b_m}\right)$ сходится к устойчивому

распределению $G_\alpha(z)$, для которого

$$\int_0^\infty e^{-sz} dG_\alpha(z) = e^{-s\alpha}.$$

Заметим, что, в силу (43),

$$1 - F\left(xu^{\frac{1}{\alpha}}\right) \sim \frac{1 - F(x)}{u},$$

причем при $x \to \infty$ $\frac{u}{1 - F(x)} \to 0$. Согласно сформулированной теореме Деблина, отсюда вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{\eta_{[u/1-F(x)]}}{xu^{\frac{1}{\alpha}}} < z\right) = G_\alpha(z). \tag{82}$$

В силу независимости величин γ'_x и η_m, предельное распределение для $\frac{\gamma'_x}{x} + \frac{\eta_{[u/1-F(x)]}}{x}$ равно

$$\int_0^v G_\alpha\left(\frac{v-z}{u^{1/\alpha}}\right) p_\alpha(z)\, dz.$$

Принимая во внимание формулу (81) и подставляя значение $p_\alpha(v)$ из (8), получим (12).

§ 6. Приложения к процессам с независимыми приращениями

21. Задача, изучавшаяся в предыдущих параграфах, может быть сформулирована в несколько иной, эквивалентной форме. Пусть h — произвольное положительное число. Обозначим через $\nu_y(h)$ число элементов последовательности

$$h\zeta_n = h\xi_1 + \cdots + h\xi_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

меньших, чем y, и положим

$$\gamma'_y(h) = h\zeta_{\nu_y(h)+1} - y,$$

$$\gamma''_y(h) = y - h\zeta_{\nu_y(h)},$$

$$\gamma_y(h) = \gamma'_y(h) + \gamma''_y(h) = h\xi_{\nu_y(h)+1}.$$

Легко видеть, что если $x = \frac{y}{h}$, то

$$\gamma'_y(h) = y\frac{\gamma'_x}{x}, \quad \gamma''_y(h) = y\frac{\gamma''_x}{x}, \quad \gamma_y(h) = y\frac{\gamma_x}{x}. \tag{83}$$

Используя эти соотношения, легко переформулировать теоремы 1—4 в терминах случайных величин $\gamma'_y(h)$, $\gamma''_y(h)$, $\gamma_y(h)$. Предельный переход $x \to \infty$ заменится при этом предельным переходом $h \to 0$.

22. Рассмотрим однородный процесс ζ_t с независимыми положительными приращениями, определяемый формулой

$$Me^{-s\zeta_t} = e^{-cts^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1,\ c > 0). \tag{84}$$

Обозначим через τ_y точную верхнюю грань множества значений t, для которых $\zeta_t < y$. Положим

$$\Gamma'_y = \zeta_{\tau_y+0} - y,$$
$$\Gamma''_y = y - \zeta_{\tau_y-0},$$
$$\Gamma_y = \zeta_{\tau_y+0} - \zeta_{\tau_y-0}.$$

Величина Γ_y есть длина скачка, который совершает функция ζ_t через y. Уровень y разбивает эту величину на две части: верхнюю Γ'_y и нижнюю Γ''_y.

23. ТЕОРЕМА 6. *Совместная плотность распределения Γ'_y, Γ''_y равна*

$$p_y(u, v) = \begin{cases} \frac{\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} (y-v)^{\alpha-1} (u+v)^{-\alpha-1} & \text{для } 0<u,\ 0<v<y, \\ 0 & \text{для остальных } u,\ v. \end{cases}$$

Плотности распределения для величин Γ'_y, Γ''_y и Γ_y соответственно равны:

$$p_{\Gamma'_y}(u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{y^\alpha}{(u+y)\,u^\alpha}, \tag{85}$$

$$p_{\Gamma''_y}(u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} (y-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha}, \tag{86}$$

$$p_{\Gamma_y}(u) \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} u^{-1-\alpha} g_y(u), \tag{87}$$

где

$$g_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leqslant 0, \\ y^\alpha - (y-u)^\alpha & \text{при } 0<u<y, \\ y^\alpha & \text{при } u \geqslant y. \end{cases}$$

Доказательство. Все утверждения теоремы 4 доказываются аналогично. Докажем формулу (85).

Рассмотрим последовательность

$$\zeta_h;\ \zeta_{2h}, \ldots, \zeta_{nh}, \ldots,$$

где h — некоторое положительное число. Пусть $\mu_y(h)$ — первый элемент этой последовательности, больший или равный y. При уменьшении h $\mu_y(h)$ уменьшается и

$$\lim_{h\to 0} \mu_y(h) = \zeta_{\tau_y+0} = \Gamma'_y + y.$$

Следовательно, при $h \to 0$ распределение $\mu'_y(h) - y$ сходится к распределению Γ'_y.

Величины

$$\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

положительны, независимы и имеют одинаковые распределения вероятностей. Набор величин

$$\zeta_h - \zeta_0, \quad \zeta_{2h} - \zeta_h, \ldots, \zeta_{hn} - \zeta_{(n-1)h}, \ldots$$

эквивалентен * набору

$$h^{1/\alpha}\xi_1,\ h^{1/\alpha}\xi_2, \ldots, h^{1/\alpha}\xi_n, \ldots$$

* Мы говорим, что два множества случайных величин ξ_α и η_α ($\alpha \in \mathfrak{A}$) эквивалентны, если для любого конечного набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{A}$ совместное распределение $\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_k}$ совпадает с совместным распределением $\eta_{\alpha_1}, \ldots, \eta_{\alpha_k}$.

(это видно из выражения (84)). Отсюда вытекает, что случайная величина $\gamma'_y(h^{1/\alpha})$, построенная в п. 21, имеет такое же распределение вероятностей, как и величина $\mu_y(h) - y$. Следовательно, распределение вероятностей для Γ'_y совпадает с предельным распределением для $\gamma'_y(h)$ при $h \to 0$. Положим $x = \frac{y}{h}$. Тогда $x \to \infty$ и, согласно (83),

$$\gamma'_y(h) = y\frac{\gamma'_x}{x}.$$

По теореме 3, распределения $\frac{\gamma'_x}{x}$ сходятся к распределению с плотностью $p_\alpha(u)$, определенной формулой (8). Отсюда вытекает, что распределения $\gamma'_y(h)$ при $h \to 0$ сходятся к распределению с плотностью (85).

24. При помощи аналогичных рассуждений, опираясь на теорему 5, можно вычислить распределение вероятностей для величины $\tau_b - \tau_a$ $(b > a)$, т. е. для времени пребывания в интервале $[a, b]$ частицы, движущейся по закону ζ_t. Оказывается, что

$$P(\tau_b - \tau_a > u) = \Phi_{\frac{b}{a}-1}\left(\frac{uc}{a^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\right),$$

где функция $\Phi_k(u)$ определяется формулой (12). Для математического ожидания имеем:

$$M(\tau_b - \tau_a) = (b^\alpha - a^\alpha)\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

§ 7. Величины, принимающие значения разных знаков

25. Рассмотрим снова последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{88}$$

независимых одинаково распределенных случайных величин, но снимем требование, чтобы эти величины были положительными. Вместо этого будем только предполагать, что выполняется следующее условие:

с вероятностью 1 среди сумм $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеются положительные. (**)

Как нетрудно показать, из условия (**) вытекает, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta_n = +\infty,$$

и определения величин ν_x, γ'_x и др. сохраняют свою силу. Мы ограничимся исследованием предельного поведения при $x \to \infty$ величины γ'_x и покажем, что все основные результаты, полученные в § 4 и 5, приложимы и к нашей новой, более общей схеме.

Обозначим через n_1 наименьшее значение n, для которого $\zeta_n > 0$, через n_2 — наименьшее значение n, для которого $\zeta_n > \zeta_{n_1}, \ldots$, через n_k — наименьшее значение n, для которого $\zeta_{n_k} > \zeta_{n_{k-1}}, \ldots$ Заметим, что величины

$$\xi'_1 = \zeta_n,\ \zeta'_2 = \zeta_{n_2} - \zeta_{n_1}, \ldots,\ \xi'_k = \zeta_{n_k} - \zeta_{n_{k-1}}, \ldots$$

независимы, положительны и имеют одинаковые распределения вероят-

ностей. Нетрудно видеть, что случайная величина γ'_n, построенная по последовательности

$$\xi'_1, \ \xi'_2, \ldots, \ \xi'_k, \ldots,$$

будет в точности равна случайной величине γ'_x, построенной по первоначальной последовательности (88). Таким образом задача вычисления предельного распределения для величины γ'_x, соответствующей последовательности (88), сводится к задаче, уже исследованной в предыдущих параграфах.

Отметим, в частности, что для любой последовательности (88) сохраняется без изменения теорема 2. Теорема 3 справедлива уже не для сумм $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, а для сумм $\zeta'_n = \xi'_1 + \cdots + \xi'_n$.

Из этого замечания вытекают весьма любопытные следствия.

26. Рассмотрим однородный процесс ζ_t с независимыми приращениями с характеристической функцией

$$Me^{is\zeta_t} = \exp\left\{- ct\,|s|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{s}{|s|}\right] \omega(s, \alpha)\right\},$$

где $0 < \alpha < 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$$\omega(s, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\log|s|, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Исследуем распределение вероятностей случайной величины Γ'_1, которая определяется так же, как в п. 22 *. Снова, как в п. 22, рассматриваем последовательность

$$\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

строим по ней величину $\gamma'_1(h)$ и убеждаемся, что при $h \to 0$ предельное распределение $\gamma'_1(h)$ сходится к распределению вероятностей величины Γ'_1. Согласно сделанному выше замечанию, отсюда вытекают два следствия:

1) Либо $P(\Gamma'_1 = 0) = 1$, либо распределение Γ'_1 принадлежит к однопараметрическому семейству, задаваемому формулой (8).

2) Пусть $\Phi(u)$ — функция распределения первого положительного элемента в последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$. Если плотность распределения Γ'_1 равна $p_{\alpha'}(u)$, то распределение $\Phi(u)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α'.

Таким образом, имеет место следующая альтернатива: либо

А) $\Gamma'_1 = 0$ с вероятностью 1, либо

Б) рассматривая значения случайной функции ζ_t по дискретной последовательности моментов времени $t = 1, 2, \ldots$ и выбирая первое положительное из этих значений, мы получаем величину, принадлежащую области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha' < 1$.

* Если исключить случай $\beta = -1$, $\alpha < 1$, то в остальных случаях $\limsup_{t\to\infty} \zeta_t = +\infty$, величина Γ'_1 определена.

Предположим, что $\alpha > 1$. Случай А) вряд ли возможен, и мы стоим перед весьма интересной задачей: каждой паре чисел $\alpha > 1$, $-1 < \beta \leqslant 1$, согласно Б), соответствует определенный показатель $\alpha' < 1$; как выражается α' через α и β?

Связь между функцией распределения элементов последовательности (88) и функцией распределения $\Phi(u)$ первой положительной суммы $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ заслуживает специального изучения; установление зависимости между моментами распределений $F(u)$ и $\Phi(u)$, а также между устойчивыми типами, к которым притягиваются ζ_n и ζ'_n, было бы весьма полезно для многих задач, в частности, для исследования поведения максимумов сумм независимых случайных величин.

Поступило
29. IV. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения (дискретные распределения), Москва, 1952.

[2] Feller W., Fluctuation Theory of recurrent events, Trans. of the Amer. Math. Soc., 67 (1949), 98—119.

[3] Blackwell D., Extension of a renewal theorem, Pacific J. Math., 3 (1953), 315—320.

[4] Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I, Bazel, 1950.

[5] Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Москва, 1949.

[6] Karamata J., Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica, Cluj, 4 (1930), 38—53.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955) 267–272

Р. Ю. МАЦКИНА

О ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОБРАЗАХ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе исследуются непрерывные взаимно однозначные образы гильбертова пространства и доказывается, что взаимно однозначным непрерывным образом гильбертова пространства может быть B-множество любого класса α.

В работе (4) было установлено, что непрерывный взаимно однозначный образ гильбертова пространства может быть B-множеством сколь угодно высокого класса. А именно, там было доказано, что, каково бы ни было B-множество E, существует непрерывный взаимно однозначный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E. В настоящей работе получено более сильное утверждение: если E — B-множество класса α, представляющее собою непрерывный взаимно однозначный образ бэровского пространства *, то можно построить взаимно однозначный непрерывный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E, *который сам является B-множеством класса* α. Отсюда, в частности, следует, что непрерывным взаимно однозначным образом гильбертова пространства может быть B-множество любого класса.

Мы будем опираться на следующие свойства гильбертова пространства, которые легко могут быть доказаны:

1) Пусть сфера ** $\tilde{\Delta}$ гиперплоскости $\{x_1 = b_1,\ x_2 = b_2\}$ получена из сферы Δ гиперплоскости $\{x_1 = a_1,\ x_2 = a_2\}$, отличной от гиперплоскости $\{x_1 = b_1,\ x_2 = b_2\}$, путем параллельного переноса и сжатия. *Если соединить отрезками прямых попарно соответствующие точки поверхностей сфер Δ и $\tilde{\Delta}$, то эти отрезки не пересекаются.*

---

* Как известно, каждое B-множество с точностью до счетного множества точек представляет собой непрерывный взаимно однозначный образ бэровского пространства. Очевидно, что в каждом классе α имеется B-множество, являющееся точным взаимно однозначным непрерывным образом бэровского пространства.

** Сферой гиперплоскости гильбертова пространства (в частности, сферой самого гильбертова пространства) мы называем множество точек гиперплоскости, расстояния которых до некоторой точки C этой гиперплоскости (центра сферы) $\leqslant r$ (r — радиус сферы). Множество точек, расстояния которых до C равны r, мы будем называть поверхностью сферы.

2) Пусть сферы Δ и $\tilde{\Delta}$ гиперплоскости $\{x_1 = c_1,\ x_2 = c_2\}$ гильбертова пространства H концентричны (сфера $\tilde{\Delta}$ получена из сферы Δ путем сжатия). Сфера $\tilde{\Delta}^*$ гиперплоскости $\{y_1 = b_1,\ y_2 = b_2\}$ гильбертова пространства H^* получена из сферы Δ^* гиперплоскости $\{y_1 = a_1,\ y_2 = a_2\}$ $(a_1 \neq b_1,\ a_2 \neq b_2)$ пространства H^* путем параллельного переноса и сжатия. Множество M состоит из точек, принадлежащих поверхностям сфер Δ и $\tilde{\Delta}$ и отрезкам прямых, соединяющих соответствующие точки этих поверхностей, а множество M^* состоит из точек поверхностей сфер Δ^* и $\tilde{\Delta}^*$ и отрезков прямых, соединяющих соответствующие точки поверхностей этих сфер. *Если между поверхностями сфер Δ и Δ^* каким-то образом установлен гомеоморфизм, то он может быть продолжен до гомеоморфизма между множествами M и M^*.*

3) Если какая-либо точка гиперплоскости $\{x_1 = a_1,\ x_2 = a_2\}$ гильбертова пространства соединена отрезком прямой с точкой гиперплоскости $\{x_1 = b_1,\ x_2 = b_2\}$, а точка гиперплоскости $\{x_1 = a_1,\ x_2 = a_2'\}$ соединена отрезком прямой с точкой гиперплоскости $\{x_1 = b_1,\ x_2 = b_2'\}$, причем $a_1 \neq b_1,\ a_2' \leqslant a_2,\ b_2' < b_2$, то эти отрезки прямых не пересекаются.

ТЕОРЕМА. *Каково бы ни было B-множество E класса $\alpha \geqslant 2$, являющееся непрерывным взаимно однозначным образом бэровского пространства, существует непрерывный взаимно однозначный образ гильбертова пространства, являющийся также B-множеством класса α и содержащий замкнутое подмножество, гомеоморфное множеству E.*

Чтобы не делать изложение слишком громоздким, проведем доказательство для линейного B-множества E.

Будем строить отображение гильбертова пространства H в гильбертово пространство H^*. B-множество $\mathcal{E}$, гомеоморфное множеству E, поместим на оси OY_3 пространства H^*.

В пространстве H поместим замкнутое множество

$$F = \prod_k \sum_{n_1, \ldots, n_k} \Delta_{n_1 \ldots n_k},$$

гомеоморфное бэровскому пространству. Здесь каждое $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ — сфера гильбертова пространства H и каждая последовательность $\Delta_{n_1 \ldots n_k 1}$, $\Delta_{n_1 \ldots n_k 2}, \ldots, \Delta_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ — последовательность сфер радиуса $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^k}$, попарно не пересекающихся, не имеющих попарно общих граничных точек и лежащих строго внутри некоторой сферы $\tilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k}$, концентричной сфере $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ и лежащей строго внутри нее. При этом сумма сфер $\sum_{n_{k+1}} \Delta_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ есть замкнутое множество. Построение множества F подробно описано в работе (4), стр. 96, 97.

Множество $\mathcal{E}$ является непрерывным взаимно однозначным образом множества F. Пусть отображение F на $\mathcal{E}$ задано непрерывной разнозначной функцией $y_3 = f(x)$, определенной на множестве F. Обозначим через Γ_0 гиперплоскость $\{y_1 = 1,\ y_2 = 1\}$ пространства H^*. Эта гиперплоскость изометрична пространству H. При изометричном отображении φ пространства H на Γ_0 каждая сфера Δ_{n_1} пространства H отображается на некоторую сферу $\Delta^*_{n_1}$ гиперплоскости Γ_0, и множество $H - \sum_{n_1} \delta_{n_1}$

пространства H отображается на множество $\Gamma_0 - \sum \delta^*_{n_1}$ гиперплоскости Γ_0. Через $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ мы будем обозначать множество внутренних точек $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ и через $\tilde{\delta}_{n_1 \ldots n_k}$ — множество внутренних точек $\tilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k}$.

Обозначим через Γ_{n_1} $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ гиперплоскость $\{y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = a^{(1)}_{n_1}\}$, где $0 < a^{(1)}_{n_1} < 1$, причем $a^{(1)}_1 > a^{(1)}_2 > \cdots > a^{(1)}_{n_1} > \cdots$. В каждой гиперплоскости Γ_{n_1} поместим сферу $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ этой гиперплоскости того же радиуса, что и сфера $\tilde{\Delta}_{n_1}$, координаты центра которой выбираются следующим образом: $y_3 = f(\xi_{n_1})$, где $\xi_{n_1} \in F\tilde{\Delta}_{n_1}$, а при $n > 3$ $|y_n| < \frac{1}{n}$. Каждая сфера $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ может быть получена из сферы $\Delta^*_{n_1}$ путем параллельного переноса и сжатия. Установим гомеоморфизм между сферами $\tilde{\Delta}_{n_1}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ (сфера $\tilde{\Delta}_{n_1}$ путем сжатия получена из сферы Δ_{n_1}, а $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ получена из Δ^*_n путем сжатия и сдвига). Соответствующие точки поверхностей сфер Δ_{n_1} и $\tilde{\Delta}_{n_1}$, а также соответствующие точки поверхностей сфер $\Delta^*_{n_1}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ соединим отрезками. Тогда на основании свойства 2) мы можем гомеоморфизм поверхностей сфер Δ_{n_1} и $\Delta^*_{n_1}$ продолжить до гомеоморфизма между множеством $\Delta_{n_1} - \tilde{\delta}_{n_1}$ и множеством, состоящим из поверхностей сфер $\Delta^*_{n_1}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ и отрезков, соединяющих соответствующие точки поверхностей этих сфер. (Легко видеть, что гомеоморфизм этих множеств можно установить так, чтобы между поверхностями сфер $\tilde{\Delta}_{n_1}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$ устанавливалось то же гомеоморфное соответствие, что и при упомянутом выше гомеоморфизме сфер $\tilde{\Delta}_{n_1}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1}$.)

Далее продолжаем построение по индукции: пусть установлен гомеоморфизм между каждой сферой $\tilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ и соответственно выбранной сферой $\tilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, а также между каждым множеством $\Delta_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \tilde{\delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ и множеством, состоящим из поверхностей сфер $\Delta^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ и $\tilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ и отрезков, соединяющих соответствующие точки этих поверхностей. При этом каждая сфера $\Delta_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}$, лежащая внутри сферы $\tilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, отображается гомеоморфно на некоторую сферу $\Delta^*_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}$, лежащую внутри сферы $\tilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, и каждое множество $\tilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum\limits_{n_k} \delta_{n_1 \ldots n_k}$ гомеоморфно отображается на множество $\hat{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum\limits_{n_k} \delta^*_{n_1 \ldots n_k}$.

Рассмотрим множество действительных чисел, построенное следующим образом:

Сначала выбираются числа $\{a^{(k)}_{n_1}\}$ такие, что

$$0 < a^{(k)}_{n_1} < \frac{1}{k} \text{ и } a^{(k}_1 > a^{(k)}_2 > \cdots a^{(k)}_{n_1} > \cdots,$$

затем выбираются числа $\{a^{(k)}_{n_1 n_2}\}$ такие, что

$$a^{(k)}_{n_1+1} < a^{(k)}_{n_1 n_2} < a^{(k)}_{n_1} \text{ и } a^{(k)}_{n_1 1} > a^{(k)}_{n_1 2} > \cdots > a^{(k)}_{n_1 n_2} > \cdots$$

и т. д. Наконец, выбираются числа $\{a^{(k)}_{n_1 \ldots n_k}\}$ такие, что

$$a^{(k)}_{n_1 \ldots (n_{k-1}+1)} < a^{(k)}_{n_1 \ldots n_k} < a^{(k)}_{n_1 \ldots n_{k-1}}$$

и

$$a^{(k)}_{n_1 \ldots n_{k-1} 1} > a^{(k)}_{n_1 \ldots n_{k-1} 2} > \cdots > a^{(k)}_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k} > \cdots$$

Обозначим через $\Gamma_{n_1 \ldots n_k}$ гиперплоскость

$$\left\{y_1 = \frac{1}{k+1},\ y_2 = a^{(k)}_{n_1 \ldots n_k}\right\}.$$

В каждой гиперплоскости $\Gamma_{n_1 \ldots n_k}$ поместим сферу $\widetilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_k}$ того же радиуса, что и сфера $\widetilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k}$, с центром в точке, определенной координатами:

$$y_3 = f(\xi_{n_1 \ldots n_k}), \text{ где } \xi_{n_1 \ldots n_k} \in F \cdot \widetilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k},$$

а при $n > 3$

$$|y_n| < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n}.$$

Так же как и выше, устанавливаем гомеоморфизм между сферами $\widetilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k}$ и $\widetilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_k}$, а также между каждым множеством $\widetilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k} - \widetilde{\delta}_{n_1 \ldots n_k}$ и множеством, состоящим из поверхностей сфер $\Delta^*_{n_1 \ldots n_k}$ и $\widetilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_k}$ и отрезков, соединяющих соответственные точки этих поверхностей.

Далее определим отображение $y = \Phi(x)$ пространства H в пространство H^* следующим образом:

Любой точке x, принадлежащей множеству $H - \sum\limits_{n_1} \Delta_{n_1}$, поставим в соответствие точку $y = \varphi(x)$. Точке x, принадлежащей какому-либо множеству

$$\widetilde{\delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \Delta_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k},$$

поставим в соответствие точку y, отвечающую этой точке x при гомеоморфизме между множествами

$$\widetilde{\delta}_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \Delta_{n_1 \ldots n_k} \text{ и } \widetilde{\delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \Delta^*_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}.$$

Точке x, принадлежащей какому-либо множеству

$$\Delta_{n_1 \ldots n_k} - \widetilde{\delta}_{n_1 \ldots n_k},$$

поставим в соответствие точку y, отвечающую этой точке x при гомеоморфизме между множеством $\widetilde{\Delta}_{n_1 \ldots n_k} - \widetilde{\delta}_{n_1 \ldots n_k}$ и множеством $M_{n_1 \ldots n_k}$, состоящим из поверхностей сфер $\Delta^*_{n_1 \ldots n_k}$ и $\widetilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_k}$ и отрезков, соединяющих соответствующие точки этих поверхностей. Наконец, будем считать образом каждой точки x, принадлежащей множеству F, ее образ при отображении множества F на множество $\mathcal{E}$, заданном при помощи функции $y_3 = f(x)$.

Покажем, что построенное отображение является непрерывным и взаимно однозначным и что образ пространства H при этом отображении удовлетворяет всем условиям теоремы.

Докажем, прежде всего, взаимную однозначность отображения. Для этого достаточно показать, что множество $\mathcal{E}$, множества $\widetilde{\delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum\limits_{n_k} \Delta^*_{n_1 \ldots n_k}$ и множества $M_{n_1 \ldots n_k}$ попарно не пересекаются. В самом

деле, множество $\mathcal{E}$ лежит на оси OY_3, с которой не пересекается ни одно из остальных множеств. Множества $\tilde{\delta}^*_{n_1\ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \Delta^*_{n_1\ldots n_k}$ не пересекаются между собой, так как они лежат в различных гиперплоскостях $\Gamma_{n_1\ldots n_{k-1}}$ и не пересекаются с множествами $M_{n_1\ldots n_k}$. (Множество $M_{n_1\ldots n_k}$ пересекается с гиперплоскостью $\Gamma_{n_1\ldots n_{k-1}}$ только по поверхности сферы $\Delta^*_{n_1\ldots n_{k-1}n_k}$, которая не имеет общих точек с множеством $\tilde{\delta}^*_{n_1\ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \Delta^*_{n_1\ldots n_k}$, лежащим в этой гиперплоскости; множество $M_{n_1\ldots n_k}$ пересекается с гиперплоскостью $\Gamma_{n_1\ldots n_{k-1}n_k}$ только по поверхности сферы $\tilde{\Delta}^*_{n_1\ldots n_k}$, которая не имеет общих точек с множеством $\tilde{\delta}^*_{n_1\ldots n_k} - \sum_{n_{k+1}} \Delta^*_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$, лежащим в этой гиперплоскости, и, наконец, множество $M_{n_1\ldots n_k}$ не пересекается ни с одной из остальных гиперплоскостей, в которых расположены множества вида $\tilde{\delta}^*_{n_1\ldots n_k} - \sum_{n_{k+1}} \Delta^*_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$.) Наконец, никакие два множества $M_{n_1\ldots n_k}$ и $M_{n'_1 n'_2\ldots n'_l}$ не пересекаются. Для $k \neq l$ это очевидно из построения; для $k = l$ это следует из свойства 3).

Докажем теперь непрерывность отображения $y = \Phi(x)$. Непрерывность отображения в точках $x \in H - F$ очевидна. Докажем непрерывность отображения в произвольной точке x множества F. Для каждой точки $x \in F$ существует единственная последовательность окрестностей

$$\tilde{\Delta}_{n_1^0} \supset \tilde{\Delta}_{n_1^0 n_2^0} \supset \ldots \supset \tilde{\Delta}^*_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0} \supset \ldots,$$

общей точкой которых является точка x (радиусы этих окрестностей по построению стремятся к 0). Покажем, прежде всего, что последовательность центров $C_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0}$ окрестностей $\tilde{\Delta}^*_{n_1^0}, \tilde{\Delta}^*_{n_1^0 n_2^0}, \ldots, \tilde{\Delta}^*_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0}$ сходится к точке y с координатами $y_3 = f(x)$, $y_m = 0$ $(m \neq 3)$, являющейся образом точки x. Согласно выбору центров окрестностей $\tilde{\Delta}^*_{n_1\ldots n_k}$, легко видеть, что

$$\rho^2 (C_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0}, y) \leqslant \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + (a^{(h)}_{n_1^0\ldots n_k^0})^2 + \\ + [f(\xi_{n_1^0\ldots n_k^0}) - f(x)]^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{m>3} \left(\frac{1}{m}\right)^2,$$

причем

$$\xi_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0} \in \tilde{\Delta}_{n_1^0\ldots n_k^0}$$

и, значит, при $k \to \infty$

$$\xi_{n_1^0 n_2^0\ldots n_k^0} \to x,$$

а следовательно,

$$f(\xi_{n_1^0\ldots n_k^0}) \to f(x);$$

кроме того, по построению, при $k \to \infty$ $a^{(k)}_{n_1\ldots n_k} \to 0$. Отсюда видно, что при $k \to \infty$ $\rho(C_{n_1^0\ldots n_k^0}, y) \to 0$. Так как и радиусы окрестностей $\tilde{\Delta}^*_{n_1^0\ldots n_k^0}$ при $k \to \infty$ стремятся к нулю, то, каково бы ни было действительное

число ε, все окрестности $\tilde{\Delta}^*_{n_1^0 \ldots n_k^0}$, начиная с некоторого ранга k_0, окажутся внутри ε-окрестности точки y. Но тогда и все окрестности $\Delta^*_{n_1^0 \ldots n_k^0}$, начиная с ранга k_0+1, а значит, и все соответствующие $M_{n_1^0 \ldots n_k^0}$ при $k \geqslant k_0+1$, будут лежать внутри этой ε-окрестности. Следовательно, как это видно из построения, все точки окрестности $\tilde{\Delta}_{n_1^0 \ldots n_k^0 n_{k+1}^0}$ отображаются в эту ε-окрестность, что и доказывает непрерывность отображения в точке x.

Покажем, что если E является множеством класса $\alpha \geqslant 2$, то и $\Phi(H)$ (образ пространства H при построенном отображении) является множеством класса α. По построению,

$$\Phi(H) = \Phi(H - F) + \Phi(F) = \Phi(H - F) + \mathscr{E}.$$

Множество $\mathscr{E}$ гомеоморфно множеству E и, следовательно, класса α. Множество $\Phi(H-F)$ можно представить как сумму счетного числа множеств $\tilde{\Delta}^*_{n_1 \ldots n_{k-1}} - \sum_{n_k} \delta^*_{n_1 \ldots n_k}$ и множеств $M_{n_1 \ldots n_k}$. Все эти множества, как легко видеть, замкнуты в H^*. Следовательно, множество $\Phi(H-F)$ является множеством F_σ в H^*, т. е. множеством 2-го класса. Итак, класс множества $\Phi(H)$ не выше α в случае, когда $\alpha \geqslant 2$. Множество $\mathscr{E}$ класса α высекается из $\Phi(H)$ осью OY_3 и, следовательно, замкнуто в $\Phi(H)$. Значит, класс $\Phi(H)$ не может быть $< \alpha$. Таким образом класс множества $\Phi(H)$ равен α и $\Phi(H)$ содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное E.

Мы проводили доказательство для линейного B-множества E. Доказательство для B-множества любой размерности, лежащего в гильбертовом пространстве (или в любом регулярном пространстве со счетной базой), принципиально ничем не отличается от приведенного. Единственная разница состоит в том, что, вместо того чтобы рассматривать множество $\mathscr{E}$, лежащее на оси OY_3, придется рассматривать множество $\mathscr{E}$, лежащее в гиперплоскости $\{x_{2n} = 0\}$; при этом $\Gamma_{n_1 \ldots n_k}$ будет означать гиперплоскость

$$\left\{y_2 = \frac{1}{k+1},\ y_4 = a^{(k)}_{n_1 \ldots n_k}\right\}.$$

Из доказанной теоремы, очевидно, следует, что в любом классе α существует B-множество, являющееся непрерывным взаимно однозначным образом гильбертова пространства.

Поступило
17.VI.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Урысон П. С., Гильбертово пространство как прообраз метрических пространств, Труды по топологии и другим областям математики, т. I, Гостехиздат (1951), 147—150.

[2] Урысон П. С., К проблеме метризации. Труды по топологии и другим областям математики, т. II, Гостехиздат (1951), 740—746.

[3] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Москва, 1953.

[4] Мацкина Р. Ю., О непрерывных образах гильбертова пространства, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 533—544.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 273—274

Д. А. СУПРУНЕНКО

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЧНЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе доказывается, что в полной линейной группе над алгебраически замкнутым полем имеется лишь конечное число несопряженных максимальных нильпотентных подгрупп заданного класса нильпотентности.

В настоящей работе рассматриваются неприводимые нильпотентные подгруппы полной линейной группы $GL(n, P)$.

Группа Γ называется нильпотентной класса l, если она совпадает со своим l-м гиперцентром Z_l, причем $\Gamma \neq Z_{l-1}$ (здесь $Z_0 = E$, Z_{j+1}/Z_j — центр Γ / Z_j).

Пусть Γ — нильпотентная подгруппа класса l группы $GL(n, P)$. Если Γ не содержится в другой нильпотентной подгруппе $GL(n, P)$ класса l, то Γ называется *максимальной нильпотентной* подгруппой *класса* l группы $GL(n, P)$.

В работе доказывается следующее утверждение: если поле P алгебраически замкнуто, то среди неприводимых максимальных нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ заданного класса l имеется лишь конечное число подгрупп, несопряженных в $GL(n, P)$.

Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, где P — произвольное поле (пока не обязательно алгебраически замкнутое). В работе ([1]) показано, что индекс центра группы Γ конечен.

При фиксированных n и l индекс центра неприводимой нильпотентной подгруппы класса l группы $GL(n, P)$ ограничен. Пользуясь этим, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть центр неприводимой нильпотентной подгруппы* Γ *группы* $GL(n, P)$ *содержится в мультипликативной группе основного поля* P. *Тогда пересечение* Γ *с унимодулярной группой* $SL(n, P)$ *является конечной группой.*

Доказательство. Пусть Z — центр Γ. Для индекса Z в Γ можно написать: $\Gamma : Z < \nu = \nu(n, l)$. Если $D = \Gamma \cap SL(n, P)$, то, в силу изоморфизма $DZ/Z \cong D/Y \cap D$, имеем $D:(Z \cap D) < \nu$. Покажем, что $Z \cap D$ — конечная группа. Очевидно, $Z \cap D = Z \cap SL(n, P)$.

По условию, $c = \lambda E$, если $c \in Z$. Если же $c \in Z \cap SL(n, P)$, то $\lambda^n = 1$. Следовательно, порядок $Z \cap D$ не превышает числа n, и порядок D меньше числа $n\nu(n, l)$.

Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* Γ — *неприводимая нильпотентная подгруппа группы* $GL(n, P)$, *где* P — *алгебраически замкнутое поле. Если центр группы* Γ *совпадает с мультипликативной группой* M *поля* P, *то в* Γ *есть такая конечная подгруппа* $\mathfrak{G}$, *что* $\Gamma = \mathfrak{G}M$.

Доказательство. К группе Г применима лемма 1, поэтому $\Gamma \cap SL(n, P) = \mathfrak{G}$ — конечная группа, порядок которой не превышает числа $n\nu(n, l) = \mu(n, l)$. Так как поле P алгебраически замкнуто, то для любого $g \in \Gamma$ можно найти такое $\lambda \in M$, что определитель матрицы λg окажется равным единице. Следовательно, группа $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$ содержит полную систему представителей смежных классов Г по M. Отсюда следует, что $\Gamma = \mathfrak{G}M$, и теорема 1 доказана. Ясно, что в случае алгебраически замкнутого поля P центр неприводимой нильпотентной подгруппы Г группы $GL(n, P)$ является подгруппой мультипликативной группы M поля P. Группа ΓM, очевидно, того же класса нильпотентности, что и Г, причем центр ΓM совпадает с M. Таким образом любая неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(n, p)$ класса l содержится в такой нильпотентной подгруппе $GL(n, p)$ класса l, центр которой равен M.

Если условиться подгруппы $GL(n, p)$, сопряженные в $GL(n, P)$, не считать различными, то можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *В полной линейной группе над алгебраически замкнутым полем содержится лишь конечное число неприводимых нильпотентных подгрупп заданного класса нильпотентности, центры которых совпадают с мультипликативной группой основного поля.*

Доказательство. По теореме 1, любая неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ класса l, центр которой равен M, представима в виде $\mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G}$ — конечная группа. Порядок $\mathfrak{G}$ не превышает числа $\mu(n, l)$. Поэтому число неизоморфных групп среди групп $\mathfrak{G}$ конечно. Конечная группа может иметь в $GL(n, P)$ только конечное число неэквивалентных неприводимых представлений. Следовательно, среди групп $\mathfrak{G}$ имеется лишь конечное число несопряженных в $GL(n, P)$. Отсюда и следует теорема 2.

Из теоремы 2 и замечания, приводимого перед ее формулировкой, вытекает основной результат настоящей работы: *конечность числа максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп $GL(n, P)$ заданного класса нильпотентности для алгебраически замкнутого поля P.*

Отметим, что последнее утверждение не распространяется на случай алгебраически незамкнутого поля. Например, для нильпотентных групп над полем рациональных чисел этот факт заведомо не имеет места. По-видимому, он остается справедливым для случая, когда основное поле обладает алгебраическим замыканием конечной степени.

Из упомянутой теоремы работы ([1]) легко получить следущую теорему о конечных нильпотентных подгруппах полной линейной группы:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть P — произвольное поле, $\mathfrak{G}$ — конечная нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ класса l, причем характеристика поля P не является делителем порядка n. Тогда индекс центра группы $\mathfrak{G}$ меньше некоторого числа $N(n, l)$, зависящего только от n и l.*

Поступило
7. I. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Супруненко Д. А., О матричных нильпотентных группах, Ученые записки Белорусск. гос. университета, в. 15 (1953), 3—6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 275–284

Г. А. ФРЕЙМАН

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе рассматривается задача определения слагаемых, на которые разбивается некоторое большое число N, если задано число таких разбиений.

§ 1. Основные результаты

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots \tag{1}$$

— монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, $q(N)$ — число решений неравенства

$$a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2 + \cdots \leqslant N, \tag{2}$$

где n_i — любые целые неотрицательные числа.

Справедливо следующее предложение:

Если

$$\log q(u) \sim Au^\alpha, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то

$$n(u) \sim Bu^\beta,$$

где $n(u)$ — *число членов последовательности* (1), *не превосходящих* u,

$$B = \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \zeta\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}, \qquad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Естественно поставить вопрос: что можно сказать об асимптотическом поведении $n(u)$, если поведение $q(u)$ будет задано более точно?

В § 2 настоящей работы получен следующий результат:

Если

$$\log q(u) = Au^\alpha + O(u^{\alpha_1}), \quad 0 < \alpha_1 < \alpha, \tag{3}$$

то

$$n(u) = Bu^\beta + O\left(\frac{u^\beta}{\log u}\right). \tag{4}$$

В § 3 приведен пример, показывающий, что оценку (4) усилить нельзя, даже если задана асимптотическая формула для $q(u)$. Пример

построен для случая, когда $a_r = r^s$ и

$$q(N) \sim (2\pi)^{-\frac{s+1}{2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}} N^{-\frac{1}{2}} e^{(s+1)\, dN^{\frac{1}{s+1}}},$$

$$d = \left(\frac{1}{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)^{\frac{s}{s+1}}.$$

Выражаю благодарность А. О. Гельфонду и А. Г. Постникову, ценные советы которых очень помогли мне в ходе работы.

§ 2. Вывод асимптотической формулы для $n(u)$

Имеет место соотношение:

$$\log \int_0^\infty e^{-us}\, dq(u) = \int_0^\infty e^{-us}\, d\Pi(u), \tag{5}$$

причем

$$n(u) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\mu(k)}{k} \Pi\left(\frac{u}{k}\right). \tag{6}$$

Пусть имеет место соотношение (3). Преобразуем левую часть (5). В силу (3), имеем:

$$e^{Au^\alpha - Cu^{\alpha_1}} < q(u) < e^{Au^\alpha + Cu^{\alpha_1}},$$

где C — достаточно большая постоянная.

Используя эти неравенства и производя замену переменных $u = u_0 + v$, где

$$u_0 = \left(\frac{A\alpha}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

получим:

$$\int_0^\infty e^{-us} q(u)\, du < \int_0^\infty e^{-us + Au^\alpha + Cu^{\alpha_1}}\, du =$$

$$= e^{-u_0 s + Au_0^\alpha} \int_{-u_0}^\infty e^{-vs + A(u_0+v)^\alpha - Au_0^\alpha + C(u_0+v)^{\alpha_1}}\, dv.$$

Так как $-vs + A(u_0+v)^\alpha - Au_0^\alpha$ имеет максимум, равный нулю при $v = 0$, а весь показатель при $v > Eu_0$, где E — достаточно большая постоянная, становится меньше $-\frac{vs}{2}$, то

$$\int_0^\infty e^{-us} q(u)\, du < e^{-u_0 s + Au_0^\alpha + C_1 u_0^{\alpha_1}}.$$

Аналогично получается оценка снизу:

$$\int_0^\infty e^{-us} q(u)\, du > e^{-u_0 s + Au_0^\alpha - C_1 u_0^{\alpha_1}}.$$

Оценивая при помощи двух последних неравенств левую часть соот-

ношения (5), получим:

$$\int_0^\infty e^{-us}\,d\Pi(u) = \frac{D}{s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} + O\left(\frac{1}{s^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha}}}\right), \qquad (7)$$

где

$$D = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha).$$

В дальнейшем наше исследование существенно опирается на тауберовы теоремы, дающие оценки остаточных членов.

Постановка задачи и первые результаты в этой области принадлежат А. Г. Постникову [см. ([1])].

Наилучшие оценки независимо получил Г. Фрейд [см. ([2])]. Пример, показывающий, что оценку Г. Фрейда улучшить нельзя, построил Коревар [см. ([3])].

В работе ([2]) * получен следующий результат:

Пусть $f(u) \geqslant 0$ и

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\,e^{-us}\,d\tau = S\,\frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^\gamma}\,[1 + r(s)],$$

где $s > 0$, интеграл сходится, $\gamma > 0$, τ — определенная в интервале $0 \leqslant u < \infty$ монотонно возрастающая функция, $|r(s)| < C_0 s^\varepsilon$, C_0 и ε — положительные числа, не зависящие от s. Тогда имеет место оценка:

$$\int_0^x f(u)\,d\tau = Sx^\gamma\,(1 + \rho(x)),$$

где

$$|\rho(x)| < \frac{C}{\log x} \quad \text{для } x > 2.$$

---

* Заметим, что в одной из деталей доказательства работы ([2]) имеется ошибка (стр. 306): именно, выражение

$$\zeta_n(\theta) = \left(\frac{\sin(n-1)\dfrac{\theta-\theta_{\nu n}}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\theta_{\nu n}}{2}}\right)^2$$

не является, вообще говоря, полиномом от $\cos\theta$, а это используется в доказательстве.

Исправление легко произвести, например, следующим образом. Пусть

$$\zeta_k(x) = \left(\frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta}\right)^2, \qquad x = \sin\theta.$$

$\zeta_k(x)$ является полиномом степени $4k$. Пусть, далее,

$$\pi_n(x) = \frac{c_n}{(n-1)^2}\,(x + x_{\nu n})\,(1 - x - x_{\nu n})\,\zeta_{\left[\frac{n}{4}\right]-1}(x)\,(x+1)^c,$$

где c подобрано так, чтобы степень полинома была n, а c_n подобрано так, чтобы $\pi_n(0) = 1$. Тогда $\pi_n(x - x_{\nu n})$ и будет искомым полиномом и доказательство завершается без затруднения.

Прилагая этот результат к соотношению (7), получим:

$$\Pi(u) = \int_0^u d\Pi(u) = \frac{D}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [1 + \rho(u)]. \qquad (8)$$

Используя (8), из (6) найдем: $n(u) = Bu^{\beta}[1 + \rho(u)]$, что совпадает с (4).

§ 3. Пример, показывающий, что оценку (4) улучшить нельзя

Пусть

$$p = \left[\frac{N}{k \log N}\right], \quad q = [k \log N], \qquad (9)$$

где k — достаточно большое фиксированное положительное число.

Определим $U(N, t)$ формулой

$$U(N, t) = N^{\gamma-1}\left(C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \int\limits_{N+1}^{p(q+1)+N+1} (-1)^{k(u)} C_q^{k(u)} \frac{u\,du}{e^{tu}-1}, \qquad (10)$$

где

$$k(u) = \left[\frac{u-N-1}{p}\right].$$

Оценим величину $U(N, t)$. Рассмотрим три случая:

I. $0 < t \leqslant e^{-4} N^{-1}$,

II. $e^{-4} N^{-1} < t < 4\,kN^{-1} \log N$,

III. $t \geqslant 4\,kN^{-1} \log N$.

В случае I воспользуемся известным соотношением

$$\frac{s}{e^s-1} = 1 - \frac{s}{2} + \sum_{n=1}^{r-1} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} s^{2n} + \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} (\theta s)^{2r},$$

$$0 < \theta < 1, \quad B_n = \frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} s_{2n},$$

где

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}.$$

Так как

$$\sum_{r=0}^{q} (-1)^r C_q^r r^w = 0,$$

если $w < q$, то, считая, что $N > L$, где L — некоторая достаточно большая постоянная, получим:

$$U(N, t) = N^{\gamma-1}\left(C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \sum_{l=0}^{q} \int\limits_{N+lp+1}^{N+(l+1)p+1} (-1)^l C_q^l \frac{u\,du}{e^{tu}-1} =$$

$$= N^{\gamma-1}\left(C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \int\limits_{N+1}^{N+1+p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^l C_q^l \frac{(v+lp)\,dv}{e^{t(v+lp)}-1} \ll$$

$$\ll N^{\gamma-1} p 2^q \cdot \frac{1}{t}\left(\frac{3\,tN}{2\pi}\right)^{q-1} \ll N^{\gamma} \frac{1}{t} (tN)^{q-1} =$$

$$= N^{\gamma+k+1} t^k (tN)^{q-k-2} \ll N^{\gamma+k+1} t^k N^{-4k} \ll t^k N^{-2k}. \qquad (11)$$

В случае III

$$U(N, t) \ll N^{\gamma} 2^{q} \frac{N}{e^{tN}} \ll N^{\gamma+1+k \log 2} e^{-tN} \ll$$
$$\ll N^{\gamma+1+k \log 2} N^{-4k} \ll N^{-3k} \ll t^{k} N^{-2k}. \tag{12}$$

Наконец, в случае II

$$U(N, t) = N^{\gamma-1} \left(C^{q}_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \int\limits_{N+1}^{N+1+p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{l} C_{q}^{l} \sum_{r=1}^{\infty} (v + lp) e^{-rt(v+lp)} dv =$$

$$= N^{\gamma-1} \left(C^{q}_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_{0}^{1} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{l} C_{q}^{l} \sum_{r=1}^{\infty} (w + N+1 + k + lp) e^{-rt(w+N+1+k+lp)} dw =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} u(N, e^{-rt}) \int\limits_{0}^{1} we^{-rtw} dw - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} u(N, e^{-rt}) \int\limits_{0}^{1} e^{-rtw} dw. \tag{13}$$

В этом соотношении [(см. (3)]

$$u(N, x) = N^{\gamma-1} \left(C^{q}_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} x^{N+1} (1 + x + \ldots + x^{p-1}) (1 - x^{p})^{q} =$$
$$= N^{\gamma-1} \left(C^{q}_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q} (-1)^{k} C_{q}^{k} x^{pk+l+N+1}.$$

Для функции $u(N, x)$ и ее производных по x мы имеем следующие оценки для любого x:

$$u(N, x) \ll N^{\gamma} x^{N+1} (1 - x^{p})^{q} < N^{\gamma} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} x^{pq} (1 - x^{p})^{q} <$$
$$< N^{\gamma} 2^{-2q} \ll N^{\gamma-2k \log 2},$$

$$u'_{x}(N, x) \ll N^{\gamma+1} x^{N} (1 - x^{p})^{q-1} \ll N^{\gamma+1-2k \log 2},$$

$$u''_{x}(N, x) \ll N^{\gamma+2} x^{N-1} (1 - x^{p})^{q-2} \ll N^{\gamma+2-2k \log 2}.$$

Легко видеть, что если $x = e^{-t}$ и $t \geqslant 4kN^{-1} \log N$, то и для $u(N, x)$, как и для $u'_{x}(N, x)$ и $u''(N, x)$, имеет место оценка (12).

Оба интеграла в (13) не превышают единицы. Поэтому

$$U(N, t) \ll \sum_{r=1}^{\left[\frac{4k \log N}{Nt}\right]} N^{\gamma+1-2k \log 2} + \sum_{r=\left[\frac{4k \log N}{Nt}\right]+1}^{\infty} N^{\gamma+1+k \log 2} e^{-rtN} \ll$$
$$\ll N^{\gamma+1-2k \log 2} \log N + N^{-4k} \ll t^{k}, \tag{14}$$

Таким же путем можно доказать, что для $\frac{\partial u(N,t)}{\partial t}$ при соответствующих значениях t справедливы оценки (11), (12) и (14).

Теперь мы можем построить функцию $f(s)$ вида

$$f(s) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{u dn_{1}(u)}{e^{us} - 1},$$

удовлетворяющую условиям:

а) $f(s) = O(s^k)$; (15)

б) $f'(s) = O(s^k)$; (16)

в) $n_1(u)$ — непрерывная функция, имеющая две производные при всех значениях u, кроме, может быть, целочисленных значений, при которых существуют односторонние производные, причем

$$|n_1'(u)| \ll u^{\gamma-1}, \quad (17)$$

$$n_1''(u) = 0; \quad (18)$$

г) $n_1(u) = \Omega_{\pm}\left(\frac{u^\gamma}{\log u}\right)$. (19)

Пусть функция $P(r)$, $r = 1, 2, \ldots$, будет выбрана так, что

I. $P(1) > L$,

II. $P(r+1) - P(r) > p(r)\{q(r)+1\}$,

где $p(r)$ и $q(r)$ определены соотношениями (9) при $N = P(r)$.

III. Интервал $I(r) = \{e^{-4}P^{-1}(r), \quad 4kP^{-1}(r)\log P(r)\}$ не имеет точек, общих с $I(s)$, $(r, s = 1, 2, \ldots, r \neq s)$.

Определим

$$f(s) = \sum_{r=1}^{\infty} U(P(r), s) = \int_0^\infty \frac{u\,dn_1(u)}{e^{us}-1},$$

где функция $n_1(u)$ на отрезке

$$T_r = \{P(r)+1, \; p(q+1)+P(r)+1\}$$

будет задана формулой

$$n_1(u) = \int_{P(r)+1}^{u} N^{\gamma-1}\left(C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1}(-1)^{k(u)}\, C_q^{k(u)}\, du + C_r.$$

Постоянные C_r следует выбирать так, чтобы функция $n_1(u)$ была непрерывной от 0 до ∞ и постоянной вне интервалов T_r.

Каждое s принадлежит лишь одному интервалу $I(r)$. Следовательно, для всех r, кроме, может быть, одного, $U(P(r), s)$ удовлетворяет неравенствам (11) и (12).

Поэтому

$$f(s) = \sum_{r=1}^{\infty} U(P(r), s) \ll s^k\left(1 + \sum_r \frac{1}{P^{2k}(r)}\right) \ll s^k.$$

Такая же оценка получается и для $f'(s)$.

Способ построения примера обеспечивает, очевидно, выполнение условий (17) и (18). Наконец, если взять

$$u = P(r) + p(r)\left[\frac{1}{2}q(r)\right], \quad r = 1, 2, \ldots,$$

то тогда

$$n_1(u+p) - n_1(u) = \pm N^{\gamma-1}\left(C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]}\right)^{-1} p\, C^q_{\left[\frac{q}{2}\right]} = \pm N^{\gamma-1}p.$$

Отсюда следует выполнение условия (19).

Теперь уже легко построить нужный нам пример.

Для последовательности

$$1^s,\ 2^s,\ \ldots,\ r^s,\ \ldots,$$

где s — любое положительное число, имеет место асимптотическая формула

$$p(N) \sim (2\pi)^{-\frac{s+1}{2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}}\, dN^{\frac{1}{s+1}-\frac{3}{2}} e^{s+1\ dN^{\frac{1}{s+1}}}, \qquad (20)$$

где

$$p(N) = q(N) - q(N-1).$$

Эта формула является частным случаем общей асимптотической формулы, полученной в работе ([4]):

$$p(N) \sim \frac{e^E}{\sqrt{2\pi\sigma I}}\, e^{T_1}, \qquad (21)$$

где

$$T_1 = N\sigma - \int_1^\infty \log\left(1 - e^{-\sigma a_z}\right) dz,$$

σ определяется равенством

$$N = \int_1^\infty \frac{a_z dz}{e^{\sigma a_z} - 1}, \qquad (22)$$

$$I = -\frac{\partial N}{\partial \sigma}$$

и

$$E = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_1^x \log a_z dz - \sum_1^{x-1} \log a_r - \frac{1}{2}\log a_x\right\}.$$

Функция a_r, из которой при целочисленных значениях аргумента и получается последовательность (1), должна была удовлетворять следующим условиям:

(I)
$$\frac{1}{a_r}\frac{da_r}{dr} < \frac{C_1}{r^{1-\alpha}}, \quad \alpha < \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{a_r}\frac{d^2a_r}{dr^2} < \frac{C_2}{r^{2-\beta}}, \quad \beta < 1;$$

(II)
$$\frac{a_z}{a_r} > \varphi\left(\frac{z}{r}\right)\log\frac{z}{r}$$

при $z > r$, где $\varphi(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$.

Легко убедиться, что условие (I) можно заменить следующим условием, наложенным на последовательность (1):

(I a)
$$a_{r+1} < \left(1 + \frac{C_1}{r^{1-\alpha}}\right) a_r, \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

В самом деле, если по заданной последовательности (1) определить функцию a_r, считая ее линейной в каждом промежутке $(r, r+1)$ и непрерывной, то функция a_r удовлетворяет условию (I) при всех значе-

ниях r, кроме, может быть, целочисленных, при которых, однако, имеются односторонние производные, также удовлетворяющие условию (I). Легко убедиться, что при этих условиях для a_r доказательство асимптотической формулы для $p(N)$ совершенно не меняется.

Для построения последовательности, которая сильно отличалась бы от $a_r = r^s$, но для которой имела бы место формула (20), определяющая $p(N)$, используем функции $f(\sigma)$ и $n_1(u)$, построенные выше.

Пусть функция a_{2r} будет обратной для функции

$$n_2(u) = n(u) + Dn_1(u),$$

где $n(u) = u^{\frac{1}{s}}$, D — положительная постоянная, выбранная настолько малой, чтобы $n_2(u)$ была возрастающей функцией и для a_{2r} выполнялись бы условия (I a) и (II).

Докажем, что асимптотическая формула для $p(N)$ в случае последовательности a_{2r} совпадает с (20) с точностью до постоянного множителя. Все величины, входящие в асимптотическую формулу (21) для a_{2r}, мы будем писать с черточкой наверху ($\bar{p}(N)$, $\bar{T}_1$, $\bar{\sigma}, \bar{I}$).

Соотношение (22) для $a_r = r^s$ можно записать в виде

$$N = \int_1^\infty \frac{u\,du^{\frac{1}{s}}}{e^{\sigma u} - 1},$$

откуда

$$N = \frac{\frac{1}{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\sigma^{\frac{s+1}{s}}} - \frac{1}{\sigma} + O(1). \tag{23}$$

Из (23) следует:

$$\sigma = dN^{-\frac{s}{s+1}} - \frac{s}{s+1}N^{-1} + O\left(N^{-\frac{s+2}{s+1}}\right). \tag{24}$$

Для определения $\bar{p}(N_1)$ мы имеем соотношение:

$$N_1 = \int_1^\infty \frac{u\,dn_2(u)}{e^{\bar{\sigma}u} - 1} = N + f(\bar{\sigma}),$$

если считать $\sigma = \bar{\sigma}$.

Отсюда видно, что и для a_{2r} мы имеем соотношения:

$$N_1 = \frac{\frac{1}{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\bar{\sigma}^{\frac{s+1}{s}}} - \frac{1}{\bar{\sigma}} + O(1),$$

$$\bar{\sigma} = dN_1^{-\frac{s}{s+1}} - \frac{s}{s+1}N_1^{-1} + O\left(N_1^{-\frac{s+2}{s+1}}\right). \tag{25}$$

Если положить $N = N_1$, то из (24) и (25) получим:

$$\sigma(N) - \bar{\sigma}(N) = O\left(N^{-\frac{s+2}{s+1}}\right). \tag{26}$$

Оценим разность $\Delta(N) = T_1 - \overline{T}_1$.

Ввиду того что $\frac{\partial T_1}{\partial N} = \sigma$ и $\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial N} = \overline{\sigma}$, мы имеем $(N_1 < N_2)$:

$$\Delta(N_2) - \Delta(N_1) = \int_{N_1}^{N_2} \frac{d\Delta}{dN} dN = \int_{N_1}^{N_2} (\sigma - \overline{\sigma})\, dN =$$

$$= O\left(\int_{N_1}^{N_2} N^{-\frac{s+2}{s+1}} dN\right) = O\left(N_1^{-\frac{1}{s+1}}\right).$$

Это соотношение показывает, что варианта $\Delta(N)$ удовлетворяет принципу сходимости Коши и, следовательно, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} (T_1 - \overline{T}_1) = M. \tag{27}$$

Оценим разность $I - \overline{I}$. Если $\sigma = \overline{\sigma}$, то из (16) видно, что

$$I(\sigma) - \overline{I}(\sigma) = O(\sigma^k). \tag{28}$$

Ввиду (15), мы имеем [см. ([4])]:

$$I(N) - I(N_1) = O\left(\left|\frac{\partial I}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial N}(N - N_1)\right|\right) = O\left(\frac{N}{\sigma^2}\frac{\sigma}{N}\sigma^k\right) = O(\sigma^{k-1}). \tag{29}$$

Из (28) и (29) выводим:

$$I(N) - \overline{I}(N) = O(\sigma^{k-1}). \tag{30}$$

Из (26), (27) и (30) следует, что

$$\overline{p}(N) \sim C_1 p(N),$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

Просматривая ход доказательства формулы (20) в работе ([4]), легко видеть, что если изменить один член в последовательности (1), например, a_1 на $\overline{a}_1$, то формула для $p(N)$ умножится на $\frac{a_1}{\overline{a}_1}$. Таким образом, меняя только один член последовательности a_{2r}, мы можем добиться того, чтобы

$$\overline{p}(N) \sim p(N) \sim (2\pi)^{-\frac{s+1}{2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}}\, dN^{\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}} e^{(s+1)\, dN^{\frac{1}{s+1}}}.$$

В то же время, ввиду (19), имеем:

$$n_2(u) = u^{\frac{1}{s}} + \Omega_{\pm}\left(\frac{u^{\frac{1}{s}}}{\log u}\right). \tag{31}$$

Суммируя от 1 до N, легко получим:

$$q(N) \sim \overline{q}(N) \sim (2\pi)^{-\frac{s+1}{2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}}\, N^{-\frac{1}{2}} e^{(s+1)\, dN^{\frac{1}{s+1}}}. \tag{32}$$

Соотношения (31) и (32) показывают, что оценку (4) улучшить нельзя.

Наш пример построен для частного вида $q(N)$. Используя формулу (21), можно, по всей вероятности, показать невозможность усиления оценки (4) и для функций $q(u)$ весьма общего вида.

Относительно усиления полученных выше результатов можно высказать следующие предположения. Оценку (4) нельзя усилить, даже если

асимптотическая формула для $q(u)$ будет задана с относительной ошибкой $\frac{1}{u^k}$, где k — любое сколь угодно большое положительное число. Оценка

$$n(u) = Bu^{\beta} + O(u^{\beta_1}), \quad \beta_1 < \beta,$$

получится в том случае, если оценка остаточного члена в формуле для $q(u)$ будет $O(e^{Cu^{\alpha_1}})$ при $\log q(u) \sim Au^{\alpha}$, где $\alpha_1 < \alpha$, а β_1 зависит от α и α_1.

Поступило
15. II. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Постников А. Г., Остаточный член в тауберовой теореме Харди и Литтльвуда, Доклады Ак. наук СССР, т. 77, № 2 (1951), 193—196.

[2] Freud G., Restglied eines Tauberschen Satzes. I, Acta mathem. Acad. scient. Hungaricae, T. II, Fasc. 3—4 (1951), 299—308.

[3] Korevaar J., An estimate of the error in Tauberian theorems for power series, Duke math. Journ., vol. 18, № 3 (1951), 723—734.

[4] Фрейман Г. А., Элементарный метод решения задач о разбиении чисел на неограниченное число слагаемых, Труды Московского математического общества, т. IV (1955), 113—124.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 285—302

Н. К. БАРИ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ДВУХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе дается ответ на следующий вопрос: при каких условиях, наложенных на скорость стремления к нулю наилучших приближений некоторой функции, наилучшие приближения сопряженной функции стремятся к нулю с той же скоростью?

Как известно, если $f(x)$ непрерывна и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то сопряженная функция

$$\overline{f}(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

может быть разрывной. Поэтому если обозначать через $E_n(\Psi)$ наилучшее приближение функции $\Psi_n(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n, то из условия $E_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$ не следует $E_n(\overline{f}) \to 0$. Но даже если $\overline{f}(x)$ непрерывна, возникает вопрос, что можно сказать о скорости, с которой ее наилучшие приближения стремятся к нулю, если это известно для наилучших приближений $f(x)$.

Цель настоящей статьи — дать ответ на этот вопрос, а также сделать выводы, касающиеся модулей непрерывности двух сопряженных функций.

Определение. Условимся говорить, что функция $\varphi(\delta)$, определенная на $0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi$, входит в класс Φ, если $\varphi(\delta)$ монотонно не убывает на $0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi$ и $\varphi(0) = 0$, но $\varphi(\delta) \neq 0$ для $\delta \neq 0$.

Приняв это определение, можем доказать такую теорему:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ. Рассмотрим все непрерывные функции $f(x)$ с периодом 2π, для которых*

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{1}$$

Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{2}$$

то для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (1), *имеем:*

$$E_n(\overline{f}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{3}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \tag{4}$$

сходится, но

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{5}$$

то для всякой $f(x)$, удовлетворяющей (1), сопряженная $\bar{f}(x)$ непрерывна, но можно найти такую $f(x)$, для которой условие (1) справедливо, а для ее сопряженной $\bar{f}(x)$ условие (3) не выполнено.

Наконец, если ряд (4) расходится, то можно найти непрерывную $f(x)$, удовлетворяющую условию (1), но имеющую разрывную сопряженную функцию $\bar{f}(x)$.

Заметим, что если $\varphi(\delta) = \delta^{\alpha}$, где α — любое положительное, то условие (2) выполнено. Поэтому из

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha})$$

следует

$$E_n(\bar{f}) = O(n^{-\alpha}).$$

Этот результат для случая $0 < \alpha < 1$ вытекает непосредственно из теоремы И. И. Привалова ([6]) о функциях, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$, и из теорем С. Н. Бернштейна и Валле-Пуссена, являющихся обращением теорем Джексона. Случай $\alpha = 1$ разобран А. Зигмундом ([7]), доказавшим, что условие

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

влечет условие

$$E_n(\bar{f}) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Для доказательства основной теоремы нам понадобится ряд вспомогательных предложений.

ЛЕММА 1. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$ сходится и его члены стремятся к нулю монотонно, то для любого n*

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+1}n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p}n}\right). \tag{6}$$

Действительно,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{2^{p}n}^{2^{p+1}n-1} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}.$$

Так как члены ряда убывают монотонно, а число членов в каждой

сумме равно $2^p n$, то

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^{p+1}n}\right)}{2^{p+1}n} 2^p n \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right)}{2^p n} 2^p n,$$

откуда и вытекают неравенства (6).

ЛЕММА 2. *Если выполнены условия леммы* 1 *и*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то и

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{7}$$

Действительно, в силу условия леммы, можно найти такую последовательность

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots,$$

что

$$\sum_{k=n_j}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = \mu_j \varphi\left(\frac{1}{n_j}\right), \tag{8}$$

где $\mu_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Но в силу леммы 1 справедливо (6), значит

$$\sum_{k=2n_j}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+1}2n_j}\right) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^p n_j}\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{n_j}\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2n_j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n_j}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} - \varphi\left(\frac{1}{n_j}\right) = \varphi\left(\frac{1}{n_j}\right)\left[\frac{1}{2}\mu_j - 1\right]. \tag{9}$$

Следовательно, в силу (8) и (9),

$$\frac{\sum_{k=2n_j}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}}{\varphi\left(\frac{1}{n_j}\right)} \geqslant \frac{1}{2}\mu_j - 1 \to \infty,$$

т. е. формула (7) доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\varphi(\delta)$ *входит в класс* Φ *и*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} < +\infty,$$

то у любой непрерывной периодической $\Psi(x)$, *для которой*

$$E_n(\Psi) = O\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right], \tag{10}$$

существует непрерывная производная $\psi(x)$; *если же*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то можно утверждать, что

$$E_n(\psi) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{11}$$

Доказательство *. В силу (10), для всякого n найдется тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$, для которого

$$|\Psi(x) - T_n(x)| \leqslant A \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}, \tag{12}$$

где A — постоянное.

Рассмотрим ряд

$$T_n(x) + \sum_{p=0}^{\infty} [T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^p n}(x)]. \tag{13}$$

В силу (12), он сходится равномерно к $\Psi(x)$. Кроме того, имеем:

$$|T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^p n}(x)| \leqslant |T_{2^{p+1}n}(x) - \Psi(x)| + |\Psi(x) - T_{2^p n}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant A \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^{p+1}n}\right)}{2^{p+1}n} + A \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right)}{2^p n} < 2A \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right)}{2^p n}. \tag{14}$$

Так как $T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^p n}(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше, чем $2^{p+1}n$, то по неравенству С. Н. Бернштейна, в силу (14), имеем:

$$|T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}(x)| \leqslant 2^{p+1} nA \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right)}{2^{p-1}n} = 4A\varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right). \tag{15}$$

---

* Доказательство этой теоремы можно было бы получить из теоремы 10 и следствия 10.1 работы С. Б. Стечкина [3]. Действительно, полагая там $r = 1$ (и употребляя обозначения, принятые в моей работе), имеем: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n(\Psi) < +\infty,$$

то $\Psi(x)$ имеет непрерывную производную $\psi(x)$ и

$$E_n(\psi) \leqslant C\left\{(n+1) E_n(\Psi) + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\Psi)\right\}.$$

Отсюда, поскольку

$$E_n(\Psi) = O\left(\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

находим:

$$E_n(\psi) \leqslant C_1\left\{\frac{n+1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\right\} = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Для удобства читателя я предпочла дать полное доказательство теоремы 1 в тексте.

Результат почленного дифференцирования ряда (13) есть ряд

$$T'_n(x) + \sum_{p=0}^{\infty} [T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}(x)]. \tag{16}$$

В силу (15) и (6),

$$\sum_{p=0}^{\infty} |T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}(x)| \leqslant 4A \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^p n}\right) =$$

$$= 4A\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 4A \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+1}n}\right) \leqslant 4A\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 8A \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k},$$

а потому, в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$, обусловленной теоремой 1, имеем:

$$\sum_{p=0}^{\infty} |T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}| \leqslant \varepsilon_n, \tag{17'}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$; если же функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (2), то

$$\sum_{p=0}^{\infty} |T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}(x)| \leqslant B\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{17''}$$

где B — постоянное.

Из (17′) или (17″) следует, что ряд (16) сходится равномерно, причем, будучи результатом почленного дифференцирования (13), он должен сходиться к производной от $\Psi(x)$; значит, $\Psi'(x) = \psi(x)$ непрерывна. Кроме того, поскольку $\psi(x)$ есть сумма ряда (16), из условия (2) следует, в силу (17″), что

$$|\psi(x) - T'_n(x)| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} |T'_{2^{p+1}n}(x) - T'_{2^p n}(x)| \leqslant B\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Так как $T'_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n, то из (18) следует:

$$E_n(\psi) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и теорема доказана.

Замечание 1. Еще Валле-Пуссен доказал [см. ([4]), стр. 53], что если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} < +\infty$$

и $\Psi(x)$ удовлетворяет условию (10), то производная от $\Psi(x)$ существует и непрерывна. Он показал также на примере [см. ([4]), стр. 60], что если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = +\infty,$$

то производная от $\Psi(x)$ может оказаться разрывной. Таким образом в теореме 1 новой является лишь вторая половина. Все же для полноты картины было целесообразно сформулировать результат так, как это было сделано. К тому же и доказательство теоремы Валле-Пуссена получается в процессе доказательства второй половины теоремы 1.

Замечание 2. Можно показать на примере (хотя в дальнейшем это нам не понадобится), что условие

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{2}$$

является и необходимым для того, чтобы из

$$E_n(\Psi) = O\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right] \tag{10}$$

вытекало

$$E_n(\Psi') = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{11}$$

Другими словами, если

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то можно найти такую $\Psi(x)$, удовлетворяющую условию (10), для которой существует непрерывная производная $\Psi'(x)$, но для этой $\Psi'(x)$ условие (11) уже не выполнено. За такую функцию $\Psi(x)$ можно принять

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2} \sin kx$$

Доказательство того, что она удовлетворяет требуемым условиям, будет дано ниже.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ и*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{2}$$

то для любой непрерывной $f(x)$, для которой

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{1}$$

ее сопряженная $\bar{f}(x)$ удовлетворяет тому же условию, т. е.

$$E_n(\bar{f}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{3}$$

Доказательство. В силу (1), для всякого n найдется такой тригонометрический полином $t_n(x)$ порядка не выше n, что

$$|f(x)-t_n(x)|\leqslant A\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{19}$$

где A — постоянное.

Не нарушая общности, можно считать, что $f(x)$ и $t_n(x)$ не имеют свободных членов. Обозначая через $F(x)$ и $T_n(x)$ примитивные для $f(x)$ и $t_n(x)$, а через $\overline{F}(x)$ и $\overline{T}_n(x)$ — сопряженные к ним функции, в силу (19) имеем:

$$|F'(x)-T'_n(x)|\leqslant A\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

а потому по теореме *, доказанной Фаваром ([1]) и одновременно Ахиезером и Крейном ([2]) [см. также Зигмунд ([3])], найдется такой тригонометрический полином $\tau_n(x)$ порядка не выше n, что

$$|\overline{F}(x)-\overline{T}_n(x)-\tau_n(x)|\leqslant\frac{AB\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}, \tag{20}$$

где B — абсолютная константа. Но $\overline{T}_n(x)+\tau_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n, а потому из (20) следует:

$$E_n(\overline{F})=O\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right]. \tag{21}$$

Но, на основании теоремы 1, из (21) и из условия теоремы 2 получаем:

$$E_n(\overline{F'})=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

а так как $\overline{F'}(x)=\overline{f}(x)$, то тем самым теорема 2 доказана**.

Из теоремы 2 следует, что первая часть утверждения, высказанного в основной теореме, уже доказана. Нам остается изучить, что происходит, если

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

или если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$ расходится.

---

* Упомянутая теорема формулируется так: если $g(x)$ — периодическая и $|g'(x)|\leqslant M$, а $\overline{g}(x)$ — сопряженная к $g(x)$, то для всякого n найдется такой тригонометрический полином порядка не выше n, для которого

$$|\overline{g}(x)-\tau_n(x)|\leqslant B\frac{M}{n},$$

где B — абсолютная константа.

** В беседе с С. Б. Стечкиным, где я сообщила ему формулировку теоремы 2, он отметил, что этот результат можно было бы вывести из неравенства

$$E_n(\overline{f})\leqslant C\left\{E_n(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(f)\right\},$$

которое он умеет доказать; доказательство должно появиться в его работе о сопряженных функциях.

С этой целью докажем сначала теорему, которая будет полезна в обоих этих случаях.

ТЕОРЕМА 3. *Если* a_n *монотонно убывают и стремятся к нулю, то для функции* $G(x)$, *определяемой рядом*

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nx, \tag{22}$$

имеем:

$$E_n(G)=O(a_n).$$

Заметим, прежде всего, что в силу монотонности a_n ряд (22) сходится в каждой точке. Как известно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant M \quad (n=1,2,\ldots;\ -\infty<x<+\infty),$$

где M — абсолютная константа. Поэтому, применяя преобразование Абеля, что законно, так как

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\sin jx}{j}a_m\right|\leqslant Ma_m\to 0 \text{ при } m\to\infty,$$

находим:

$$\left|G(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sin kx\right|=\left|\sum_{k+1}^{\infty}a_k\frac{\sin kx}{k}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin jx}{j}-a_{n+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin jx}{j}\right|\leqslant$$

$$\leqslant Ma_{n+1}+Ma_{n+1}=O(a_n),$$

а потому

$$E_n(G)=O(a_n),$$

что и завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\varphi(\delta)$ *входит в класс* Φ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}<+\infty$, *но*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{5}$$

то можно так подобрать непрерывную $f(x)$, *что*

$$E_n(f)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{1}$$

и сопряженная $\bar{f}(x)$ *непрерывна, но*

$$E_n(\bar{f})\neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{23}$$

В самом деле, если положить

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\sin kx, \tag{22}$$

$$\bar{f}(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \cos kx, \tag{24}$$

то оба ряда (22) и (24) сходятся равномерно, значит, $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ непрерывны. В силу теоремы 3, условие (1) выполнено. Остается доказать формулу (23).

Покажем, прежде всего, что

$$E_n(\bar{f}) > \frac{1}{4} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}. \tag{25}$$

Действительно, по известной теореме Валле-Пуссена [см. ([4])], если $f(x)$ изображается всюду сходящимся к ней рядом Фурье, то, обозначая через $S_n(x)$ частные суммы этого ряда, для любого p и $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ имеем:

$$\left|\bar{f}(x) - \frac{S_n(x) + \cdots + S_{n+p-1}(x)}{p}\right| < 2\frac{n+p}{p} E_n(\bar{f}),$$

и, в частности, для $p = n$ имеем при всех x:

$$E_n(\bar{f}) > \frac{1}{4}\left|\bar{f}(x) - \frac{S_n(x) + \cdots + S_{2n-1}(x)}{n}\right|.$$

Полагая

$$R_n(x) = \bar{f}(x) - S_n(x)$$

и замечая, что при $x = 0$ все $R_n(0)$ имеют один знак для $n = 0,1,2,\ldots$ и

$$|R_n(0)| = \sum_{=n+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k},$$

находим, в силу монотонного убывания $|R_n(0)|$:

$$E_n(\bar{f}) > \frac{1}{4}\left|\frac{R_n(0) + \cdots + R_{2n-1}(0)}{n}\right| >$$

$$> \frac{1}{4}\left|R_{2n-1}(0)\right| = \frac{1}{4} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}. \tag{26}$$

Итак, формула (25) доказана.

Обратимся теперь к лемме 2. На основании этой леммы, из условия теоремы, т. е. из выполнения (5), следует (7), значит,

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{27}$$

Сопоставляя (27) и (26), мы видим, что (23) имеет место, т. е. теорема 4 доказана.

Замечание. Теперь мы можем доказать утверждение, высказанное в замечании к теореме 1. Действительно, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Пусть, далее,

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2}\sin kx.$$

Тогда, полагая

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\cos kx,$$

мы видим, что $\psi(x)$ непрерывна и $\Psi'(x) = \psi(x)$. На основании теоремы 3, полагая $a_k = \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$, выводим:

$$E_n(\Psi) = O\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right].$$

С другой стороны, $\psi(x) = -\bar{f}(x)$, где $\bar{f}(x)$ определена формулой (24), а так как при

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

справедливо

$$E_n(\bar{f}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то значит и

$$E_n(\psi) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и доказательство закончено.

ТЕОРЕМА 5. *Если $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ, но ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$$

расходится, то можно найти непрерывную $f(x)$, для которой

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

но ее сопряженная $\bar{f}(x)$ разрывна.

Чтобы убедиться в этом, достаточно снова обратиться к рядам (22)

и (24). В силу монотонности $\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$, они сходятся равномерно во всяком интервале $(-\delta,\ 2\pi-\delta)$, где $\delta>0$, но, кроме того, для $f(x)$, определяемой рядом (22), в силу теоремы 3 условие (1) выполнено. Что же касается функции $\bar{f}(x)$, то она, как легко видеть, разрывна при $x=0$. Тем самым теорема 5 доказана.

Соединяя теоремы 2, 4 и 5, мы видим, что основная теорема доказана полностью.

Таким образом *условие*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k}=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{2}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы для любой $f(x)$ *из*

$$E_n(f)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

следовало

$$E_n(\bar{f})=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Покажем, что условие (2) можно высказать и в другой форме, пользуясь следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 6. *Если* $\varphi(\delta)$ *входит в класс* Φ, *то условие* (2) *эквивалентно утверждению: существует константа* $C>1$ *такая, что*

$$\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}>1.$$

Для доказательства этой теоремы установим предварительно справедливость одной леммы, касающейся числовых рядов.

ЛЕММА 3. *Пусть члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *монотонно убывают и стремятся к нулю. Для того чтобы*

$$\sum_{k=n}^{\infty}u_k=O(u_n), \tag{28}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое θ, $0<\theta<1$, *и такое целое* l, *что*

$$u_{n+l}\leqslant\theta u_n \quad (n=1,2,\ldots). \tag{29}$$

Условие необходимо. Возьмем любое θ, $0<\theta<1$. В силу (28),

$$\sum_{k=n}^{\infty}u_k\leqslant Au_n \quad (A>1). \tag{30}$$

Положим

$$l=\left[\frac{A}{\theta}\right]. \tag{31}$$

Тогда, в силу (30), будем иметь:

$$(l+1)\,u_{n+l} \leqslant \sum_{k=n}^{n+l} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} u_k \leqslant A u_n,$$

откуда, в силу (31),

$$u_{n+l} \leqslant \frac{A}{l+1} u_n \leqslant \theta u_n.$$

Таким образом необходимость (29) доказана.

Условие достаточно. В самом деле, если (29) выполнено для некоторого $\theta < 1$ и целого l, то

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+l-1} + u_{n+l} + u_{n+l+1} + \ldots + u_{n+2l-1} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant l u_n + l u_{n+l} + l u_{n+2l} + \ldots \leqslant l\,(u_n + \theta u_n + \theta^2 u_n + \ldots) = l u_n \frac{1}{1-\theta},$$

откуда

$$R_n = O(u_n)$$

и, значит, (28) имеет место. Лемма 3 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 6. Сказать, что (2) выполнено, это значит сказать, что найдется такое постоянное A, для которого

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} < A\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{32}$$

В силу леммы 1, из (32) следует:

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+1} n}\right) < A\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда, полагая $n = 2^s$, найдем:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+s+1}}\right) < 2A\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{p+s}}\right) < (2A+1)\,\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)\right],$$

т. е., полагая

$$u_k = \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right), \tag{33}$$

имеем:

$$\sum_{k=s}^{\infty} u_k = O(u_s). \tag{34}$$

Итак, если (2) выполнено, то для чисел u_k, определяемых (33), справедливо (34). Но и наоборот, если (34) имеет место, то

$$\sum_{k=s}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right)\right]. \tag{35}$$

Для любого n можно подобрать s так, чтобы

$$2^s \leqslant n < 2^{s+1}. \tag{36}$$

Тогда, в силу леммы 1 и условий (35), (36), имеем:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = \sum_{n}^{2^{s+1}-1} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} + \sum_{k=2^{s+1}}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}(2^{s+1}-n) + \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^p 2^{s+1}}\right) \leqslant 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + O\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{s+1}}\right)\right] = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

т. е. мы убедились, что условие (34) влечет условие (2).

Итак, если (33) имеет место, то (2) и (34) эквивалентны.

Но, в силу леммы 3, условие (34) эквивалентно существованию такого $\theta < 1$ и такого l, что имеет место (29); значит, (2) эквивалентно утверждению: найдется целое l такое, что

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+l}}\right) \leqslant \theta\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \theta < 1). \tag{37}$$

Остается доказать, что (37) влечет существование такого $C > 1$, для которого

$$\varliminf_{\delta \to +0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} > 1, \tag{38}$$

и, наоборот, что (38) влечет (37).

Действительно, пусть (37) имеет место. Положим

$$C = 2^{l+1},$$

и пусть δ — любое, лишь бы $\delta < \frac{1}{2^l}$. Найдем такое n, чтобы

$$\frac{1}{2^{n+l+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{2^{n+l}}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} > \frac{\varphi\left(\frac{2^{l+1}}{2^{n+l+1}}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2^{n+l}}\right)} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2^{n+l}}\right)} \geqslant \frac{1}{\theta} > 1,$$

в силу (37). Итак,

$$\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \geqslant \frac{1}{\theta} > 1$$

для любого $\delta < \frac{1}{2^l}$, т. е. (38) имеет место.

Обратно, если (38) имеет место для некоторого $C>1$, то подавно оно имеет место, если C увеличить. Поэтому, выбрав целое l так, чтобы

$$2^{l-1} \leqslant C < 2^l,$$

находим:

$$\frac{\varphi(2^l\delta)}{\varphi(\delta)} > q > 1$$

для всех достаточно малых δ.

Полагая $\theta = \frac{1}{q}$, имеем: $\theta < 1$ и

$$\varphi(\delta) < \theta\varphi(2^l\delta)$$

для всех достаточно малых δ. Значит, в частности, для $\delta = \frac{1}{2^{n+l}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+l}}\right) < \theta\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

а это и есть условие (37). Теорема 6 доказана полностью.

Объединяя теорему 6 и основную теорему, можно высказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы у всякой функции $f(x)$, для которой*

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

сопряженная $\bar{f}(x)$ также удовлетворяла условию

$$E_n(\bar{f}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

(где $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ), необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $C>1$

$$\varliminf_{\delta \to +0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} > 1. \tag{38}$$

Замечание 1. Зигмунд (3) доказал*, что если $p \geqslant 1$ и для некоторой $g(x)$ выполняется условие:

$$\| g(x+h) - g(x) \|_{L^p} \leqslant M\,|h|$$

(M — постоянное), то

$$\| \bar{g}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(x) \|_{L^p} \leqslant \frac{BM}{n},$$

где $\bar{g}(x)$ — сопряженная к $g(x)$, $\bar{\sigma}_{n-1}(x)$ — фейеровская сумма порядка $n-1$ для ее ряда Фурье, а B — абсолютная константа.

Опираясь на эту теорему и почти дословно повторяя доказательство теорем 1 и 2, приходим к выводу, что *если $p \geqslant 1$, а $\varphi(\delta)$ входит в класс*

* Доказательство можно найти также у Ахиезера [см. (9), стр. 215].

Φ *и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

или, что то же самое, условию

$$\varliminf_{\delta \to +0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} > 1$$

для некоторого $C > 1$, *то из*

$$E_n^p(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

следует

$$E_n^p(\bar{f}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Здесь через $E_n^p(\psi)$ обозначается наилучшее приближение некоторой функции $\psi(x)$ в метрике пространства L^p.

Однако для $p > 1$ этот результат не интересен, так как из теоремы М. Рисса, согласно которой

$$\| f \|_{L^p} \leqslant A_p \| \bar{f} \|_{L^p},$$

для любой $\varphi(\delta)$ следует: если $E_n^p(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, то

$$E_n^p(\bar{f}) \leqslant A_p\, E_n^p(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Таким образом, высказывать теорему имеет смысл лишь для пространства L. Является ли условие (38) в этом случае и необходимым (как это было в случае пространства C), я не знаю.

Замечание 2. Полученный здесь результат позволяет сделать выводы, касающиеся модулей непрерывности данной и сопряженной функций.

Прежде всего напомним две теоремы С. М. Лозинского [см. ([5])] (мы сформулируем их в принятой уже здесь терминологии и обозначениях).

ТЕОРЕМА ЛОЗИНСКОГО 1. Пусть $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ, k — натуральное и найдется такое $C > 1$, что

$$\varlimsup_{\delta \to +0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < C^k. \tag{1.1}$$

Тогда, для того чтобы у функции $f(x)$ модуль непрерывности порядка k удовлетворял условию

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)], \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{1.3}$$

Если же числа $C>1$, удовлетворяющего (1.1), не существует, то найдется непрерывная $f(x)$, для которой (1.3) имеет место, а (1.2) не выполнено.

ТЕОРЕМА ЛОЗИНСКОГО 2. Пусть k и r — натуральные, $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ и существует $C>1$ такое, что

$$1<\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\varlimsup_{\delta\to+0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}<C^k. \tag{2.1}$$

Тогда, для того чтобы

$$\omega_k(f^{(r)},\delta)=O[\varphi(\delta)], \tag{2.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)=O\left[\frac{1}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{2.3}$$

Если же числа $C>1$, удовлетворяющего (2.1), не существует, то найдется $f(x)$, у которой $f^{(r)}(x)$ непрерывна и (2.3) выполнено, но (2.2) не имеет места.

Мне не понадобятся эти теоремы полностью, но я привожу их потому, что чтение работы С. М. Лозинского навело меня на мысль ввести в рассмотрение условие (38), фигурирующее в теореме 7; кроме того, «положительная» часть теоремы 1 Лозинского мною будет сейчас использована.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\varphi(\delta)$ входит в класс Φ и для некоторого натурального k найдется $C>1$ такое, что*

$$1<\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\varlimsup_{\delta\to+0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}<C^k. \tag{39}$$

Тогда если для некоторой непрерывной периодической $f(x)$ имеем

$$\omega_k(\delta,f)=O[\varphi(\delta)], \tag{40}$$

то для сопряженной с ней $\bar f(x)$ имеем также:

$$\omega_k(\delta,\bar f)=O[\varphi(\delta)]. \tag{41}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 Лозинского, из (39) вытекает, что (40) влечет за собой

$$E_n(f)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{42}$$

Но в силу теоремы 7, из (39) и (42) следует:

$$E_n(\bar f)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

откуда, снова в силу теоремы 1 Лозинского, выводим:

$$\omega_k(\delta,\bar f)=O[\varphi(\delta)],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Полагая $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$, где $0<\alpha<1$, мы видим, что для $k=1$ и для любого $C>1$ условие (39) удовлетворено. Поэтому из

$$\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$$

следует

$$\omega(\delta, \bar{f})=O(\delta^\alpha).$$

Это есть известная теорема И. И. Привалова [см. (6)] о функциях, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, $0<\alpha<1$. Если $\alpha=1$, то условие (39) не имеет места при $k=1$, и это вполне понятно, так как известно, что теорема И. И. Привалова для $\alpha=1$ уже не верна. Однако при $\alpha=1$ и $k=2$ условие (39) имеет место, значит, из

$$\omega_2(\delta, f)=O(\delta)$$

следует

$$\omega_2(\delta, \bar{f})=O(\delta).$$

Этот результат принадлежит Зигмунду [см. (7)].

Но и при любом $\alpha>0$ условие (39) выполнено для $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$, если $k>\alpha$, а потому

$$\omega_k(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$$

влечет

$$\omega_k(\delta, \bar{f})=O(\delta^\alpha), \text{ если } k>\alpha.$$

Замечание. Весьма возможно, что условия теоремы 8 являются и необходимыми, т. е. если для заданного k не существует такого $C>1$, для которого (39) имеет место, то найдутся такие $f(x)$ и $\bar{f}(x)$, для которых (40) верно, а (41) не выполнено. Однако мне этого пока не удалось доказать. К сожалению, теоремы С. М. Лозинского, так же как и примеры, подтверждающие необходимость его условий, до сих пор остаются лишь опубликованными в «Докладах Ак. наук СССР» без доказательств. Весьма возможно, что эти примеры послужили бы к подтверждению гипотезы о необходимости условий теоремы 8, но я их не умею построить. Положительную часть теорем С. М. Лозинского мне удалось восстановить и воспользоваться ею для получения теорем, касающихся наилучшего приближения функции с периодом 2π на отрезке $[a, b]$ длины, меньшей, чем 2π [см. (10)].

Я позволяю себе обратить внимание читателя на эту работу, так как ее тематика тесно связана с содержанием настоящей статьи.

Поступило
15. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

1 Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. des Sciences Mathématiques, LXI (1937), 209—224, 243—256.

2 Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, т. 15 (1937), 107—112.

[3] Zygmund A., On the degree of approximation of functions by Fejer means, Bull. Amer. Math. Soc., t. 51 (1945), 274—278.

[4] Vallée-Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

[5] Лозинский С. М., Обращение теорем Джексона, Доклады Ак. наук СССР, т. 83, № 5 (1952), 645—648.

[6] Привалов И. И., Sur les fonctions conjuguées, Bull. de la Soc. Math. de France, 44 (1916), 100—103 (см. также А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М.— Л. (1939), стр. 158).

[7] Zygmund A., Smooth functions, Duke mathematical Journal, vol. 12 (1945), 47—76.

[8] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.

[9] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.— Л., 1947.

[10] Бари Н. К., О локальном наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами, Ученые записки МГУ, Математика, т. VIII, 1955.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 303—318

Э. АПАРИСИО БЕРНАРДО

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ МНОГОЧЛЕНАМИ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе доказано, что всякая функция класса L_2 может быть в среднем приближена на отрезке $[a, b]$, $b-a<4$, многочленами с целыми коэффициентами.

§ 1

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к многочленам и квазимногочленам с целыми коэффициентами и исследуется задача приближения функций в среднем многочленами с целыми коэффициентами.

Основным результатом работы является доказательство возможности приближения в среднем функций класса L_2 многочленами с целыми коэффициентами на отрезке длины меньше четырех.

1. Пусть на отрезке $[0, \lambda]$ задана линейно-независимая система функций

$$\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x), \ldots$$

класса L_2, а $U(x) \geqslant 0$ — функция того же класса; мы предположим, что $U(x)=0$ разве лишь на множестве меры, равной нулю.

ТЕОРЕМА. *Для любого натурального n существует многочлен с целыми коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$ вида:*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k(x) \tag{1}$$

такой, что

$$\int_0^\lambda U(x)\, P_n^2(x)\, dx \leqslant n \Delta_n^{\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{ik} = \int_0^\lambda U(x)\, \psi_i(x)\, \psi_k(x)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно общей теории ортогональных многочленов [см. ([1])], система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k} \\ \psi_1(x) & \ldots & \psi_k(x) \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

является ортонормированной системой веса $U(x)$, т. е.

$$\delta_{kq} = \int_0^\lambda U(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_q(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq q, \\ 1, & \text{если } k = q. \end{cases} \tag{5}$$

При этом если

$$\varphi_k(x) = \beta_{kk}\,\psi_k(x) + \beta_{k-1,\,k}\,\psi_{k-1}(x) + \cdots + \beta_{1k}\,\psi_1(x) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

есть разложение функции $\varphi_k(x)$ по системе функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., то коэффициент β_{kk} вычисляется по формуле

$$\beta_{kk} = \sqrt{\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}}\,. \tag{7}$$

С другой стороны, разлагая $\psi_m(x)$ по функциям ортогональной системы (4), мы из (6) найдем:

$$\psi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} b_{m,s}\,\varphi_s(x), \tag{8}$$

где

$$b_{mm} = \sqrt{\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Для простоты выкладок здесь положено $\Delta_0 = 1$.

Желая оценить интеграл

$$I = \int_0^\lambda U(x)\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\,\psi_k(x)\right)^2 dx \tag{10}$$

при целых значениях X_k, $k = 1, \ldots, n$, заменим каждую из входящих в подинтегральное выражение функций $\psi_k(x)$ своим разложением (8) по функциям ортогональной системы (4); тогда рассматриваемый интеграл примет вид:

$$I = \int_0^\lambda U(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} X_k\,b_{ks}\,\varphi_s(x)\right)^2 dx = \int_0^\lambda U(x)\left(\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=s}^{n} b_{ks}\,X_k\right]\varphi_s(x)\right)^2 dx, \tag{11}$$

откуда заключаем, что

$$I = \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=s}^{n} b_{ks}\,X_k\right]^2. \tag{12}$$

Согласно теореме Минковского о линейных формах, существует нетривиальная система целых чисел $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющая системе неравенств:

$$\left|\sum_{k=s}^{n} b_{ks}\,X_k\right| \leqslant \Delta^{\frac{1}{n}} \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где Δ — определитель системы форм, входящих под знак модуля в левой части (13). Учитывая (9), мы можем этот определитель выразить через определитель (3) заданной системы так:

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} b_{kk} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\cdots\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} = \sqrt{\Delta_n}. \tag{14}$$

Если $X_1, \ldots, X_n$ — целые числа, полученные из теоремы Минковского, то интеграл (10) оценивается согласно (12), (13) и (14) следующим образом:

$$I \leqslant \sum_{s=1}^{n} \Delta^{\frac{2}{n}} = n\Delta_n^{\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема без труда обобщается на случай многочленов от нескольких переменных.

В метрике C приведенная теорема была доказана И. Н. Сановым ([7]).

2. В 1894 году Д. Гильбертом ([2]) было доказано, что задача определения многочлена с целыми коэффициентами

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{16}$$

допускающего на отрезке $[\alpha, \beta]$ наперед заданное средне-квадратическое уклонение $\varepsilon < 1$, разрешима, если $\beta - \alpha < 4$. Следующая теорема показывает, что эта задача разрешима и для отрезков длины больше четырех, если рассматривать многочлены несколько иного вида.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ — *монотонная последовательность действительных чисел. Положим* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. *Если* $\frac{S_n}{\lambda_n^2} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda > 0$ *можно найти многочлен с целыми коэффициентами вида*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{\lambda_k} \tag{17}$$

такой, что

$$\int_0^{\lambda} P_n^2(x)\, dx < \varepsilon. \tag{18}$$

Доказательство. Применяя предыдущую теорему к системе функций

$$\psi_k(x) = x^{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

мы получим, что для веса $U(x) \equiv 1$ существует многочлен с целыми коэффициентами вида (17), для которого

$$\int_0^{\lambda} P_n^2(x)\, dx \leqslant n\Delta_n^{\frac{1}{n}}, \tag{19}$$

где Δ_n имеет вид:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^{1+\lambda_1+\lambda_1}}{1+\lambda_1+\lambda_1} & \ldots & \frac{\lambda^{1+\lambda_1+\lambda_n}}{1+\lambda_1+\lambda_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\lambda^{1+\lambda_n+\lambda_1}}{1+\lambda_n+\lambda_1} & \ldots & \frac{\lambda^{1+\lambda_n+\lambda_n}}{1+\lambda_n+\lambda_n} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Элементарные преобразования показывают, что указанный определитель

можно представить так:

$$\Delta_n = \frac{\lambda^{2\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k + n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+2\lambda_k)} \cdot \prod_{k>s}\left(\frac{\lambda_k - \lambda_s}{1+\lambda_k+\lambda_s}\right)^2. \tag{21}$$

Поэтому, обозначая интеграл, стоящий в левой части неравенства (19), через I_n и используя очевидное неравенство

$$\frac{1+\lambda_k+\lambda_s}{\lambda_k-\lambda_s} = \frac{1}{1-\dfrac{2\lambda_s+1}{1+\lambda_k+\lambda_s}} > e^{\frac{1+2\lambda_s}{1+\lambda_k+\lambda_s}}, \tag{22}$$

найдем, что

$$I_n \leqslant n\lambda e^{\frac{2}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k \lg\lambda - \sum\limits_{k=2}^{n}\sum\limits_{k>s}\frac{1+2\lambda_s}{1+\lambda_k+\lambda_s}\right)}. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что если $s<k$, то

$$\frac{1+2\lambda_s}{1+\lambda_k+\lambda_s} \geqslant \frac{\lambda_s}{\lambda_k}, \tag{24}$$

а потому неравенство (23) только усилится, если заменить $\frac{1+2\lambda_s}{1+\lambda_k+\lambda_s}$ на $\frac{\lambda_s}{\lambda_k}$. Таким путем мы получим, что

$$I_n \leqslant \lambda e^{\frac{2}{n}\left(S_n \lg\lambda + \frac{n\lg n}{2} + n - \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{S_k}{\lambda_k}\right)}. \tag{25}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda_1 \neq 0$, ибо в противном случае

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\lambda_k,$$

а $\lambda_2 \neq 0$, и последующие вычисления проводились бы совершенно аналогично, с тем только различием, что в соответствующих местах фигурировало бы $n-1$ вместо n и λ_2 вместо λ_1, что не умаляет общности рассуждений и не влияет на окончательный результат. Итак, пусть $\lambda_1 \neq 0$; покажем, что сумма

$$A = \sum_{k=2}^{n}\frac{S_k}{\lambda_k} \tag{26}$$

растет быстрее, чем $n\lg n$.

Отметим, что в условиях нашей теоремы

$$\sqrt{S_n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\sqrt{S_k}} = o(n) \tag{27}$$

и потому

$$S_n = o(n^2) < Cn^2 \tag{28}$$

при некотором $C > 1$.

Представим сумму (26) в виде

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1 - x_{k-1}}, \tag{29}$$

где

$$x_{k-1} = \frac{S_{k-1}}{S_k}.$$

Величины $x_1, \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют условию

$$x_1 \ldots x_{n-1} = \frac{\lambda_1}{S_n} = \frac{1}{t}. \tag{30}$$

Применяя метод множителей Лагранжа, найдем, что минимум выражения (29) при условии (30) достигается при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = t^{-\frac{1}{n-1}}, \tag{31}$$

поэтому

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} \geqslant \frac{n-1}{1 - t^{-\frac{1}{n-1}}}. \tag{32}$$

Полагая в неравенстве

$$\lg x \geqslant 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0, \tag{33}$$

$x = t^{\frac{1}{n-1}}$, мы получим возможность усилить неравенство (32), заменяя $1 - t^{-\frac{1}{n-1}}$ через $\lg t^{\frac{1}{n-1}}$. Тогда

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\lg \frac{S_n}{\lambda_1}} > C_1 \frac{n^2}{\lg n} \tag{34}$$

при достаточно большом n, где C_1 — некоторая положительная константа.

Теперь ясно, что

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} - \frac{n \lg n}{2} + n = \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} \left(1 - \frac{n \lg n + n}{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k}} \right) > C_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k} \tag{35}$$

при достаточно большом n, где $0 < C_2 < 1$ — постоянное число.

Неравенство (25) усиливается так:

$$I_n \leqslant \lambda e^{\frac{2}{n}\left(S_n \lg \lambda - C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{S_k}{\lambda_k}\right)}. \tag{36}$$

Покажем теперь, что

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{\lambda_k}\to\infty \tag{37}$$

при $n\to\infty$.

Пусть N — любое положительное число. Возьмем n_0 столь большим, чтобы при $n>n_0$ выполнялось условие

$$S_n > N\lambda_n^2. \tag{38}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{\lambda_k} > \frac{N}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\lambda_k = N - \frac{N}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0}\lambda_k. \tag{39}$$

Возьмем число $n_1>n_0$ столь большим, чтобы при $n>n_1$ было

$$\frac{N}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0}\lambda_k<1; \tag{40}$$

тогда

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{\lambda_k} > N-1 \tag{41}$$

при $n>n_1$, что и доказывает справедливость соотношения (37), ибо число N может быть взято сколь угодно большим. Соотношение (37) показывает, что правая часть (36) стремится к нулю при неограниченном возрастании n, чем и устанавливается справедливость сформулированной теоремы.

§ 2

Приведенная выше теорема Д. Гильберта не имеет места для интервалов длины больше четырех. Действительно, если $P_n(x)$ является многочленом с целыми коэффициентами, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_n^2(x)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)}{2}\int_{-1}^{1} P_n^2\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}z\right)dz \geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2n+1}\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx = \left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^{2n+1}\frac{4\pi n}{2n+1}(1+\gamma_n), \tag{1}$$

где через $L_n(x)$ обозначен многочлен Лагранжа, а $\gamma_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Из этого обстоятельства непосредственно следует

ТЕОРЕМА. *Никакая функция $f(x)$, отличная от многочлена с целыми коэффициентами, не допускает приближения в среднем многочленами с целыми коэффициентами на отрезке длины больше четырех.*

Доказательство. Пусть $\beta-\alpha>4$; предположим от противного, что функция $f(x)$ допускает сколь угодно близкое приближение посредством многочленов с целыми коэффициентами. Тогда при любом $\varepsilon>0$

можно найти многочлены с целыми коэффициентами $P_1(x)$ и $P_2(x)$ такие, что

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-P_1(x))^2\,dx<\frac{\varepsilon}{4} \text{ и } \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-P_2(x))^2\,dx<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{2}$$

причем $P_1(x) \neq P_2(x)$. В таком случае многочлен

$$P(x)=P_1(x)-P_2(x) \tag{3}$$

имеет целые коэффициенты, причем $P_1(x)$ и $P_2(x)$ могут быть выбраны так, чтобы степень многочлена $P(x)$ была как угодно большой.

Легко видеть, что

$$\int_{\alpha}^{\beta}P^2(x)\,dx \leqslant 2\left(\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-P_1(x))^2\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-P_2(x))^2\,dx\right)<\varepsilon, \tag{4}$$

а это противоречит неравенству (1). Теорема доказана.

Вопрос о возможности приближения в среднем функций класса L_2 на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\beta-\alpha<4$, до сих пор оставался открытым. Мы докажем в этом параграфе одну общую теорему, указывающую на возможность приближения в среднем всякой функции класса L_2 посредством многочленов с целыми коэффициентами. Но прежде чем перейти к ее доказательству, приведем одну теорему, доказанную Фекете ([3]) в 1923 г. Эта теорема, имеющая и самостоятельное значение, потребуется нам в дальнейшем для получения одной оценки.

ТЕОРЕМА. *Для любого натурального n существует многочлен с целыми коэффициентами $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, для которого*

$$|P_n(x)| \leqslant 2(n+1)\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \tag{5}$$

для всех $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Доказательство. Наряду с многочленом

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k, \tag{6}$$

заданным на отрезке $[\alpha, \beta]$, рассмотрим многочлен

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}z\right)^k, \tag{7}$$

получаемый из многочлена (6) с линейным преобразованием независимого переменного x по формуле

$$x=\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}z. \tag{8}$$

При изменении x от α до β переменное z будет изменяться от -1 до 1.

Пусть

$$T_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n \arccos z, \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

— многочлены Чебышева. Как известно,

$$\int_{-1}^{1} T_k(z)\, T_m(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k \neq m. \end{cases} \tag{9}$$

Разложим $Q_n(z)$ по этой системе многочленов:

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k T_k(z), \tag{10}$$

где

$$A_k = \int_{-1}^{1} Q_n(z)\, T_k(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}; \tag{11}$$

тогда, очевидно,

$$|Q_n(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{n} |A_k|, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1. \tag{12}$$

Из (7), (9) и (11) мы получим представление

$$A_k = \sum_{m=0}^{n} b_{mk} a_m, \tag{13}$$

где положено:

$$b_{m_k} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} z \right)^m T_k(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{14}$$

Из свойства (9) ортогональности системы чебышевских многочленов немедленно вытекает, что

$$b_{mk} = 0 \quad \text{для} \quad m < k. \tag{15}$$

С другой стороны, для коэффициента b_{kk} мы из (9) и (14) получаем:

$$b_{kk} = \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^k \int_{-1}^{1} z^k T_k(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \tag{16}$$

что легко преобразуется к виду:

$$b_{kk} = \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{k-1} z^k - T_k(z) \right) \frac{T_k(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}} + \\ + \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \int_{-1}^{1} T_k^2(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{17}$$

Отсюда, согласно (9), следует, что

$$b_{kk} = \left(\frac{\beta-\alpha}{4} \right)^k \sqrt{2\pi}. \tag{18}$$

Таким образом, определитель Δ_{n+1} системы линейных форм (13) имеет вид:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} b_{00} \dots b_{0n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b_{n0} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} b_{kk} = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} > 0 . \qquad (19)$$

Согласно вышеуказанной теореме Минковского о линейных формах, существует нетривиальная система целых чисел a_k, $k = 0, \dots, n$, для которых выполнено неравенство

$$\left| \sum_{m=0}^{n} b_{mk} a_m \right| \leqslant \sqrt[n+1]{\Delta_{n+1}} . \qquad (20)$$

Взяв в качестве коэффициентов многочлена (6) целые числа a_m, удовлетворяющие системе неравенства (20), и учитывая (12) и (13), получим, что

$$|Q_n(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \sqrt[n+1]{\Delta_{n+1}}, \qquad -1 \leqslant z \leqslant 1, \qquad (21)$$

а тогда

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \sqrt[n+1]{\Delta_{n+1}}, \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta. \qquad (22)$$

Подставляя значение определителя Δ_{n+1}, полученное в (19), мы найдем, что

$$|P_n(x)| \leqslant 2(n+1) \left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (23)$$

для $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, а это и требовалось доказать.

Если $\beta - \alpha < 4$, то правая часть неравенства (23) стремится к нулю при $n \to \infty$, и мы получаем

Следствие. *Если $\beta - \alpha < 4$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_n(x)$ с целыми коэффициентами такой, что при всех $x \in [\alpha, \beta]$*

$$|P_n(x)| < \varepsilon. \qquad (24)$$

Этот факт не имеет места для отрезков длины четыре, как показывает пример отрезка $[-2, 2]$, указанный С. Н. Бернштейном [см. ([4])], ибо многочлен Чебышева для этого отрезка

$$T_n(x) = 2 \cos n \arccos \frac{x}{2}$$

имеет целые коэффициенты, а его отклонение на этом отрезке равно 2.

Для дальнейшего полезно ввести следующее

Определение. *Многочлен $P_m(x)$ с целыми коэффициентами называется фундаментальным на отрезке $[\alpha, \beta]$, если*

$$0 \leqslant P_m(x) < 1 \qquad (25)$$

для всех $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и если это свойство не выполняется на этом отрезке для многочленов с целыми коэффициентами низших степеней.

Нетрудно заметить, что свойство (25) может выполняться только для конечного числа многочленов с целыми коэффициентами степени $\leqslant n$. Предыдущая теорема показывает существование фундаментальных многочленов для отрезков длины меньше четырех.

Общая теорема теории приближения функций в среднем посредством многочленов с целыми коэффициентами может быть сформулирована так:

ТЕОРЕМА. *Если функция $f(x)$ допускает на отрезке $[\alpha, \beta]$ (где $\beta - \alpha < 4$) сколь угодно близкое приближение в среднем посредством многочленов с действительными коэффициентами, то она допускает сколь угодно близкое приближение в среднем посредством многочленов с целыми коэффициентами; точнее:*

Если μ — наивысшая кратность корней, лежащих на отрезке $[\alpha, \beta]$ фундаментального многочлена $P_m(x)$, то

$$E_n(f) \leqslant E_n^e(f) \leqslant 2E_n(f) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\mu}}}\right), \tag{26}$$

где $E_n(f)$ и $E_n^e(f)$ — наилучшие приближения функции в среднем посредством многочленов, соответственно, с действительными и с целыми коэффициентами.

Доказательство. Пусть $R_m(x)$ — фундаментальный многочлен отрезка $[\alpha, \beta]$. Нетрудно заметить, что $R^l(x)$ при $0 \leqslant l \leqslant q$ однозначным образом представим в виде

$$R^l(x) = \sum_{k=0}^{q} A_{k,l,q} R^{q-k}(x)\left(1 - R(x)\right)^k. \tag{27}$$

Пусть $Q_n(x)$ — тот многочлен с действительными коэффициентами, для которого

$$\int_\alpha^\beta \left(f(x) - Q_n(x)\right)^2 dx = E_n(f). \tag{28}$$

Легко видеть, что любой многочлен однозначным образом разлагается по системе функций

$$1, x, \ldots, x^{m-1}, R(x), xR(x), \ldots, x^{m-1}R(x), R^2(x), \ldots, x^{m-1}R^2(x), \ldots. \tag{29}$$

Разложим $Q_n(x)$ по функциям этой системы:

$$Q_n(x) = \sum_{l=0}^{q} \sum_{k=0}^{m-1} C_{klq} x^k R^l(x), \quad \text{где } q = \left[\frac{n}{m}\right]; \tag{30}$$

тогда, учитывая (27), многочлен $Q_n(x)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{q} c'_{ksq} x^k R^{q-s}(x)\left(1 - R(x)\right)^s, \tag{31}$$

где c'_{ksq} — некоторые постоянные.

Положим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{q} [c'_{ksq}]\, x^k R^{q-s}(x)\left(1 - R(x)\right)^s \tag{32}$$

(квадратные скобки означают, что берется целая часть) и пусть

$$S(x) = Q_n(x) - P_n(x). \tag{33}$$

Легко видеть, что

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - P_n(x))^2\,dx < 2\int_\alpha^\beta (f(x) - Q_n(x))^2\,dx + 2\int_\alpha^\beta S^2(x)\,dx. \tag{34}$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части, через I, так что

$$I = \int_\alpha^\beta S^2(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{q}\{c'_{ksq}\}\,x^k R^{q-s}(x)\left(1 - R(x)\right)^s\right)^2 dx. \tag{35}$$

Прежде всего, имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} I &\leqslant \int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{m-1}|x|^k\right)^2 \left(\sum_{s=0}^{q} R^{q-s}(x)\left(1 - R(x)\right)^s\right)^2 dx \leqslant \\ &\leqslant C_1 \int_\alpha^\beta \left(\sum_{s=0}^{q} R^{q-s}(x)\left(1 - R(x)\right)^s\right)^2 dx, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$C_1 = \max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}\left(\sum_{k=0}^{m-1}|x|^k\right)^2.$$

Возведя подинтегральное выражение в квадрат, мы получаем:

$$\begin{aligned} I &\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{q-1}(k+1)\int_\alpha^\beta R^k(x)\left(1 - R(x)\right)^{2q-k} dx + \\ &+ C_1 \sum_{k=q}^{2q}(2q-k+1)\int_\alpha^\beta R^k(x)\left(1 - R(x)\right)^{2q-k} dx \leqslant \\ &\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{2q-1}(k+1)\int_\alpha^\beta R^k(x)\left(1 - R(x)\right)^{2q-k} dx + C_1\int_\alpha^\beta R^{2q}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Более того, так как $R(x) \leqslant \frac{1}{p}$ при некотором $p > 1$, то

$$I \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{2q-1}\frac{k+1}{p^k}T_k + \frac{C_1(\beta - \alpha)}{p^{2q}}, \tag{38}$$

где положено:

$$T_k = \int_\alpha^\beta \left(1 - R(x)\right)^{2q-k} dx. \tag{39}$$

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — корни многочлена $R(x)$, принадлежащие отрезку $[\alpha, \beta]$, а $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — соответствующие кратности. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, s$ многочлен $R(x)$ представим в виде:

$$R(x) = |x - a_i|^{\mu_i}\,|Q_i(x)|, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{40}$$

где $Q_i(x)$ — многочлен, не обращающийся в нуль в точке a_i. Пусть

$$\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq k} |a_i - a_k|, \quad i, k = 0, \ldots, s+1,$$

— столь малое, что $Q_i(x) \neq 0$ при $|x - a_i| < \delta$, $i = 1, \ldots, s$; тогда

$$\eta = \min_{\substack{|x-a_i| \leq \delta \\ i=1,\ldots,s}} |Q_i(x)| > 0. \tag{41}$$

Здесь для удобства положено $a_0 = \alpha$ и $a_{s+1} = \beta$. Разобьем интеграл T_k на сумму интегралов

$$T_k = \sum_{i=1}^{s} T_{ik} + T'_k, \tag{42}$$

где

$$T_{ik} = \int\limits_{|x-a_i|<\delta} (1 - R(x))^{2q-k}\, dx, \text{ а } T'_k = \int\limits_{\substack{|x-a_i| \geq \delta \\ i=1,\ldots,s \\ x \in [\alpha, \beta]}} (1 - R(x))^{2q-k}\, dx. \tag{43}$$

Последний интеграл оценивается непосредственно:

$$T'_k < \frac{\beta - \alpha}{r^{2q-k}}, \tag{44}$$

где $r > 1$ — число, удовлетворяющее неравенству

$$1 - R(x) < \frac{1}{r}. \tag{45}$$

Что касается интегралов T_{ik}, то их можно оценить так:

$$T_{ik} = \int\limits_{|x-a_i|<\delta} e^{(2q-k)\lg(1-R(x))}\, dx \leqslant \int\limits_{|x-a_i| \leqslant \delta} e^{-(2q-k)R(x)}\, dx. \tag{46}$$

Далее, в силу (40) и (41),

$$T_{ik} \leqslant \int\limits_{|x-a_i|<\delta} e^{-\eta(2q-k)|x-a_i|^{\mu_i}}\, dx; \tag{47}$$

поэтому после элементарных вычислений найдем, что

$$T_{ik} \leqslant \frac{2}{(\eta(2q-k))^{\frac{1}{\mu_i}}} \int_0^\infty e^{-t^{\mu_i}}\, dt = \frac{c''_i}{(2q-k)^{\frac{1}{\mu_i}}}, \tag{48}$$

где c''_i не зависит от q. Соотношения (42), (44) и (48) показывают, что

$$T_k \leqslant \sum_{i=1}^{s} \frac{c''_i}{(2q-k)^{\frac{1}{\mu_i}}} + \frac{\beta - \alpha}{r^{2q-k}}, \tag{49}$$

а потому

$$T_k \leqslant \frac{C_2}{(2q-k)^{\frac{1}{\mu}}} + \frac{\beta - \alpha}{r^{2q-k}}, \tag{50}$$

где $\mu = \max\limits_{i=1,\ldots,s} \mu_i$, а C_2 — некоторая константа.

Для рассматриваемого интеграла I, в силу (38) и (50), получаем:

$$I \leqslant C_3 \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{k+1}{p^k (2q-k)^{\frac{1}{\mu}}} + C_3(\beta-\alpha) \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{k+1}{p^k r^{2q-k}} + \frac{C_1(\beta-\alpha)}{p^{2q}}. \quad (51)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$C_3(\beta-\alpha) \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{k+1}{p^k r^{2q-k}} + \frac{C_1(\beta-\alpha)}{p^{2q}} = o\left(\frac{1}{q}\right). \quad (52)$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{k+1}{p^k (2q-k)^{\frac{1}{\mu}}} < \frac{1}{q^{\frac{1}{\mu}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{p^k} = O\left(\frac{1}{q^{\frac{1}{\mu}}}\right), \quad (53)$$

а

$$\sum_{k=q+1}^{2q-1} \frac{k+1}{p^k (2q-k)^{\frac{1}{\mu}}} < \sum_{k=q+1}^{2q-1} \frac{k+1}{p^k} = o\left(\frac{1}{q}\right); \quad (54)$$

поэтому для интеграла I получаем окончательно:

$$I = O\left(\frac{1}{q^{\frac{1}{\mu}}}\right), \quad (55)$$

и так как $q = \left[\frac{n}{m}\right]$, то

$$I = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\mu}}}\right). \quad (56)$$

Возвращаясь к (34), мы тем самым найдем, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - P_n(x))^2 \, dx \leqslant 2E_n(f) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\mu}}}\right), \quad (57)$$

а это и доказывает нашу теорему, так как неравенство, стоящее в левой части (26), является простым следствием определения $E_n(f)$ и $E_n^e(f)$.

Замечание 1. Приведенная теорема сформулирована и доказана для случая, когда фундаментальный многочлен имеет корни на рассматриваемом отрезке. Однако если фундаментальный многочлен не обращается в нуль на этом отрезке, то интегралы T_k допускают оценки:

$$T_k \leqslant \frac{\beta-\alpha}{r^{2q-k}}, \quad (58)$$

а потому из (38) мы получили бы, что

$$I = p_1^{-\frac{2n}{m}} O(n^2), \quad (59)$$

где

$$\frac{1}{p_1} = \max\left(\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} R(x),\ \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta}(1 - R(x))\right). \tag{60}$$

Поэтому вместо (26) мы получили бы

$$E_n(f) \leqslant E_n^e(f) \leqslant 2E_n(f) + p_1^{-\frac{2n}{m}} O(n^2), \tag{61}$$

причем $p_1 > 1$.

Замечание 2. Число μ, входящее в правую часть неравенства (26), можно заменить через степень фундаментального многочлена, оценка которого сверху во всяком случае, в силу теоремы 3, определяется неравенством

$$4(n+1)^2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^n < 1. \tag{62}$$

Однако оценка получается более точной, если удается фактически найти фундаментальный многочлен. Так, например, $x(1-x)$ является фундаментальным многочленом отрезка $[0,1]$, а потому на этом отрезке имеет место неравенство [см. ([5])]:

$$E_n(f) \leqslant E_n^e(f) \leqslant 2E_n(f) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{63}$$

Аналогично, фундаментальным для отрезка $[-1,1]$ является многочлен $x^2(1-x^2)$ и

$$E_n(f) \leqslant E_n^e(f) \leqslant 2E_n(f) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{64}$$

Последнее неравенство будет справедливым и для отрезка $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, так как фундаментальным многочленом этого отрезка является многочлен

$$(x^2-1)^2 x^2 (2-x^2),$$

для которого $\mu = 2$.

Для отрезка $[\alpha, \beta]$, лежащего внутри $[0,1]$, в силу (61), получаем:

$$E_n(f) \leqslant E_n^e(f) \leqslant 2E_n(f) + p^{-2n} O(n^2), \tag{65}$$

где

$$p = \max(\beta, 1-\alpha),$$

так как для такого отрезка $R(x) = x$.

Замечание 3. Доказанная теорема не имеет места для отрезка длины четыре. Так, например, на отрезке $[-2, 2]$ фундаментального многочлена нет, так как многочлен Чебышева

$$T_k(x) = 2\cos k \arccos\frac{x}{2} \tag{66}$$

имеет целые коэффициенты, а его отклонение равно двум, и теорема оказывается несправедливой. Дело в том, что, как мы сейчас покажем, степень фундаментального многочлена $P_k(x)$ отрезка $[-2+\delta, 2-\delta]$

растет неограниченно при стремлении δ к нулю. Действительно, если корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ многочлена Чебышева (66) лежат на этом отрезке, то при достаточно большом l

$$\left|\sum_{s=1}^{k} \alpha_s^{\mu} P_k^l(\alpha_s)\right| < 1 \quad (\mu = 0, \ldots, k-1). \tag{67}$$

Выражение, стоящее под знаком модуля, является целочисленной симметрической функцией от полной системы целых алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, а потому

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_s^{\mu} P_k^l(\alpha_s) = 0 \quad (\mu = 0, \ldots, k-1). \tag{68}$$

Так как определитель $|\alpha_s^{\mu}|$ системы (68) отличен от нуля, то

$$P_k(\alpha_s) = 0 \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{69}$$

Таким образом, если корни многочлена Чебышева $T_k(x)$ лежат на отрезке $[-2+\delta, 2-\delta]$, то они, в свою очередь, являются корнями фундаментального многочлена. Легко проверить, что последнее обстоятельство будет иметь место во всяком случае, если $\delta < \frac{4}{\pi^2 k^2}$.

Следовательно, фундаментальный многочлен $P_n(x)$ делится на $T_k(x)$ для всех $k = 1, \ldots, N = \left[\frac{2}{\pi\sqrt{\delta}}\right]$.

С другой стороны, число q различных корней совокупности чебышевских многочленов $T_1(x), \ldots, T_N(x)$ равно числу правильных дробей вида

$$\frac{2s+1}{2k}, \quad s = 0, \ldots, k-1; \; k = 1, \ldots, N,$$

или, что то же самое, числу несократимых среди них, так что

$$q = \sum_{k=1}^{N} \varphi(2k), \tag{70}$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Нетрудно показать [см. ([6])], что

$$q = \frac{4}{\pi^2} N^2 + O(N \lg N), \tag{71}$$

откуда вытекает, что

$$q = \frac{16}{\pi^4 \delta} + O\left(\frac{\lg \delta}{\sqrt{\delta}}\right). \tag{72}$$

Таким образом, степень фундаментального многочлена, представляя собой число, не меньшее q, растет неограниченно с уменьшением δ, т. е. с увеличением длины отрезка до четырех.

В заключение я хочу поблагодарить А. О. Гельфонда, ценными советами и указаниями которого я руководствовался при написании этой статьи.

Поступило
16. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

[2] Hilbert D., Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms, Acta Math., 18 (1894), 155—159.

[3] Fekete M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr., 17 (1923), 228—249.

[4] Бернштейн С. Н., Несколько замечаний о многочленах наименьшего уклонения с целыми коэффициентами, Собр. соч., т. 1 (1952), 468—471.

[5] Канторович Л. В., Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами, Известия Ак. наук СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 9 (1931), 1163—1168.

[6] Виноградов И. М., Основы теории чисел, М.—Л., 1949, изд. 5-е.

[7] Санов И. Н., Функции с целочисленными параметрами, наименее уклоняющиеся от нуля, Ученые зап. ЛГУ, № 111 (1949), 32—46.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 319—344

М. С. ПИНСКЕР

ТЕОРИЯ КРИВЫХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СТАЦИОНАРНЫМИ n-МИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В настоящей статье результаты теории стационарных кривых в гильбертовом пространстве обобщаются на более широкий класс кривых со стационарными n-ми приращениями. Подробно изучены кривые со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия.

Введение

В работах А. Н. Колмогорова (4), (5), (6) было показано, что многие результаты теории стационарных случайных процессов и последовательностей, найденные ранее А. Я. Хинчиным (3), Г. Волдом (11) и Г. Крамером (12), могут быть объяснены очень просто, если рассматривать случайный процесс (или последовательность) как кривую (соответственно последовательность) элементов гильбертова пространства H случайных величин с ограниченной дисперсией. Одновременно подобный геометрический подход позволил А. Н. Колмогорову получить целый ряд новых важных результатов, относящихся к теории стационарных и родственных им случайных функций. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В. Н. Засухина (8), М. Г. Крейна (9) и К. Карунена (13), (14).

В настоящей работе обобщаются результаты перечисленных исследований. А именно, вместо стационарных (унитарных) кривых или кривых со стационарными приращениями (спиралей, винтовых линий) гильбертова пространства, изученных в предыдущих работах, мы будем рассматривать более широкий класс кривых со стационарными n-ми приращениями (определение см. в § 1).

Подобные кривые представляют значительный интерес с точки зрения теории вероятностей, так как они описывают важный класс случайных процессов; в последующем, однако, мы не будем специально останавливаться на этой стороне вопроса, а изложим наши результаты непосредственно в терминах теории кривых гильбертова пространства. Теоретико-вероятностные формулировки ряда теорем настоящей статьи, найденные независимо друг от друга автором и А. М. Ягломом, приведены в опубликованных ранее заметках [см. (1), (2)].

Перечислим основные результаты статьи. В § 1 дается определение стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями и решается задача о спектральном представлении таких кривых [см. (1)]. В § 2 вводятся понятия регулярного и сингулярного множеств стацио-

нарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями и доказывается, что в случае произвольного множества каждая из кривых может быть разложена на сумму двух слагаемых так, что первые слагаемые образуют регулярное множество стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями, а вторые — сингулярное множество таких кривых. В этом же параграфе доказывается теорема о возможности представления n-х разностей регулярной кривой в виде одностороннего интеграла по спиралям с однородными и ортогональными приращениями [ср. (2)] и даются многомерные обобщения этой теоремы. В § 3 решается задача о линейном экстраполировании кривой со стационарными n-ми приращениями [ср. (2)]. Наконец, в § 4 изучаются кривые со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия [ср. (2)].

В процессе изложения мы будем широко пользоваться известными фактами спектральной теории однопараметрических групп линейных операторов [(см. (15), (16), (17)].

§ 1. Спектральное представление кривых со стационарными n-ми приращениями

Под «кривой» в гильбертовом пространстве мы будем далее понимать функцию $\xi(t)$, определенную для $-\infty < t < \infty$ со значениями в гильбертовом пространстве H. Введем следующие обозначения для последовательных разностей $\xi(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_\tau \xi(t) = \xi(t) - \xi(t-\tau),\\
&\Delta^{(2)}_{\tau_1\tau_2}\xi(t) = \Delta_{\tau_1}\xi(t) - \Delta_{\tau_1}\xi(t-\tau_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta^{(n)}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n}\xi(t) = \Delta^{(n-1)}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_{n-1}}\xi(t) - \Delta^{(n-1)}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_{n-1}}\xi(t-\tau_n),\\
&\Delta^{(n)}_{\tau}\xi(t) = \Delta^{(n)}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n}\xi(t) \text{ при } \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = \tau,\\
&\Delta^{2n}_{\tau_1\tau_2}\xi(t) = \Delta^{(n)}_{\tau_2}(\Delta^{(n)}_{\tau_1}\xi(t)).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Определение 1.1.

I. Кривые $\xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$, M — произвольное множество) образуют множество M стационарных и стационарно-связанных кривых, если все функции $D_{\alpha\beta}(t) = (\xi_\alpha(t+s), \xi_\beta(s))$, $\alpha, \beta \in M$, не зависят от s и непрерывны по t.

II. Кривая $\xi(t)$ называется кривой со стационарными n-ми приращениями, если функция $D(t, \tau_1, \tau_2) = (\Delta^{(n)}_{\tau_1}\xi(t+s), \Delta^{(n)}_{\tau_2}\xi(s))$ не зависит от s и непрерывна по совокупности аргументов t, τ_1 и τ_2.

III. Кривые $\xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$) образуют множество M стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями, если все функции $D_{\alpha\beta}(t, \tau_1, \tau_2) = (\Delta^{(n)}_{\tau_1}\xi_\alpha(t+s), \Delta^{(n)}_{\tau_2}\xi_\beta(s))$ ($\alpha, \beta \in M$) не зависят от s и непрерывны по совокупности аргументов t, τ_1 и τ_2.

Множество стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями $\xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$) порождает непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов U_t, определенных в пространстве $H^{(0)}$ —

замкнутой линейной оболочке векторов $\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$; $-\infty < t < \infty$), а именно, операторы U_t суть продолжение изометрических операторов T_t, определяемых равенством

$$T_t\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(s) = \Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(t+s)$$

(согласно лемме 1 работы [4], такое продолжение возможно и единственно).

Докажем основные теоремы настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 1.2. *n-е разности $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$ кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями допускают представление**

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^n \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g, \qquad (2)$$

где $g \in H^{(0)}$, $H^{(0)}$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$, $-\infty < t$, $\tau < \infty$, E_λ — разложение единицы, соответствующее однопараметрической группе унитарных операторов U_t, порожденной кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями.

Вектор g определяется представлением (2) однозначно.

Доказательство. По теореме Стона (см. [15], [16)],

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = U_t\,\Delta_\tau^{(n)}\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda\,\Delta_\tau^{(n)}\xi(0), \qquad (3)$$

и поскольку

$$\Delta_{\tau_1\tau_2}^{(2n)}\xi(t) = \Delta_{\tau_2\tau_1}^{(2n)}\xi(t)$$

и

$$\Delta_\tau^{(n)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda g\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^n dE_\lambda g,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau_2\lambda})^n dE_\lambda \Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau_1\lambda})^n dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0). \qquad (4)$$

В силу ортогональности разложения единицы это равенство остается справедливым и при конечных пределах интегрирования, т. е.

$$\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau_2\lambda})^n dE_\lambda \Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(0) = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau_1\lambda})^n dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0). \qquad (5)$$

Кроме того, из (3) видно, что

$$\Delta_\tau^{(n)}(E_{+0}-E_{-0})\xi(t) = (E_{+0}-E_{-0})\,\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = (E_{+0}-E_{-0})\Delta_\tau^{(n)}\xi(0)$$

не зависит от t, а потому непрерывная по τ функция

$$(E_{+0}-E_{-0})\,\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$$

* При $\lambda=0$ значение подинтегральной функции принимается равным пределу, к которому она стремится при $\lambda \to 0$.

есть n-я разность некоторого полинома n-й степени

$$\xi_0^{(0)} + \xi_1^{(0)} t + \cdots + \xi_n^{(0)} t^n$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\tau_1^n}(E_{+0} - E_{-0})\,\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(t) = \frac{1}{\tau_2^n}(E_{+0} - E_{-0})\,\Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(t). \tag{6}$$

Из (5) и (6) видно, что, не нарушая равенства, можно умножить подинтегральные выражения формулы (5) на

$$\frac{\lambda^n}{(1+i\lambda)^n (1-e^{-i\tau_1\lambda})^n (1-e^{-i\tau_2\lambda})^n} \quad \text{при } 0 < \lambda_1 < \min\left\{\frac{1}{|\tau_1|}, \frac{1}{|\tau_2|}\right\}$$

или на

$$\frac{1}{(1-e^{-i\tau_2\lambda})^n} \qquad \text{при } 0 < \lambda_1 < \frac{1}{|\tau_2|},$$

т. е. получить формулы:

$$\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} \frac{\lambda^n}{(1-i\lambda)^n (1-e^{-i\tau_1\lambda})^n}\, dE_\lambda \Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(0) = $$

$$= \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} \frac{\lambda^n}{(1+i\lambda)^n (1-e^{-i\tau_2\lambda})^n}\, dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0), \tag{7}$$

$$\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} dE_\lambda \Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(0) = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} \frac{(1-e^{-i\tau_1\lambda})^n}{(1-e^{-i\tau_2\lambda})^n}\, dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0). \tag{8}$$

Определим функцию $g(\lambda)$ равенством:

$$g(\lambda_1) = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} \frac{\lambda^n}{(1+i\lambda)^n (1-e^{-i\tau_2\lambda})^n}\, dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0), \quad 0 < \lambda_1 < \frac{1}{|\tau_2|}, \tag{9}$$

Формула (7) показывает, что $g(\lambda)$ не зависит от τ_2 и

$$(E_{\lambda_2} - E_{-\lambda_2})\, g(\lambda_1) = g(\lambda_2), \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2. \tag{10}$$

Кроме того, взяв $|\tau_2| < \frac{1}{\lambda_1}$ и используя (8) и (9), находим, что при любых t и τ_1

$$(E_{\lambda_1} - E_{-\lambda_1})\,\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(t) = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} dE_\lambda \Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(0) = $$

$$= \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} \frac{(1-e^{-i\tau_1\lambda})^n}{(1-e^{-i\tau_2\lambda})^n}\, dE_\lambda \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0) = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} \frac{(1+i\lambda)^n (1-e^{-i\tau_1\lambda})^n}{\lambda^n}\, dE_\lambda g(\lambda_1)$$

и, значит,

$$\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(t) = \lim_{\lambda_1\to\infty} \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} e^{it\lambda} (1-e^{-i\tau_1\lambda})^n \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\, dE_\lambda g(\lambda_1). \tag{11}$$

Чтобы получить формулу (2), остается только доказать сходимость функции $g(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$, которая, в силу (10), равносильна сходимости $\| g(\lambda) \|^2$ при $\lambda \to \infty$.

Для этого рассмотрим выражение

$$d(\lambda_1, \tau) = \left\| \int_{-\lambda}^{\lambda_1} e^{-it\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g(\lambda_1) \right\|^2 =$$

$$= \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} |1-e^{-i\tau\lambda}|^{2n} \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} (dE_\lambda g(\lambda_1), g(\lambda_1)).$$

Непрерывная по τ функция $d(\lambda; \tau)$, монотонно возрастая с возрастанием λ, при $\lambda \to \infty$ сходится к непрерывной по τ функции $\| \Delta_\tau^{(n)} \xi(0) \|^2$. По теореме Дини, такая сходимость будет равномерной. Поэтому и

$$d(\lambda) = \int_0^1 d(\lambda, \tau)\, d\tau$$

при $\lambda \to \infty$ сходится к

$$\int_0^1 \| \Delta_\tau^{(n)} \xi(0) \|^2 d\tau.$$

С другой стороны, нетрудно подсчитать, что

$$d(\lambda_1) = \int_0^1 d(\lambda_1; \tau)\, d\tau = \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} \left| \frac{\beta\lambda - \theta(\lambda)}{\lambda} \right| (dE_\lambda g(\lambda_1),\ g(\lambda_1)),$$

где $\beta \neq 0$ и $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| g(\lambda) \|^2 < \infty.$$

Однозначность определения g по $\xi(t)$ очевидна.

Из представления (2) нетрудно вывести, что для каждой кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями существует непрерывная * кривая $\tilde{\xi}(t)$, имеющая те же n-е разности, что и $\xi(t)$, а именно, $\tilde{\xi}(t)$ есть сумма какого-либо частного непрерывного решения разностного уравнения (2), например, решения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it\lambda} - \frac{1 + it\lambda + \cdots + \frac{(it\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + i\lambda^n} \right) \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g,$$

и любого полинома $(n-1)$-й степени.

В частности, отсюда мы получаем

Следствие 1.3. *Непрерывная кривая $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями допускает представление:*

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it\lambda} - \frac{1 + it\lambda + \cdots + \frac{(it\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + i\lambda^n} \right) \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g +$$
$$+ \xi_0 + \xi_1 t + \ldots + \xi_{n-1} t^{n-1}, \tag{12}$$

где $g \in H^{(0)}$, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in H$.

---

* Кривая $\xi(t)$ непрерывна по t, если $\lim\limits_{\tau \to 0} \| \Delta_\tau \xi(t) \| = 0$.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1.2 доказывается следующее более общее предложение.

ТЕОРЕМА 1.4. *n-е разности каждой кривой из множества M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$, $-\infty < t < \infty$) со стационарными n-ми приращениями допускают представление:*

$$\Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau\lambda}) \cdot \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g_\alpha, \tag{13}$$

где $g_\alpha \in H^{(0)}$, $H^{(0)}$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha(t)$ ($\alpha \in M$, $-\infty < t$, $\tau < \infty$), E_λ — разложение единицы, соответствующе- однопараметрической группе унитарных операторов, порожденной множеством M кривых $\xi_\alpha(t)$.

Аналогично тому, как это принято в теории стационарных кривых и кривых со стационарными приращениями [см., например, ([10])], введем следующие определения.

Определение 1.5.

I. Функции $F_{\alpha\beta}(\lambda) = (E_\lambda g_\alpha, g_\beta)$, где g_α — векторы формулы (13), и матрица $\| F_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in M}$, составленная из этих функций, называются спектральными функциями и, соответственно, спектральной матрицей множества M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)$ со стационарными n-ми приращениями.

В том случае, когда все функции $F_{\alpha\beta}(\lambda)$ абсолютно непрерывны, функции $f_{\alpha\beta}(\lambda) = F'_{\alpha\beta}(\lambda)$ и матрица $\| f_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in M}$, составленная из функций $f_{\alpha\beta}(\lambda)$, называются спектральными плотностями и, соответственно, матрицей спектральных плотностей множества M кривых $\xi_\alpha(t)$.

II. Функции

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(t;\ \tau_1;\ \tau_2) &= (\Delta_{\tau_1}^{(n)} \xi_\alpha(t+s),\ \Delta_{\tau_2}^{(n)} \xi_\beta(s)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} (dE_\lambda g_\alpha g_\beta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF_{\alpha\beta}(\lambda) \end{aligned} \tag{14}$$

и матрица $\| D_{\alpha\beta}(t;\ \tau_1;\ \tau_2) \|_{\alpha,\beta \in M}$, составленная из этих функций, называются структурными функциями и, соответственно, структурной матрицей множества M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)$ со стационарными n-ми приращениями.

Формула (14) показывает, что структурные функции однозначно определяются значениями спектральных функций. Обратно, зная значения структурной функции $D_{\alpha\beta}(t;\ \tau_1;\ \tau_2)$, мы по формулам обращения интегралов Фурье-Стильтьеса можем построить функцию

$$F_{\alpha\beta}(\lambda_1;\ \tau_1;\ \tau_2) = \int_{-\infty}^{\lambda_1} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF_{\alpha\beta}(\lambda)$$

и затем по формуле

$$F_{\alpha\beta}(\lambda_2) - F_{\alpha\beta}(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^{2n}}{(1+\lambda^2)^n (1-e^{-i\tau_1\lambda})^n (1-e^{i\tau_2\lambda})^n} d_\lambda F_{\alpha\beta}(\lambda;\ \tau_1;\ \tau_2)$$

$$\left(|\tau_1|,\ |\tau_2| < \min\left\{\frac{1}{|\lambda_2|};\ \frac{1}{|\lambda_2|}\right\}\right)$$

найдем приращения спектральной функции $F_{\alpha\beta}(\lambda)$.

В силу формулы (14), структурные функции можно представить как $(2n)$-е разности некоторых непрерывных функций одной переменной. Действительно, если, например,

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it\lambda} - \frac{1 + it\lambda + \cdots + \frac{(it\lambda)^{2n-1}}{(2n-1)!}}{1 + i\lambda^{2n+1}} \right) \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (15)$$

то

$$\Delta^{(2n)}_{\tau_1(-\tau_2)} D_{\alpha\beta}(t) = D_{\alpha\beta}(t;\tau_1;\tau_2). \quad (16)$$

Непрерывную функцию $D_{\alpha\alpha}(t)$, удовлетворяющую формуле (16) при $\alpha = \beta$, мы будем называть структурной характеристикой кривой $\xi_\alpha(t)$, а непрерывную функцию $D_{\alpha\beta}(t)$, удовлетворяющую (16) при $\alpha \neq \beta$,— взаимной структурной характеристикой кривых $\xi_\alpha(t)$ и $\xi_\beta(t)$. Очевидно, что структурные характеристики определяются с точностью до произвольного полинома $(2n-1)$-й степени.

Замечание 1.6. Определение 1.5 обладает тем существенным недостатком, что значения спектральных функций изменяются, если кривые $\xi_\alpha(t)$ рассматривать как кривые с $(n+1)$-ми, с $(n+2)$-ми и т. д. приращениями. Мы ввели его лишь потому, что это определение очень удобно при аналитических исследованиях.

§ 2. Разложение кривых со стационарными n-ми приращениями на регулярную и сингулярную компоненты. Представление n-х разностей регулярных кривых в виде одностороннего интеграла по спиралям с однородными и ортогональными приращениями

Определение 2.1. Пусть дано множество M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)\,(\alpha \in M)$ со стационарными n-ми приращениями и пусть H_t — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta^{(n)}_\tau \xi_\alpha(s)\,(\tau > 0,\ s \leqslant t)$.

Обозначим

$$H^{(s)} = \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t, \quad (17)$$

$$H^{(0)} = \bigcup_{-\infty<t<\infty} H_t. \quad (18)$$

Тогда:

1. если

$$H^{(s)} = 0, \quad (19)$$

то множество кривых $\xi_\alpha(t)\,(\alpha \in M)$ называется регулярным;

2. если

$$H^{(s)} = H_t = H^{(0)} \quad (-\infty < t < \infty), \tag{20}$$

то множество кривых $\xi_\alpha(t)\,(\alpha \in M)$ называется сингулярным.

Замечание. Точно так же можно было бы ввести понятие регулярности или сингулярности при помощи формул:

$$\bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t^+ = 0, \tag{21}$$

$$H_t^+ = H^{(0)}, \tag{22}$$

где H_t^+ — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(s)\,(\tau < 0;\ s \geqslant t)$.

Это определение, вообще говоря, не совпадает с определением 2.1, а именно, можно построить пример, когда две стационарные и стационарно-связаные кривые образуют регулярное множество в смысле определения 2.1 и сингулярное в смысле формул (21) и (22). Но в важнейшем частном случае, когда множество M конечно и число кривых $\xi_\alpha(t)$ равно рангу (см. ниже), оба определения регулярности совпадают.

ТЕОРЕМА 2.2. *Кривые множества M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)\,(\alpha \in M)$ со стационарными n-ми приращениями могут быть разложены в ортогональную сумму*

$$\xi_\alpha(t) = \xi_\alpha^{(R)}(t) \oplus \xi_\alpha^{(s)}(t), \tag{23}$$

где

1) *$\xi_\alpha^{(R)}(t)\,(\alpha \in M)$ образуют регулярное множество стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями, $\xi_\alpha^{(s)}(t)\,(\alpha \in M)$ образуют сингулярное множество стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями;*

2) $$(\xi_\alpha^{(R)}(t_1), \xi_\beta^{(s)}(t_2)) = 0, \quad \alpha, \beta \in M, \quad -\infty < t_1, t_2 < \infty,$$
$$\xi_\alpha^{(s)}(t) \in H^{(s)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \alpha \in M.$$

Разложение (23) для данного множества кривых $\xi_\alpha(t)$ определяется однозначно.

В частности, кривая $\xi(t)$ со стационарными n-ми привращениями разлагается в ортогональную сумму

$$\xi(t) = \xi^{(R)}(t) \oplus \xi^{(s)}(t). \tag{24}$$

Доказательство теоремы 2.2. Обозначим через P_V проекционный оператор подпространства V пространства H, и пусть

$$\xi_\alpha^{(R)}(t) = P_{H \ominus H^{(s)}}\xi_\alpha(t), \quad \xi_\alpha^{(s)}(t) = P_{H^{(s)}}\xi_\alpha(t).$$

Тогда имеем:

$$U_t P_{H^{(s)}} = P_{H^{(s)}} U_t$$

(ибо $U_t H^{(s)} = H^{(s)}$) и

$$U_t \Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha^{(s)}(t_1) = U_t \Delta_\tau^{(n)} P_{H^{(s)}} \xi_\alpha(t_1) = U_t P_{H^{(s)}} \Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha(t_1) =$$
$$= P_{H^{(s)}} U_t \Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha(t_1) = P_{H^{(s)}} \Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha(t + t_1) = \Delta_\tau^{(n)} \xi_\alpha^{(s)}(t + t_1),$$

т. е. кривые $\xi_\alpha^{(s)}(t)\,(\alpha \in M)$, а значит, и $\xi_\alpha^{(R)}(t) = \xi_\alpha(t) \ominus \xi_\alpha^{(s)}(t)$ образуют множество стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями.

Но так как

$$H_t \subseteq (H^{(R)} \oplus H^{(s)})\ *, \quad H_t^{(s)} \subseteq H^{(s)}, \quad H_t^{(R)} \subseteq (H_t \ominus H^{(s)}),$$

то

$$H_t^{(s)} = H^{(s)}, \quad H_t^{(R)} = H_t \ominus H^{(s)}$$

и

$$\bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t^{(R)} = \bigcap_{-\infty<t<\infty} (H_t \ominus H^{(s)}) = \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t \ominus H^{(s)} = H^{(s)} \ominus H^{(s)} = 0.$$

Таким образом кривые $\xi_\alpha^{(R)}(t)$ и $\xi_\alpha^{(s)}(t)$ образуют, соответственно, регулярное и сингулярное множества стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями, удовлетворяющие всем условиям теоремы.

Обратно, пусть

$$\xi_\alpha(t) = \xi_\alpha^{(R)} \oplus \xi_\alpha^{(s)}(t) \quad (\alpha \in M)$$

— какое-либо разложение данной теоремы; тогда, в соответствии с условием 2),

$$H_t^{(s)} \subseteq H^{(s)}, \quad H_t \subseteq H_t^{(R)} \oplus H_t^{(s)}$$

и

$$H^{(s)} = \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t \subseteq \bigcap_{-\infty<t<\infty} (H_t^{(R)} \oplus H_t^{(s)}) = \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t^{(R)} \oplus \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_t^{(s)} =$$
$$= \bigcap_{-\infty<t<\infty} H_s^{(s)} = \underset{-\infty<\tau<\infty}{H_\tau^{(s)}},$$

а следовательно, $H_t^{(s)} = H^{(s)}$. Отсюда следует, что

$$\xi_\alpha^{(s)}(t) = P_{H_t^{(s)}}\xi_\alpha(t) = P_{H^{(s)}}\xi_\alpha(t)$$

и

$$\xi_\alpha^{(R)}(t) = \xi_\alpha(t) - \xi_\alpha^{(s)}(t) = P_{H \ominus H^{(s)}}\xi_\alpha(t),$$

и единственность разложения (23) установлена. Теорема 2.2 доказана.

Изучим подробнее свойства регулярного множества кривых.

Оказывается, что для регулярных кривых со стационарными n-ми приращениями существуют разложения, аналогичные разложениям регулярных стационарных последовательностей $\xi_n (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ гильбертова пространства, в односторонние суммы по некоторому ортонормированному базису η_n:

---

* $H_t^{(s)}$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha^s(t_1)\,(\tau > 0,\ t_1 < t,\ \alpha \in M)$, $H_t^{(R)}$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha^{(R)}(t_1)$.

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k},$$

где

$$(\eta_{n_1}, \eta_{n_2}) = \delta_{n_1 n_2} = \begin{cases} 1 \text{ при } n_1 = n_2, \\ 0 \text{ при } n_1 \neq n_2. \end{cases} \qquad [\text{ср. } (^4)].$$

Чтобы сформулировать относящиеся сюда результаты, нам понадобятся следующие определения и леммы.

Определение 2.3. Нормированной спиралью с однородными и ортогональными приращениями называется кривая $\zeta(t)$ со стационарными первыми приращениями, удовлетворяющая следующим условиям:

1. для непересекающихся интервалов (t_1, t_2) и (t_1', t_2') разность $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ ортогональна разности $\zeta(t_2') - \zeta(t_1')$.

2. $\|\zeta(t)\|^2 = t$.

Такие кривые изучались А. Н. Колмогоровым (7) и К. Каруненом (14).

В работе (14) дано определение интеграла $\int_a^b f(t)\, d\zeta(t)$ по нормальной спирали $\zeta(t)$ с однородными и ортогональными приращениями. В частности, там показано, что каждый вектор $f \in H_\zeta$ (H_ζ — замкнутая линейная оболочка векторов $\zeta(t)$ $(-\infty < t < \infty)$) однозначно разлагается в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\zeta(t),$$

где

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty,$$

и обратно, для каждой функции $f(t)$ с суммируемым квадратом модуля определен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\zeta(t) = f \in H_\zeta.$$

При этом соответствие между векторами

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\zeta(t)$$

из H_ζ и функциями $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ устанавливает изоморфное отображение пространства H_ζ на пространство $L_2(-\infty; \infty)$.

Определение 2.4. Пусть $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha \in M)$ образуют регулярное множество M стационарно-связанных кривых со стационарными n-ми приращениями и U_t — однопараметрическая группа унитарных операторов, соответствующая этому множеству кривых.

Тогда части U_t^* операторов U_t $(t < 0)$, определенные на подпространстве H_0 (частный случай подпространства H_t при $t = 0$), образуют полугруппу полуунитарных операторов [см. (17)]. Производящий оператор A^* этой полугруппы, который, в силу равенств (17) и (19), является простым

максимальным оператором с индексами дефекта $(\mathfrak{N}, 0)$, мы будем называть структурным оператором регулярного множества M кривых $\xi_\alpha(t)$.

Согласно результатам книги ([15]), простой максимальный оператор A^* с индексами дефекта $(\mathfrak{N}, 0)$ разлагается в ортогональную сумму операторов типа A:

$$A^* = \sum_{\beta \in N} \oplus A_-^\beta$$

(N — множество мощности $\mathfrak{N}$).

Итак, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 2.5. *Структурный оператор A^* регулярного множества M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha \in M)$ со стационарными n-ми приращениями разлагается в ортогональную сумму*

$$A^* = \sum_{\beta \in N} \oplus A_-^\beta,$$

где $A_-^{(\beta)}$ — максимальные операторы типа A_-, а N — множество мощности не более, чем мощность множества M.

Наконец, следующая лемма показывает, что структурный оператор характеризует регулярное множество кривых.

ЛЕММА 2.6. *Пусть даны два регулярных множества $\widetilde{M}$ и M стационарно-связанных кривых $\widetilde{\xi}_{\widetilde{\alpha}}(t)$ $(\widetilde{\alpha} \in \widetilde{M})$ и $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha \in M)$ со стационарными n_1- и n_2-ми приращениями, а $\widetilde{U}_t$ и U_t $(-\infty < t < \infty)$ — определенные в пространствах $\widetilde{H}^{(0)}$ и $H^{(0)}$ однопараметрические группы унитарных операторов, соответствующие этим множествам кривых.*

Тогда, если структурные операторы $\widetilde{A}^{(0)}$ и $A^{(0)}$ множеств кривых $\widetilde{\xi}_{\widetilde{\alpha}}(t)$ $(\widetilde{\alpha} \in \widetilde{M})$ и $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha \in M)$ изоморфны, то существует такое изоморфное соответствие между пространствами $\widetilde{H}^{(0)}$ и $H^{(0)}$, при котором:

1. *пространство H_t отображается на пространство H_t ($\widetilde{H}_t$ и H_t — замкнутые линейные оболочки векторов $\Delta_\tau^{(n_1)}\widetilde{\xi}_{\widetilde{\alpha}}(s)$ и $\Delta_\tau^{(n_2)}\xi_\alpha(s)$, $\tau > 0$, $s \leqslant t$, $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{M}$, $\alpha \in M$).*

2. *Операторы $\widetilde{U}_t$ изоморфно отображаются на операторы U_t.*

Доказательство. По условию, между пространствами $\widetilde{H}_0$ и H_0 можно установить такое изоморфное соответствие

$$T\widetilde{f} = f \ (\widetilde{f} \in \widetilde{H}_0;\ f \in H_0),$$

при котором:

1. область определения $\Omega_{\widetilde{A}^*}$ оператора $\widetilde{A}^*$ отображается на область определения $\Omega_{\widetilde{A}^*}$ оператора A^*.

2. Для $f \in \Omega_{\widetilde{A}^*}$, $f \in \Omega_{A^*}$ и $T\widetilde{f} = f$ имеем:

$$T\widetilde{A}^*\widetilde{f} = A^* f.$$

А тогда, согласно результатам, изложенным в книге ([17]), для $\widetilde{f} \in \widetilde{H}_0$, $f \in H$ и $T\widetilde{f} = f$ получаем:

$$T\widetilde{U}_t f = U_t f \quad (t < 0).$$

Поставив в соответствие вектору $\widetilde{U}_t\widetilde{f}$ вектор $U_t f$ $(-\infty < t < \infty)$, где

$\tilde{f} \in \tilde{H}_0$, $f \in H_0$ и $T\tilde{f} = f$, мы получаем изоморфное соответствие между пространствами $\tilde{H}^{(0)}$ и $H^{(0)}$, удовлетворяющее всем условиям леммы.

Из лемм 2.5 и 2.6 вытекает

Следствие 2.7. *Если $\tilde{\xi}(t)$ и $\xi(t)$ — две регулярные кривые со стационарными n_1- и n_2-ми приращениями, то между пространствами $\tilde{H}^{(0)}$ и $H^{(0)}$ этих кривых можно установить такое изоморфное соответствие, при котором:*

1. *пространство $\tilde{H}_t$ изоморфно отображается на пространство H_t.*
2. *Операторы $\tilde{U}_t$ изоморфно отображаются на операторы U_t.*

Перейдем к доказательству основных теорем.

ТЕОРЕМА 2.8. *Если $\xi(t)$ есть регулярная кривая со стационарными n-ми приращениями, то при $\tau > 0$ $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$ можно представить в виде:*

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \int_0^\infty \Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)\, d_p\zeta(t-p) = \int_{-\infty}^{t} \Delta_\tau^{(n)}\varphi(t-p)\, d\zeta(p), \tag{25}$$

где $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ — n-я разность комплексной измеримой функции $\varphi(p)$ и при любом τ $\Delta^{\tau(n)}\varphi(p)$ есть функция аргумента p с интегрируемым квадратом модуля, причем при $\tau > 0$ и $p < 0$ $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p) = 0$; $\zeta(t)$ — нормированная спираль с однородными и ортогональными приращениями, удовлетворяющая условиям:

$$U_t\Delta_\tau\zeta(s) = \Delta_\tau\zeta(t+s) \tag{26}$$

и при $\tau > 0$, $s < t$

$$\Delta_\tau\zeta(s) \in H_t; \tag{27}$$

U_t — однопараметрическая группа унитарных операторов, соответствующая кривой $\xi(t)$.

*Величины $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ и $\zeta(p)$ определяются кривой $\xi(t)$ однозначно с точностью до постоянного множителя, равного по абсолютной величине единице *.*

Замечание I. Легко видеть, что условие (26) вытекает из формулы (25) и условия (27) данной теоремы.

Замечание II. Функция $\varphi(p)$, очевидно, определяется своей n-й разностью $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$, а следовательно, и кривой $\xi(t)$ с точностью до полинома не выше, чем $(n-1)$-й степени.

Кроме того, условие $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p) = 0$ при $p < 0$ показывает, что на отрицательной полуоси $\varphi(p)$ сама является таким полиномом.

Указанную неоднозначность в выборе $\varphi(p)$ можно устранить, добавив условие, чтобы эта функция обращалась в нуль при $p < 0$.

В дальнейшем ту из функций $\varphi(p)$, для которой $\varphi(p) = 0$ при $p < 0$, мы будем обозначать через $\varphi_0(p)$.

Доказательство теоремы 2.8. Рассмотрим какую-либо нормированную спираль $\tilde{\zeta}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ с однородными и ортогональными приращениями и пусть $\tilde{H}^{(0)}$ и $\tilde{H}_t$ — замкнутые линейные оболочки векторов $\Delta_\tau\tilde{\zeta}(t)$ $(-\infty < t, \tau < \infty)$ и $\Delta_\tau\tilde{\zeta}(s)$ $(s < t; \tau > 0)$, а $\tilde{U}_t$ — однопараметрическая группа унитарных операторов, соответствующая кривой $\tilde{\zeta}(t)$. Тогда, согласно следствию 2.7, между пространствами $\tilde{H}$ и $H^{(0)}$ можно

* Мы не различаем функций, равных друг другу почти всюду.

установить такое изоморфное соответствие, при котором пространство $\widetilde{H}_t$ изоморфно отображается на пространство H_t, а оператор $\widetilde{U}_t$ изоморфно отображается на унитарный оператор U_t.

При этом изоморфизме векторы $\widetilde{\zeta}(t)$ отобразятся на векторы $\zeta(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, образующие нормированную спираль с однородными и орогональными приращениями, причем:

а) $U_t \Delta_\tau \zeta(s) = \Delta_\tau \zeta(t+s)$;

б) замкнутая линейная оболочка векторов $\Delta_\tau \zeta(s)$ $(\tau > 0;\ s < t)$ совпадает с пространством H_t.

Из свойств а) и б) спирали $\zeta(t)$ вытекает, что векторы $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$ $(\tau > 0)$ можно разложить в односторонний интеграл по $\zeta(t)$:

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \int_0^\infty \Delta^{(n)}\varphi(p)\, d_p\zeta(t-p) = \int_{-\infty}^{t} \Delta_\tau^{(n)}\varphi(t-p)\, d\zeta(p), \tag{28}$$

где $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ (при любом τ) — функция аргумента p с интегрируемым квадратом модуля.

Покажем, что $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ есть n-я разность некоторой измеримой комплексной функции $\varphi(p)$.

Для этого рассмотрим преобразование Фурье $\Delta_\tau^{(n)}\psi(\lambda)$ функции $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$:

$$\Delta_\tau^{(n)}\psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\lambda} \Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)\, dp.$$

В силу формулы (28) и теоремы Планшереля, имеем:

$$(\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(t), \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(0)) = \left(\int_{-\infty}^{t} \Delta_{\tau_1}^{(n)}\varphi(t-p)\, d\zeta(p),\ \int_{-\infty}^{0} \Delta_{\tau_2}^{(n)}\varphi(-p)\, d\zeta(p) \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\tau_1}^{(n)}\varphi(t-p) \cdot \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\varphi(-p)}\, dp) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\tau_1}^{(n)}\varphi(t+p) \cdot \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\varphi(p)}\, dp =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Delta_{\tau_1}^{(n)}\psi(\lambda) \cdot \Delta_{\tau_2}^{(n)}\psi(\lambda)\, d\lambda\,. \tag{29}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (14), находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Delta_{\tau_1}^{(n)}\psi(\lambda) \cdot \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\psi(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau)\lambda})^n \cdot \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}}\, dF(\lambda),$$

т. е. спектральная функция $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна и

$$\Delta_{\tau_1}^{(n)}\psi(\lambda) \cdot \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\psi(\lambda)} = (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{-i\tau_2\lambda})^n \cdot \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} f(\lambda), \qquad f(\lambda) = F'(\lambda).$$

Отсюда видно, что

$$\Delta_\tau^{(n)}\psi(\lambda) = (1 - e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\, b(\lambda),$$

где $|b(\lambda)|^2 = f(\lambda)$ и

$$\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\lambda}\Delta_\tau^{(n)}\psi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\, b(\lambda)\,d\lambda \tag{30}$$

есть n-я разность функции

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left[e^{ip\lambda} - 1 - ip\lambda - \ldots - \frac{(ip\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\, b(\lambda)\,d\lambda + \\ + \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-T}^{-1} + \int_{1}^{T}\right) e^{ip\lambda} \cdot \frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\, b(\lambda)\,d\lambda. \tag{31}$$

Остается доказать однозначность определения величин $\zeta(t)$ и $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ по $\xi(t)$.

Пусть $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ — две нормированные спирали, дающие разложение (28) и удовлетворяющие всем условиям теоремы.

Тогда замкнутые линейные оболочки векторов $\Delta_\tau\zeta_1(t)$ и $\Delta_\tau\zeta_2(t)$ $(\tau > 0)$ совпадают с пространством H_t и, следовательно,

$$\zeta_2(t) = \int_0^t a(p)\,d\zeta_1(p), \qquad \Delta_\tau\zeta_2(t) = \int_{t-\tau}^{t} a(p)\,d\zeta_1(p).$$

Отсюда

$$\int_{t-\tau}^{t} a(p)\,d\zeta_1(p) = \Delta_\tau\zeta_2(t) = U_t\Delta_\tau\,\zeta_2(0) = U_t \int_{-\tau}^{0} a(p)\,d_p\zeta_1(p) = \\ = \int_{-\tau}^{0} a(p)\,d_p\,\zeta_1(t+p) = \int_{t-\tau}^{t} a(p-t)\,d\zeta_1(p),$$

т. е. при любом t почти всюду по p

$$a(p-t) = a(p),$$

а значит, $a(p) = \alpha = \mathrm{const}$ и $\zeta_2(t) = \alpha\zeta_1(t)$.

Кроме того, так как

$$|t| = \|\zeta_2(t)\|^2 = \|\alpha\zeta_1(t)\|^2 = |\alpha|^2\,\|\zeta_1(t)\|^2 = |\alpha|^2\,|t|,$$

то $|\alpha| = 1$. Наконец, разложение (25) показывает, что из однозначности определения спирали $\zeta(p)$ следует и однозначность определения функции $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$.

Теорема полностью доказана.

Из теорем 2.2 и 2.8 вытекает

Следствие 2.9. *n-е разности $\Delta_\tau^{(n)}\zeta(t)$ $(\tau > 0)$ произвольной кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями можно представить в виде:*

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \int_0^\infty \Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)\,d_p\,\zeta(t-p) + \Delta_\tau^{(n)}\xi^{(s)}(t), \tag{32}$$

где

$$\int_0^\infty \Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)\,d_p\,\zeta(t-p)$$

есть разложение теоремы 2.8 *для* $\Delta_\tau^{(n)}\,\xi^{(R)}(t)$.

Используя леммы 2.5 и 2.6, легко получить следующее обобщение доказанной теоремы.

ТЕОРЕМА 2.10. *Если* $\xi_\alpha(t)\,(\alpha\in M)$ *образуют регулярное множество* M *стационарно-связанных кривых со стационарными* n*-ми приращениями, то при* $\tau>0$ $\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(t)$ *можно представить в виде*

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi_\alpha(t)=\sum_{\beta\in N}\oplus\int_0^\infty\Delta_\tau^{(n)}\varphi_{\alpha\beta}(p)\,d_p\zeta_\beta(t-p), \tag{33}$$

где

1. N — *некоторое множество мощности не более, чем мощность множества* M.

2. $\Delta_\tau^{(n)}\varphi_{\alpha\beta}(p)$ $(\alpha\in N,\beta\in N)$ *есть* n*-я разность комплексной измеримой функции* $\varphi_{\alpha\beta}(p)$, *удовлетворяющей условию, что* $\Delta_\tau^{(n)}\varphi_{\alpha\beta}(p)$ *при любом* τ *есть функция аргумента* p *с интегрируемым квадратом модуля.*

3. *При каждом* $\alpha\in M$ *число слагаемых суммы* (33), *отличных от нуля, не более, чем счетно.*

4. $\zeta_\beta(t)$ — *нормированные спирали с однородными и ортогональными приращениями, удовлетворяющие условиям:*

$$(\zeta_{\beta_1}(t),\zeta_{\beta_2}(s))=0 \text{ при } \beta_1\neq\beta_2,\quad \beta_1,\beta_2\in N,\quad -\infty<t,\quad s<\infty, \tag{34}$$

$$U_t\Delta_\tau\,\zeta_\beta(s)=\Delta_\tau\,\zeta_\beta(t+s), \tag{35}$$

$$\Delta_\tau\zeta_\beta(s)\in H_t \text{ при } \tau>0,\, s<t; \tag{36}$$

U_t — *однопараметрическая группа унитарных операторов, соответствующая множеству* M *кривых* $\zeta_\alpha(t)\,(\alpha\in M)$.

Для случая, когда $\xi_\alpha(t)$ *образуют регулярное множество стационарных и стационарно-связанных кривых, представление* (33) *записывается следующим образом:*

$$\xi_\alpha(t)=\sum_{\beta\in N}\oplus\int_0^\infty\varphi_{\alpha\beta}(p)\,d_p\,\zeta_\beta(t-p),\quad \beta\in N. \tag{37}$$

Мощность множества N *является инвариантом регулярного множества* M *кривых* $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha\in M)$ *и называется рангом.*

В дальнейшем под рангом произвольного множества стационарно-свя занных кривых со стационарными n-ми приращениями мы будем понимать ранг регулярного множества, выделяемого при разложении согласно теореме 2.2.

§ 3. Спектральная характеристика регулярных и сингулярных кривых со стационарными n-ми приращениями. Линейное экстраполирование кривых со стационарными n-ми приращениями

ЛЕММА 3.1. *Пространство* H_t *кривой* $\xi(t)\,(-\infty<t<\infty)$ *со стационарными* n*-ми приращениями*

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^n\cdot\frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n}\,dE_\lambda g \tag{38}$$

*совпадает с пространством $\tilde{H}_t$ * стационарной кривой $\tilde{\xi}(t)$, определяемой равенством*

$$\tilde{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda g = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda \tilde{\xi}(0). \tag{39}$$

1°. Доказательство.

$$H_t \subseteq \tilde{H}_t. \tag{40}$$

Действительно, вектор $\Delta_\tau^{(n)}\xi(s)$, $\tau > 0$, $s < t$, можно получить из векторов $\tilde{\xi}(r)$, $r < t$, при помощи следующих операций, не выводящих из H_t:

$$\text{а)}\quad i^n \int_{-\tau}^{0} ds_1 \int_{-\tau}^{0} ds_2 \ldots \int_{-\tau}^{0} \tilde{\xi}(s + s_1 + s_2 + \cdots + s_n)\, ds_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \frac{(1 - e^{-i\tau\lambda})^n}{\lambda^n} dE_\lambda g = v(s; \tau), \tag{41}$$

$$\text{б)}\quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial v^k(s;\tau)}{\partial s^k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1 + i\lambda)^n}{\lambda^n}\, dE_\lambda g = \Delta_\tau^{(n)} \xi(s). \tag{42}$$

2°. Обратно,

$$\tilde{H}_t \subseteq H_t. \tag{43}$$

Действительно, из результатов Ахиезера [см. ([18]), добавление В] следует, что в пространстве $L_\sigma^2(-\infty; \infty)$ $(\sigma(\lambda) = (E_\lambda g, g))$ функцию

$$\frac{1}{(1 + i\lambda)^n} = \frac{i^n}{(i - \lambda)^n},$$

аналитическую и ограниченную в нижней полуплоскости, можно с любой степенью точности аппроксимировать линейными комбинациями функций $e^{ir\lambda}$, $r < 0$. Поэтому пространство H_t, содержащее векторы

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(s + r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(r+s)\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1 + i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir\lambda} \cdot e^{is\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{(1 + i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g, \quad \tau > 0, \quad r < 0, \quad s < t,$$

содержит и векторы

$$v(s; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n \cdot \frac{1}{\lambda^n} dE_\lambda g$$

---

* Здесь $\tilde{H}_t$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\tilde{\xi}(s)$, $s < t$.

и

$$\frac{1}{i^n \cdot n!} \frac{\partial^n v(s;\tau)}{\partial \tau^n}\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, dE_\lambda\, g = \tilde{\xi}(s), \quad s < t.$$

Сравнение соотношений (40) и (43) доказывает лемму.

Следствие 3.2. *Множество M стационарно-связанных кривых $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha \in M)$ со стационарными n-ми приращениями будет регулярным (сингулярным) тогда и только тогда, когда будет регулярным (сингулярным) множество стационарных и стационарно-связанных кривых $\tilde{\xi}_\alpha(t)$, имеющих ту же спектральную матрицу, что и данное множество кривых.*

Отсюда ясно, что результаты М. Г. Крейна ([9]) о спектральной характеристике сингулярной и регулярной стационарных кривых переносятся и на кривые со стационарными n-ми приращениями, т. е. имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для того чтобы кривая $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями была сингулярной, необходимо и достаточно, чтобы интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

расходился.

ТЕОРЕМА 3.4. *Для того чтобы кривая $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями была регулярной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *спектральная функция $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна и спектральная плотность $f(\lambda)$ почти всюду положительна.*

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty. \tag{44}$$

Теперь естественно поставить задачу о нахождении величины $\sigma^2(s;\tau)$, определяемой равенством

$$\sigma^2(s;\tau) = \inf_{m=1,2\ldots,\ \tau,\tau_j,\ t_j>0} \| \Delta_\tau^{(n)} \xi(t+s) - \sum_{j=1}^{m} c_j \Delta_{\tau_j}^{(n)} \xi(t-t_j) \|^2 =$$
$$= \| \Delta_\tau^{(n)} \xi(t+s) - P_{H_t} \Delta_\tau^{(n)} \xi(t+s) \|^2 = \| \Delta_\tau^{(n)} \xi(0) - P_{H_{-s}} \Delta_\tau^{(n)} \xi(0) \|^2.$$

Эта задача обобщает задачу об экстраполировании, занимающую значительное место в теории стационарных кривых [см. ([1]), ([5]), ([9]), ([10]), ([13])].

Из разложения (32) видно, что

$$\sigma^2(s;\tau) = \int_0^s |\Delta_\tau^{(n)} \varphi(p)|^2\, dp. \tag{45}$$

В частности, при $\tau \geqslant s$

$$\sigma^2(s;\tau) = \int_0^s |\Delta_\tau^{(n)} \varphi(p)|^2\, dp = \int_0^s |\Delta_\tau^{(n)} \varphi_0(p)|^2\, dp =$$

$$=\int_0^s \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \varphi_0 (p-k\tau) \right|^2 dp = \int_0^s |\varphi_0(p)|^2\, dp,$$

и величина $\sigma^2(s;\tau)=\sigma^2(s)$ не зависит от τ.

Таким образом, задача вычисления величины $\sigma^2(s;\tau)$ сводится к задаче отыскания функции $\varphi(p)$ в разложении (32). Способ нахождения функции $\varphi(p)$ по спектральной функции $F(\lambda)$ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.5. *Для несингулярной кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями функцию $\varphi(p)$ можно найти по формуле:*

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left[e^{ip\omega}-1-ip\omega-\cdots-\frac{(ip\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\frac{(1+i\omega)^n}{\omega^n}b(\omega)\,d\omega+$$
$$+\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-T}^{-1}+\int_{1}^{T}\right)e^{ip\omega}\frac{(1+i\omega)^n}{\omega^n}b(\omega)\,d\omega, \tag{46}$$

где $b(\omega)$ — граничные значения на вещественной оси аналитической в нижней полуплоскости функции

$$b(z)=\exp\left\{i\theta-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda-z}\cdot\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi. \tag{47}$$

Для случая стационарной кривой результаты этой теоремы были получены М. Г. Крейном [см. ([9])].

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу леммы 3.1 представлению вида (32) кривой $\xi(t)$

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}\Delta_\tau^{(n)}\varphi(t-p)\,d\zeta(p)+\Delta_\tau^{(n)}\xi^{(s)}(t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_\tau^{(n)}\varphi(t-p)\,d\zeta(p)+\Delta_\tau^{(n)}\xi^{(s)}(t) \tag{48}$$

соответствует представление (32) для стационарной кривой $\tilde\xi(t)$:

$$\tilde\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}\tilde\varphi(t-p)\,d\zeta(p)+\tilde\xi^{(s)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\varphi(t-p)\,d\zeta(p)+\tilde\xi^{(s)}(t). \tag{49}$$

В формулах (48) и (49) $\zeta(p)$ обозначает одну и ту же спираль с однородными и ортогональными приращениями.

В работе ([13]) показано, что $\tilde\varphi(p)$ можно найти по формуле

$$\tilde\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip\omega}\,b(\omega)\,d\omega, \tag{50}$$

где $b(\omega)$ — граничные значения аналитической в нижней полуплоскости функции

$$b(z)=\exp\left\{i\theta-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda-z}\,\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right\}$$
$$(0\leqslant\theta<2\pi,\quad |b(\omega)|^2=f(\lambda)=F'(\lambda)). \tag{51}$$

Отсюда, принимая во внимание (41), (42), (48), (49), (50), легко видеть, что

$$\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip\omega}(1-e^{-i\tau\omega})^n\frac{(1+i\omega)^n}{\omega^n}\cdot b(\omega)\,d\omega. \tag{52}$$

Теорема доказана.

Замечание 3.6. В некоторых случаях функции $\varphi(p)$ и $b(\omega)$ легко найти непосредственно, не используя формулы (47). Например, для стационарной кривой, имеющей спектральную плотность $\frac{1}{1+\lambda^2}$ [см. ([10])],

$$\varphi(p)=\sqrt{2\pi}\,e^{-p},\qquad p>0,$$

$$b(\omega)=\lim_{\tau\to+0}\exp\left\{i\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda(\omega-i\tau)}{\lambda-(\omega-i\tau)}\frac{\log\frac{1}{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}d\lambda\right\}=$$

$$=e^{i\theta_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{2\pi}e^{-ip\omega}e^{-p}dp=\frac{e^{i\theta_1}}{1+i\omega}. \tag{53}$$

Замечание 3.7. Используя (53), можно переписать формулы (46), и (47) следующим образом:

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left[e^{ip\omega}-1-ip\omega-\ldots-\frac{(ip\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\frac{b_1(\omega)}{\omega^n}d\omega+$$

$$+\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-T}^{-1}+\int_{1}^{T}\right)e^{ip\omega}\cdot\frac{b_1(\omega)}{\omega^n}d\omega, \tag{54}$$

где $b_1(\omega)$ — граничные значения аналитической в нижней полуплоскости функции

$$b_1(z)=\exp\left\{i\theta-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda-z}\cdot\frac{\log[f(\lambda)(1+\lambda^2)^n]}{1+\lambda^2}d\lambda\right\}, \tag{55}$$

и

$$|b_1(\omega)|^2=f(\omega)(1+\omega^2)^n.$$

§ 4. Кривые со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые интересные примеры кривых со станцинарными n-ми приращениями.

Определение 4.1. Кривую $\xi(t)\,(-\infty<t<\infty)$ назовем кривою со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия, если

1. $\xi(t)$ есть кривая со стационарными n-ми приращениями;
2. для любого действительного числа $k\neq 0$ найдется такое положительное число $a(t)$, что

$$\left(\Delta_{k\tau_1}^{(n)}\xi(kt),\ \Delta_{k\tau_2}^{(n)}\xi(ks)\right)=a(k)\left(\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(t),\ \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(s)\right), \tag{56}$$

т. е.

$$D(kt;\ k\tau_1;\ k\tau_2)=a(k)\,D(t;\ \tau_1;\ \tau_2). \tag{57}$$

При $n=1$ такие кривые изучались А. Н. Колмогоровым [см. ([7])].

Очевидно, что

$$a(k_1 \cdot k_2) = a(k_1) \cdot a(k_2),$$

и, в силу непрерывности структурной функции $D(t; \tau_1; \tau_2)$, $a(k)$ непрерывна по $k \neq 0$, откуда нетрудно вывести, что $a(k)$ должна быть вида

$$a(k) = |k|^\sigma. \tag{58}$$

Действительно, прежде всего ясно, что $a(-k) = a(k)$, ибо

$$a^2(-k) = a[(-k)^2] = a^2(k) \text{ и } a(k) > 0.$$

Далее,

$$\log a(k_1 \cdot k_2) = \log a(|k_1| \cdot |k_2|) = \log a(e^{\log|k_1| + \log|k_2|}) = \\ = \log a(e^{\log|k_1|}) + \log a(e^{\log|k_2|})$$

и, следовательно, $\log a$ — линейная функция $\log|k|$, т. е.

$$a(k) = e^{\sigma \log|k| + \nu} = |k|^{\sigma+\nu},$$

причем, так как $a(1) = a(1 \cdot 1) = a^2(1)$ и, значит, $a(1) = 1$, то $e^\nu = a(1) = 1$ и $\nu = 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Спектральная функция $F(\lambda)$ кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия, или является функцией скачков, имеющей разрыв в единственной точке $\lambda = 0$, т. е.*

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \textit{при } \lambda \leqslant 0, \\ F(+0) - F(-0) & \textit{при } \lambda > 0, \end{cases} \tag{59}$$

или же абсолютно непрерывна, и спектральная плотность $f(\lambda) = F'(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = c^2 \frac{|\lambda|^{2n-\sigma-1}}{(1+\lambda^2)^n}, \quad c^2 > 0, \quad 0 < \sigma < 2n. \tag{60}$$

Соответственно этому n-ые приращения $\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)$ такой кривой допускают одно из следующих представлений: или

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = \xi\tau^n, \tag{61}$$

где $\xi \in H^{(0)}$, или

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n \frac{d\tilde{\zeta}(\lambda)}{|\lambda|^{\frac{\sigma+1}{2}}}, \tag{62}$$

где $\tilde{\zeta}(\lambda)$ — нормированная спираль с однородными и ортогональными приращениями.

Обратно, если имеет место (59) *или* (60), *то $\xi(t)$ есть кривая со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия.*

Доказательство. 1°. Согласно формулам (14), (57) и (58), имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^n (1 - e^{i\tau\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF(\lambda) = D(t; \tau; \tau) =$$

$$=a(k)D\left(\frac{t}{k};\ \frac{\tau}{k};\ \frac{\tau}{k}\right)=|k|^{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{t}{k}\lambda}\left(1-e^{-i\frac{\tau}{k}\lambda}\right)^{n}\left(1-e^{i\frac{\tau}{k}\lambda}\right)^{n}\frac{(1+\lambda^{2})^{n}}{\lambda^{2n}}\,dF(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^{n}(1-e^{i\tau\lambda})^{n}\cdot\frac{(1+\lambda^{2}k^{2})^{n}|k|^{\sigma}\operatorname{sign}k}{k^{2n}\lambda^{2n}}\,dF(k\lambda).$$

Сравнение левой и правой частей этого равенства показывает, что

$$\int_{0}^{\lambda_0}|1-e^{-i\tau\lambda}|^{2n}\frac{(1+\lambda^{2})^{n}}{\lambda^{2n}}\,dF(\lambda)=\int_{0}^{\lambda_0}|1-e^{i\tau\lambda}|^{2n}\cdot\frac{(1+\lambda^{2}k^{2})^{n}|k|^{\sigma}\operatorname{sign}k}{k^{2n}\lambda^{2n}}\,dF(k\lambda). \quad (63)$$

Выберем λ_0 так, чтобы в этой точке функция $F(\lambda)$ была дифференцируемой. Это можно сделать, ибо $F(\lambda)$ монотонна. Тогда из (63) видно, что $F(k\lambda_0)$ дифференцируема по λ_0 при любом $k\neq 0$, а значит, $F(\lambda)$ всюду дифференцируема ($\lambda\neq 0$).

Продифференцировав обе части равенства (63) по λ_0 при $\lambda_0=1$, получаем:

$$|1-e^{-i\tau}|^{2n}\cdot 2^{n}f(1)=|1-e^{-i\tau}|^{2n}\cdot\frac{(1+k^{2})^{n}|k|^{\sigma}}{k^{2n}}\operatorname{sign}k\cdot kf(k\lambda) \quad (64)$$

и

$$2^{n}f(1)=\frac{(1+k^{2})^{n}|k|^{\sigma+1}f(k)}{k^{2n}}. \quad (65)$$

Следовательно, спектральная функция $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна на интервалах $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$ и

$$F'(\lambda)=f(\lambda)=2^{n}f(1)\cdot\frac{|\lambda|^{2n-\sigma-1}}{(1+\lambda^{2})^{n}},\quad \lambda\neq 0. \quad (66)$$

Здесь необходимо различать два случая.

1. Если $f(1)=0$, то $F'(\lambda)=0$, $\lambda\neq 0$, $F(\lambda)$ есть функция скачков имеющая единственный разрыв в точке $\lambda=0$, и

$$a(k)=k^{2n}. \quad (67)$$

2. Если $f(1)\neq 0$, то

$$F'(\lambda)=c^{2}\frac{|\lambda|^{2n-\sigma-1}}{(1+\lambda^{2})^{n}},\quad \lambda\neq 0,\quad c^{2}=2^{n}f(1), \quad (68)$$

причем, так как функция $f(\lambda)$ суммируема, то $0<\sigma<2n$ и $F(\lambda)$ должна быть непрерывна в точке $\lambda=0$, ибо в противном случае мы имели бы в соответствии с формулами (67), (14), (57) и (58):

$$k^{2n}\tau^{2n}[F(+0)-F(-0)]=$$

$$=D(kt;\ k\tau;\ k\tau)-c^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt\lambda}(1-e^{-ik\tau\lambda})^{n}(1-e^{ik\tau\lambda})^{n}\frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}}=$$

$$=|k|^{\sigma}\left[D(t;\ \tau;\ \tau)-c^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}(1-e^{-i\tau\lambda})^{n}(1-e^{i\tau\lambda})^{n}\frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}}\right]=$$

$$=|k|^{\sigma}\tau^{2n}[F(+0)-F(-0)].$$

Но

$$k^{2n} \neq |k|^\sigma, \quad 0 < \sigma < 2n.$$

2°. Остается показать, что при выполнении соотношений (59) и (60) имеет место (61) и, соответственно, (62). Но (61), очевидно, следует из (59), а для того чтобы получить (62), надо в представлении (2) вместо

$$\frac{(1+i\lambda)^n}{\lambda^n} dE_\lambda g$$

подставить

$$\frac{c}{|\lambda|^{\frac{\sigma+1}{2}}} d\tilde{\zeta}(\lambda),$$

где $\tilde{\zeta}(\lambda)$ — нормированная спираль с однородными и ортогональными приращениями, определяемая равенством:

$$\tilde{\zeta}(\lambda_1) = \int_0^{\lambda_1} \frac{(1+i\lambda)^n |\lambda|^{\frac{\sigma+1}{2}}}{c\lambda^n} dE_\lambda g \tag{69}$$

$$\left(\|\tilde{\zeta}(\lambda_1)\|^2 = \int_0^{|\lambda_1|} \frac{(1+\lambda^2)^n |\lambda|^{\sigma+1}}{c^2\lambda^{2n}} (dE_\lambda g, g) = \right.$$

$$\left. = \int_0^{|\lambda_1|} \frac{(1+\lambda)^{2n} |\lambda|^{\sigma+1}}{c^2 |\lambda|^{2n}} \cdot \frac{c^2 |\lambda|^{2n-\sigma-1}}{(1+\lambda^2)^n} d\lambda = |\lambda_1| \right).$$

ТЕОРЕМА 4.4. *Структурные характеристики кривых* (61) *и* (62) *можно найти соответственно по формулам:*

$$D(t) = b t^{2n}, \text{ где } b = \frac{(-1)^n}{(2n)!} [F(+0) - F(-0)], \tag{70}$$

$$D(t) = b|t|^\sigma \text{ при } \sigma \neq 2k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad 0 < \sigma < 2n, \tag{71}$$

где

$$b = (-1)^{k+1} \frac{4c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} d\lambda \tag{72}$$

$$\left(k = \left[\frac{\sigma}{2}\right] \text{— целая часть числа } \frac{\sigma}{2} \right).$$

$$D(t) = b|t|^\sigma \ln|t| \text{ при } \sigma = 2k; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{73}$$

где

$$b = (-1)^{k+1} \frac{2c^2}{\sigma!}. \tag{74}$$

Доказательство. Формула (70) очевидно вытекает из (61), (16), и (14). Структурная функция кривой (62) равна

$$D(t; \tau_1; \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \cdot \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} dF(\lambda) =$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{(1+\lambda^2)^n}{\lambda^{2n}} \cdot \frac{|\lambda|^{2n-\sigma-1}}{(1+\lambda^2)^n} d\lambda =$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\tau_1\lambda})^n (1 - e^{i\tau_2\lambda})^n \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}}. \tag{75}$$

Здесь могут представиться два случая.

I. Пусть $\sigma \neq 2k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда, обозначив через $m = [\sigma]$ целую часть числа σ, имеем:

$$D(t;\ \tau_1;\ \tau_2) = \Delta^{(2n)}_{\tau_1 (-\tau_2)} D(t) = \Delta^{(n)}_{(-\tau_2)} (\Delta^{(n)}_{\tau_1} D(t)),$$

где

$$D(t) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{it\lambda} - 1 - it\lambda - \cdots - \frac{(it\lambda)^m}{m!}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}} =$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda} - 1 - i\lambda - \cdots - \frac{(i\lambda)^m}{m!}\right] \frac{\frac{d\lambda}{|t|}}{\left|\frac{\lambda}{t}\right|^{\sigma+1}} =$$

$$= |t|^\sigma c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda} - 1 - i\lambda - \cdots - \frac{(i\lambda)^m}{m!}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}} = |t|^\sigma \cdot D(1) = b|t|^\sigma. \qquad (76)$$

Чтобы найти значение b, продифференцируем по t при $t = 1$ следующее равенство:

$$b|t|^\sigma = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{it\lambda} - 1 - it\lambda - \cdots - \frac{(it\lambda)^m}{m!}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1}};$$

мы получаем:

$$\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)\, b = (-1)^k c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda} - 1) \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} \text{ для } m = 2k,$$

$$\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)\, b = (-1)^k c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda} - 1 - i\lambda) \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} \text{ для } m = 2k+1.$$

Отсюда следует:

$$b = (-1)^k \frac{c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda}-1)\, d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} =$$

$$= (-1)^k \frac{c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos\lambda - 1)\, d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{4c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}}\, d\lambda, \qquad (77)$$

$$b = (-1)^k \frac{c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda} - 1 - i\lambda)\, d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} =$$

$$= (-1)^k \frac{c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos\lambda - 1)\, d\lambda}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{4c^2}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma+1-2k)} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{|\lambda|^{\sigma+1-2k}}. \qquad (78)$$

Сравнение равенств (76), (77) и (78) доказывает (71) и (72).

II. Пусть теперь $\sigma = 2k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$D(t;\ \tau_1;\ \tau_2) = \Delta^{(2n)}_{\tau_1 (-\tau_2)} D_1(t),$$

где

$$D_1(t) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{it\lambda} - 1 - it\lambda - \cdots - \frac{(it\lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{(it\lambda)^{2k}}{(2k)!\,(1+\lambda^2)}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2k+1}}. \quad (79)$$

Рассмотрим разность

$$D(t) = D_1(t) - t^{2k} D_1(t).$$

Имеем:

$$D(t) = c^2 \int_{+\infty}^{\infty} \left[e^{it\lambda} - 1 - it\lambda - \cdots - \frac{(it\lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{(it\lambda)^{2k}}{(2k)!\,(1+\lambda^2)}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2k+1}} -$$

$$- t^{2k} D_1(1) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda} - 1 - i\lambda - \cdots - \frac{(i\lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} -\right.$$

$$\left. - \frac{(i\lambda)^{2k} t^2}{(2k)!\,(t^2+\lambda^2)}\right] \frac{t^{2k}}{|\lambda|^{2k+1}} d\lambda - t^{2k} c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda} - 1 - i\lambda - \cdots - \frac{(i\lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} -\right.$$

$$\left. - \frac{(i\lambda)^{2k}}{(2k)!\,(1+\lambda^2)}\right] \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2k+1}} = (-1)^{k+1} \frac{2c^2 t^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 (t^2-1)}{(t^2+\lambda^2)(1+\lambda^2)} \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{2c^2}{(2k)!} t^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda^2} - \frac{1}{t^2+\lambda^2}\right) \lambda\, d\lambda =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{2c^2 t^{2k}}{(2k)!} \lim_{T\to\infty} [\ln(1+\lambda^2) - \ln(t^2+\lambda^2)]_0^T = (-1)^{k+1} \frac{2c^2}{(2k)!} t^{2k} \ln|t|.$$

Функция $D(t)$ — искомая. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.5. *Кривая вида* (61) *сингулярна, а вида* (62) — *регулярна, причем для нее в качестве функции* $\varphi(p)$ *в разложении* (25) *можно принять функцию*

$$\varphi(p) = \varphi_0(p) = \begin{cases} d_{c\sigma} p^{\frac{\sigma-1}{2}} & \text{при } p \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } p < 0, \end{cases} \quad (80)$$

где $d_{c\sigma}$ — *некоторое постоянное число.*

Доказательство. В соответствии с формулами (54), (55) и (60) имеем:

$$\Delta_\tau^{(n)} \varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\omega} (1 - e^{-i\tau\omega})^n \frac{b_1(\omega)}{\omega^n} d\omega, \quad (81)$$

где

$$b_1(\omega) = \lim_{\vartheta\to+0} \exp\left\{i\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda(\omega-i\vartheta)}{\lambda-(\omega-i\vartheta)} \cdot \frac{\log(c^2|\lambda|^{2n-\sigma-1})}{1+\lambda^2} d\lambda\right\} =$$

$$= \lim_{\vartheta\to+0} \exp\left\{i\theta - \frac{2n-\sigma-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda(\omega-i\vartheta)}{\lambda-(\omega-i\vartheta)} \cdot \frac{\log(c^2\lambda^2)}{1+\lambda^2} d\lambda\right\}. \quad (82)$$

Но

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda(\omega-i\vartheta)}{\lambda-(\omega-i\vartheta)} \cdot \frac{\log(c^2\lambda^2)}{1+\lambda^2} d\lambda$$

есть сумма вычетов подинтегральной функции относительно точек $(-i)$ и $(\omega - i\vartheta)$, которая равна

$$\frac{\log c^2(-i)^2}{2} + \log c^2(\omega - i\vartheta)^2. \tag{83}$$

Сравнивая (82), (83) и (81), мы видим, что при $k > 0$

$$b_1(k\omega) = k^{n-\frac{\sigma+1}{2}} b_1(\omega) \tag{84}$$

и

$$\Delta_{k\tau}^{(n)}\varphi(kp) = \Delta_{k\tau}^{(n)}\varphi_0(kp) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikp\omega}(1 - e^{-ikp\omega})^n \frac{b_1(\omega)}{\omega^n}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\omega}\left(1 - e^{-i\frac{\tau}{k}\omega}\right)^n \cdot \frac{b_1\left(\frac{\omega}{k}\right)}{\left(\frac{\omega}{k}\right)^n}\frac{d\omega}{k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\omega}(1 - e^{-i\tau\omega})^n \frac{b_1(\omega)k^{\frac{\sigma-1}{2}}}{\omega^n}\, d\omega = k^{\frac{\sigma-1}{2}}\Delta_{\tau}^{(n)}\varphi_0(p).$$

Так как $\varphi_0(p) = 0$ при $p < 0$, а следовательно,

$$\Delta_{\tau}^{(n)}\varphi_0(p) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \varphi_0(p - k\tau) = \varphi_0(p) \text{ при } 0 < p < \tau,$$

то, взяв $\tau > \max\{p, kp\}$, имеем почти всюду по p:

$$\varphi_0(kp) = k^{\frac{\sigma-1}{2}}\varphi_0(p),$$

т. е

$$\varphi_0(p) = d_{c\sigma}p^{\frac{\sigma-1}{2}}, \quad p > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 4.6. Формула (62) показывает, что $\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t)$ для регулярной кривой $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразования подобия, можно получить одним из следующих способов:

1) если σ не есть четное число, то $\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t)$ или совпадает с n-ми приращениями одной из кривых $\eta_\gamma(t)$, $0 < \gamma < 2$, со стационарными первыми приращениями

$$\Delta_\tau\eta_\gamma(t) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})\frac{d\tilde{\zeta}(\lambda)}{|\lambda|^{\frac{\gamma+1}{2}}}, \tag{85}$$

или же совпадает с n-ми приращениями кривой, получаемой из $\eta_\gamma(t)$ интегрированием (однократным или многократным).

2) Если σ есть четное число, то $\Delta_\tau^{(n)}\zeta(t)$ или совпадает с n-ми приращениями непрерывной кривой $\eta_2(t)$ со стационарными вторыми приращениями

$$\Delta_\tau^{(2)}\eta_2(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}(1 - e^{-i\tau\lambda})^2 \frac{d\tilde{\zeta}(\lambda)}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}}, \tag{86}$$

или же совпадает с n-ми приращениями кривой, получаемой из $\eta_2(t)$ интегрированием.

Таким образом, при изучении кривых (62) мы могли бы ограничиться случаями (85) и (86).

Поступило
10. V. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яглом А. М. и Пинскер М. С., Случайные процессы со стационарными приращениями n-го порядка, Доклады Ак. наук СССР, 90, № 5 (1953), 731—734.

[2] Пинскер М. С. и Яглом А. М., О линейном экстраполировании случайных процессов со стационарными n-ми приращениями, Доклады Ак. наук СССР, 94, № 3 (1954), 385—389.

[3] Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных статистических процессов, Успехи мат. наук, 5 (1938), 42—51.

[4] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, № 6, 1941.

[5] Колмогоров А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 5 (1941), 3—14.

[6] Колмогоров А. Н., Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений, Доклады Ак. наук СССР, 26 (1940), 6—9.

[7] Колмогоров А. Н., Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 26 (1940), 115—118.

[8] Засухин В. Н., К теории многомерных стационарных случайных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 33 (1941), 435—437.

[9] Крейн М. Г., Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, Доклады Ак. наук СССР, 46 (1945), 339—342.

[10] Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи мат. наук, 7, в. 5 (51) (1952), 3—168.

[11] Wold H., A study in the analysis of stationary time series, Upsala, 1938.

[12] Cramer H., On the theory of stationary random processes, Ann. Math., 41, № 1 (1940), 215—230.

[13] Karhunen K., Über die Struktur stationärer zufäliger Funktionen, Ark. f. Mat., 1, H. 2 (1950), 141—160.

[14] Karhunen K., Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A, I, № 37, Helsinki (1947), 79.

[15] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М. — Л., Гостехиздат, 1950.

[16] Плеснер А. И. и Рохлин В. А., Спектральная теория линейных операторов, Успехи мат. наук, 1 (11) (1946), 71—193.

[17] Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1951.

[18] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955) 345—360

С. Л. КАМЕНОМОСТСКАЯ

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В работе рассматривается вопрос о поведении решений первой краевой задачи для уравнения

$$\varepsilon\Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y)$$

при стремлении ε к нулю. Указан способ построения предельной функции $U(x, y)$ и доказана сходимость решений к $U(x, y)$.

Будем исследовать поведение решений $u_\varepsilon(x, y)$ уравнения

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = D(x, y), \tag{1}$$

принимающих на границе Γ области G значения $\varphi(P)$ (P — произвольная точка границы), когда малый параметр $\varepsilon > 0$ стремится к нулю.

Впервые эта задача была поставлена Н. Левинсоном и решена им для некоторого частного случая [см. (1)]. В частности, в работе Левинсона предполагается, что

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0$$

в области G.

В работе автора (6) рассмотрен другой частный случай, причем также предполагается, что $A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0$.

Вторая и третья краевые задачи для уравнения (1) исследованы О. А. Олейник [см. (2) и (3)].

В настоящей работе на функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ мы не будем накладывать никаких ограничений, кроме условий гладкости. Основной результат работы сформулирован в теореме 1.

Будем предполагать, что функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и $D(x, y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области G_0, содержащей $\bar{G} = G + \Gamma$; $\varphi(P)$ — непрерывная функция длины дуги и граница Γ области G состоит из конечного числа замкнутых кривых, координаты x и y каждой из которых являются два раза непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуги. Кроме того, будем предполагать, что в $G + \Gamma$ $C(x, y) < 0$.

Выполнения перечисленных условий достаточно для существования при $\varepsilon \neq 0$ единственного решения уравнения (1), принимающего на границе значения $\varphi(P)$ [см. (4)].

Установим на границе Γ положительное направление так, чтобы при обходе границы в положительном направлении область G оставалась

слева. Обозначим через σ длину дуги кривой Γ и пусть σ возрастает при обходе кривой в положительном направлении.

Обозначим через Γ_1 множество тех точек границы, где

$$B(x, y)\frac{dx}{d\sigma} - A(x, y)\frac{dy}{d\sigma} < 0,$$

через Γ_2 — множество точек, где

$$B(x, y)\frac{dx}{d\sigma} - A(x, y)\frac{dy}{d\sigma} > 0,$$

и через Γ_0 — множество точек, где

$$B(x, y)\frac{dx}{d\sigma} - A(x, y)\frac{dy}{d\sigma} = 0.$$

Точки области $G+\Gamma$, в которых $A^2(x, y) + B^2(x, y) = 0$, будем называть особыми. Множество особых точек обозначим через Ω, множество особых точек, принадлежащих границе, — через Ω_0. Ясно, что Ω и Ω_0 замкнуты.

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y) \tag{2}$$

определяет семейство характеристик уравнения первого порядка:

$$M(U) = A(x, y)\frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial U}{\partial y} + C(x, y)U = D(x, y). \tag{3}$$

Обозначим через s длину дуги интегральной кривой системы (2) и пусть s возрастает с возрастанием параметра t. Уравнение (3) можно записать тогда в следующем виде:

$$\sqrt{A^2+B^2}\frac{dU}{ds} + CU = D. \tag{4}$$

Решением уравнения (3) в области $\bar{G}$ будем называть всякую функцию, которая удовлетворяет уравнению (4) в точках, где

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0,$$

и уравнению

$$C(x, y)U = D(x, y)$$

в точках, где

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) = 0,$$

т. е. на множестве Ω.

Направление вдоль характеристик, которое в каждой точке совпадает с направлением вектора $[A(x, y), B(x, y)]$, будем считать положительным.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}_1$ множество точек границы Γ, в которых характеристики при продолжении в положительном направлении выходят из $\bar{G}$.

В дальнейшем нам придется пользоваться принципом максимума для решений $u_\varepsilon(x, y)$ уравнения (1), а именно: при всех ε

$$\max|u_\varepsilon(x, y)| \leqslant \max\left\{|\varphi(P)|, \left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right| = K_0.$$

Доказательство такого принципа максимума имеется, например, в работе ([1]).

Докажем следующую лемму:

ЛЕММА 1. *Существует единственное ограниченное решение* $U(x, y)$ *уравнения* (3), *принимающее на* $\tilde{\Gamma}_1$ *значения* $\varphi(P)$. *При этом всюду в* $G+\Gamma$

$$|U(x, y)| \leqslant \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку Q области G. Пусть L — характеристика, проходящая через Q. Рассмотрим поведение L при возрастании параметра t. Возможны следующие случаи:

1. При некотором значении $t = t_0$ в точке P_0 границы кривая L покидает область $G+\Gamma$. Тогда на L существует единственное решение $U(s)$ уравнения (4), принимающее при $s_0 = s(t_0)$ значение $\varphi(P_0)$. Нетрудно показать, что в любой точке L

$$|U(s)| \leqslant \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|.$$

В самом деле, рассмотрим в плоскости s, U кривую $U(s) = \frac{D(s)}{C(s)}$. В точках, лежащих выше этой кривой, решения уравнения (4) имеют положительную производную, а в точках, лежащих ниже этой кривой,— отрицательную производную. Поэтому, если в какой-нибудь точке

$$|U(s)| \geqslant \max\left|\frac{D(s)}{C(s)}\right|,$$

то в этой точке должно быть

$$|U(s) \leqslant \max|\varphi(P)|.$$

2. При неограниченном возрастании t кривая L остается внутри области, но длина L ограничена при $t \to \infty$. Существование и единственность ограниченного решения доказаны в работе О. А. Олейник ([2]). Всюду на L при этом

$$|U(s)| \leqslant \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|.$$

3. При $t \to \infty$ характеристика L остается внутри области, и длина L неограниченно возрастает при возрастании параметра t. Можно доказать существование и единственность ограниченного решения уравнения (4) аналогично тому, как это доказывается для случая 2 в работе О. А. Олейник. В этом случае на L

$$|U(s)| \leqslant \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|.$$

4. Характеристика L замкнута. Существует единственное периодическое решение $U(s)$ уравнения (4) и

$$|U(s)| \leqslant \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y}\right|.$$

Мы перечислили все возможные случаи поведения характеристики L при возрастании t. В точках, где

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) = 0,$$

полагаем

$$U(x, y) = \frac{D(x, y)}{C(x, y)}.$$

Тем самым во всей области G построена функция $U(x, y)$, являющаяся ограниченным решением уравнения (3) и принимающая на $\tilde{\Gamma}_1$ значения $\varphi(P)$. Для $U(x, y)$ справедливо:

$$|U(x, y)| \leqslant \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|.$$

Из леммы 1 вытекает следующее, важное в дальнейшем

Следствие. *Если* $U_1(x, y)$ *и* $U_2(x, y)$ — *ограниченные решения уравнений*

$$M(U_1) = D_1(x, y),$$
$$M(U_2) = D_2(x, y),$$

принимающие на $\tilde{\Gamma}_1$ *равные значения, и если*

$$|D_1(x, y) - D_2(x, y)| < \alpha$$

в области G, *то*

$$|U_1(x, y) - U_2(x, y)| \leqslant \frac{\alpha}{\min|C|}.$$

Характеристика L, *проходящая через точку границы* $P_0(x, y)$, *касается границы* Γ *в этой точке, если в* $P_0(x, y)$

$$B(x, y)\frac{dx}{d\sigma} - A(x, y)\frac{dy}{d\sigma} = 0, \text{ но } A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0.$$

Для дальнейшего нужно особо выделить тот случай, когда характеристика при возрастании параметра касается границы в точке P_0 и в некоторой окрестности этой точки не выходит за пределы замкнутой области $G + \Gamma$. Такие характеристики будем называть особыми характеристиками. Возможные случаи расположения особых характеристик относительно границы изображены на рис. 1 и 2.



Рис. 1

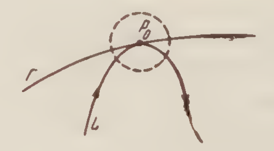


Рис. 2

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $U(x, y)$ — *ограниченное решение уравнения* (3), *принимающее на* $\tilde{\Gamma}_1$ *значения* $\varphi(P)$. *Тогда решения* $u_\varepsilon(x, y)$ *уравнения* (1), *принимающие на границе* Γ *значения* $\varphi(P)$, *при* ε, *стремящемся к нулю, сходятся к* $U(x, y)$ *равномерно в любой замкнутой области, не содержащей особых характеристик и тех точек границы, которые принадлежат* $\Gamma \setminus \tilde{\Gamma}_1$.

Замечание 1. Сформулированную теорему достаточно доказать для случая, когда правая часть уравнения (1) $D(x, y)$ равна нулю в

некоторой окрестности множества Ω. К этому случаю мы придем, положив

$$v_\varepsilon(x, y) = u_\varepsilon(x, y) - \frac{D(x, y)}{C(x, y)},$$

где $u_\varepsilon(x, y)$ — решение уравнения (1). Очевидно, что

$$L_\varepsilon(v_\varepsilon) = L_\varepsilon(u_\varepsilon) - L_\varepsilon\left(\frac{D}{C}\right) =$$
$$= D(x, y) - \varepsilon\Delta\left(\frac{D}{C}\right) - A(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D}{C}\right) -$$
$$- B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{C}\right) - C(x, y)\frac{D(x, y)}{C(x, y)} =$$
$$= -\varepsilon\Delta\left(\frac{D}{C}\right) - A(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D}{C}\right) - B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{C}\right) = D_1(x, y, \varepsilon).$$

Здесь $D_1(x, y, \varepsilon)$ — непрерывная функция, принимающая в особых точках сколь угодно малые значения при достаточно малом ε. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что решения $v_\varepsilon(x, y)$ уравнения

$$L_\varepsilon(v_\varepsilon) = D_1(x, y, \varepsilon),$$

принимающие на границе значения

$$\varphi_1(P) = \varphi(P) - \frac{D(P)}{C(P)},$$

сходятся к функции

$$V(x, y) = U(x, y) - \frac{D(x, y)}{C(x, y)}.$$

Пусть α — произвольное, сколь угодно малое число. Выберем δ и ε_0 так, чтобы в δ-окрестности Ω для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполнялось

$$|D_1(x, y, \varepsilon)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $D_\alpha(x, y)$, не зависящая от ε при достаточно малом ε_0, равная нулю в δ-окрестности Ω и такая, что

$$|D_\alpha(x, y) - D_1(x, y, \varepsilon)| < \alpha$$

в $G + \Gamma$ для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Кроме того, можно считать ε_0 настолько малым, что

$$|D_\alpha(x, y) - M(V)| = \left|D_\alpha(x, y) - D_1(x, y, \varepsilon) - \varepsilon\Delta\left(\frac{D}{C}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |D_\alpha(x, y) - D_1(x, y, \varepsilon)| + \varepsilon\left|\Delta\left(\frac{D}{C}\right)\right| < 2\alpha$$

для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Пусть $z_\varepsilon(x, y)$ — решение уравнения

$$L_\varepsilon(z_\varepsilon) = D_\alpha(x, y),$$

принимающее на Γ значения

$$\varphi_1(P) = \varphi(P) - \frac{D(P)}{C(P)},$$

а $Z(x, y)$ — ограниченное решение уравнения

$$M(Z) = D_\alpha(x, y),$$

принимающее на Г значения $\varphi_1(P)$.

На основании следствия из леммы 1,

$$|Z(x, y) - V(x, y)| < \frac{2\alpha}{\min|C|}.$$

Кроме того, из принципа максимума для уравнения (1) следует:

$$|z_\varepsilon(x, y) - v_\varepsilon(x, y)| < \frac{\alpha}{\min|C|}.$$

Поэтому

$$|v_\varepsilon(x, y) - V(x, y)| < |z_\varepsilon(x, y) - Z(x, y)| + \frac{3\alpha}{\min|C|}.$$

Таким образом, если последовательность $z_\varepsilon(x, y)$ сходится к $Z(x, y)$, то последовательность $v_\varepsilon(x, y)$ сходится к $V(x, y)$, а отсюда будет следовать справедливость теоремы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $D(x, y) = 0$ в некоторой окрестности множества Ω.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть O — особая точка области $G + \Gamma$. Для любых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ существуют дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$ и число γ такие, что $\varphi_\delta^\alpha(x, y) = 1$ вне δ-окрестности точки O, $\varphi_\delta^\alpha(x, y) = 0$ в γ-окрестности точки O и $\left|\sqrt{A^2 + B^2}\,\frac{d\varphi_\delta^\alpha}{ds}\right| < \alpha$ в области $G + \Gamma$.*

Доказательство. Функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ дважды дифференцируемы и в точке O обращаются в нуль. Следовательно, существует постоянная K такая, что

$$\sqrt{A^2(x, y) + B^2(x, y)} < K\rho(x, y),$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние от точки x, y до точки O. Пусть δ — число, определенное в условии леммы. Рассмотрим отрезок $[0, \delta]$ на оси t. Ясно, что для любого $\alpha > 0$ существуют $\gamma < \delta$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t)$ такие, что $\psi(t) = 1$ при $t \geqslant \delta$, $\psi(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \gamma$ и $\left|\frac{d\psi}{dt}\right| < \frac{\alpha}{Kt}$. Положим

$$\varphi_\delta^\alpha(x, y) = \psi[\rho(x, y)],$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние от точки с координатами x, y до точки O. Функция $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$ удовлетворяет поставленным условиям. В самом деле,

$$\left|\frac{d\varphi_\delta^\alpha}{ds}\right| < \frac{\alpha}{K\rho(x, y)}$$

и, следовательно,

$$\left|\sqrt{A^2 + B^2}\,\frac{d\varphi_\delta^\alpha}{ds}\right| < K\cdot\rho(x, y)\cdot\frac{\alpha}{K\rho(x, y)} = \alpha.$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если O — особая точка, не принадлежащая границе, то для любого $\alpha_0 > 0$ существуют такие ε_0 и δ_0, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \alpha_0$$

в δ_0-окрестности точки O.

Доказательство. Выберем число δ так, чтобы в δ-окрестности точки O функция $D(x, y)$ равнялась нулю и чтобы расстояние от точки O до границы области было больше δ. Пусть $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$ — функция, построенная в лемме 2. Величина α будет определена в дальнейшем.

Обозначим через R^δ δ-окрестность точки O, через C^δ — границу R^δ. Если

$$K_0 = \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x, y)}{C(x, y)}\right|,$$

то, на основании принципа максимума для уравнения (1) и леммы 1, в области G

$$|u_\varepsilon(x, y)| < K_0$$

и

$$|U(x, y)| < K_0.$$

На C^δ функция $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$ равна единице, следовательно, на C^δ

$$|u_\varepsilon(x, y)| < K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y),$$
$$|U(x, y)| < K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y).$$

Кроме того, в области R^δ

$$M(K_0\varphi_\delta^\alpha \pm U) = K_0 M(\varphi_\delta^\alpha) = K_0\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{d\varphi_\delta^\alpha}{ds} + K_0 C\varphi_\delta^\alpha \leqslant K_0\alpha,$$

так как

$$\left|\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{d\varphi_\delta^\alpha}{ds}\right| \leqslant \alpha$$

и

$$C(x, y)\,\varphi_\delta^\alpha(x, y) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что в R^δ функция $K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y) \pm U(x, y)$ не может иметь отрицательного минимума, меньшего, чем $-\frac{K_0\alpha}{\min|C|}$. Но на C^δ значение $K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y) \pm U(x, y)$ положительно, следовательно, всюду в R^δ

$$K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y) \pm U(x, y) \geqslant -\frac{K_0\alpha}{\min|C|}$$

и

$$|U(x, y)| \leqslant K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y) + \frac{K_0\alpha}{\min|C|}.$$

Аналогично, для $u_\varepsilon(x, y)$ в R^δ получаем:

$$L_\varepsilon(K_0\varphi_\delta^\alpha \pm u_\varepsilon) \leqslant K_0\varepsilon\max|\Delta\varphi_\delta^\alpha| + K_0\alpha$$

и

$$|u_\varepsilon(x, y)| \leqslant K_0\varphi_\delta^\alpha(x, y) + \frac{K_0\varepsilon}{\min|C|}\cdot\max|\Delta\varphi_\delta^\alpha| + \frac{K_0\alpha}{\min|C|}.$$

Пусть α_0 — произвольное, сколь угодно малое число. Выберем α так, чтобы

$$\frac{K_0 \alpha}{\min |C|} < \frac{\alpha_0}{4},$$

и затем так определим ε_0, чтобы

$$K_0 \varepsilon_0 \frac{\max |\Delta \varphi_\delta^\alpha|}{\min |C|} < \frac{\alpha_0}{4}.$$

Тогда в R^δ

$$|u_\varepsilon(x, y)| < K_0 \varphi_\delta^\alpha(x, y) + \frac{\alpha_0}{2}$$

и

$$|U(x, y)| < K_0 \varphi_\delta^\alpha(x, y) + \frac{\alpha_0}{4}.$$

Но в γ-окрестности точки O $\varphi_\delta^\alpha(x, y) = 0$ (лемма 2) и, следовательно, в γ-окрестности точки O

$$|u_\varepsilon(x, y)| < \frac{\alpha_0}{2}, \quad |U(x, y)| < \frac{\alpha_0}{4}$$

и

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \frac{3}{4}\alpha_0 < \alpha_0.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Будем называть δ-окрестностью кривой множество точек, каждая из которых находится от кривой на расстоянии, меньшем δ.

ЛЕММА 3. *Если L_0 — замкнутая характеристика, не касающаяся границы, то для любых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ существуют дважды непрерывно дифференцируемая функция $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ и число γ такие, что $\psi_\delta^\alpha(x, y) = 1$ вне δ-окрестности кривой L_0, $\psi_\delta^\alpha(x, y) = 0$ в γ-окрестности L_0 и $\left|\sqrt{A^2 + B^2} \frac{d\psi_\delta^\alpha}{ds}\right| < \alpha$ в области G.*

Доказательство. Построим сначала функцию $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ в той части области G, которая является внешней по отношению к кривой L_0.

Пусть δ — число, определенное в условии леммы. Можно доказывать лемму, предполагая, что δ меньше, чем расстояние кривой L_0 до множества Ω.

Возьмем любую точку Q_0 на характеристике L_0 и пусть Q_0Q_1 — отрезок внешней нормали к кривой L_0. По известной теореме, длину отрезка Q_0Q_1 можно выбрать настолько малой, что у характеристики L, проходящей через любую точку $Q \in [Q_0Q_1]$, хотя бы одна из двух полухарактеристик лежала внутри δ-окрестности кривой L_0 [см. ([5])]. При этом возможны следующих два случая:

1. Может оказаться, что все характеристики, пересекающие отрезок Q_0Q_1, замкнуты. Пусть через точку Q_1 проходит замкнутая характеристика L_1. Обозначим через T область, заключенную между кривыми L_0 и L_1. Введем в области T новые переменные $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ так, чтобы функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ являлись решениями уравнений

$$A\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad B\frac{\partial \eta}{\partial x} - A\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Как доказано в работе (¹), эти уравнения имеют в области дважды дифференцируемые решения $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, причем

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0, \quad \eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0.$$

Ясно, что координатные линии $\xi = \text{const}$ есть характеристики, а $\eta = \text{const}$ — ортогональные к ним кривые. Будем считать, что на характеристике L_0 $\xi = 0$, внутри T $\xi > 0$, а на L_1 $\xi = \xi_1$.

Определим функцию $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ в области T следующим образом. Рассмотрим монотонную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\theta(\xi)$, равную нулю при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ $(\xi_0 < \xi_1)$ и единице при $\xi \geqslant \xi_1$.

Положим в T

$$\psi_\delta^\alpha[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = \theta(\xi).$$

Вне L_1 положим

$$\psi_\delta^\alpha(x, y) = 1.$$

Ясно, что

$$\frac{d\psi_\delta^\alpha}{ds} = 0,$$

следовательно, функция $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ удовлетворяет поставленным условиям.

2. На отрезке Q_0Q_1 есть точка, через которую проходит незамкнутая характеристика. Будем считать, что такой точкой является Q_1 и через Q_1 проходит кривая L_1. Пусть $Q_2 \in [Q_0Q_1]$ есть ближайшая к Q_1 точка пересечения L_1 с отрезком $[Q_1Q_0]$. Область, ограниченную кривой L_0, дугой Q_1Q_2 характеристики L_1 и отрезком $[Q_1Q_2]$, обозначим через T_0 (рис. 3).

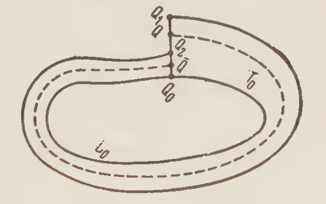


Рис. 3

Будем отсчитывать длину дуги s_1 характеристики L, входящей в T_0 через отрезок $[Q_1, Q_2]$, от точки пересечения L с этим отрезком, причем $s_1 > 0$ внутри T_0. Ясно, что для любой функции $f(x, y)$ $\frac{df}{ds_1}$ может отличаться от $\frac{df}{ds}$ только знаком.

Пусть r — расстояние переменной точки $Q \in [Q_1Q_2]$ от Q_2. Ясно, что если какая-нибудь точка $P(x, y) \in T_0$ лежит на характеристике, пересекающей отрезок $[Q_1Q_2]$, то ее координаты x и y являются функциями r и s_1. При этом для точек, не лежащих на L_1, функции $r(x, y)$ и $s_1(x, y)$ однозначны.

Пусть характеристика L пересекает отрезок $[Q_1Q_2]$ в точке Q, а точка $\bar{Q}$ есть ближайшая к Q точка пересечения кривой L с отрезком Q_1Q_0. Обозначим через $l(Q)$ длину дуги кривой $Q\bar{Q}$. На отрезке $[Q_1Q_2]$ рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\theta(r)$. Пусть

$\theta(r)=0$ вблизи точки Q_2 и $\theta(r)=l(Q)$ для точек Q из некоторой окрестности точки Q_1.

Рассмотрим, кроме того, дважды непрерывно дифференцируемую функцию переменного t $\psi(t)$ такую, что $\psi(t)=1$ при $t\leqslant 0$, $\psi(t)=0$ при $t\geqslant t_0$ и

$$\left|\frac{d\psi}{dt}\right|<\frac{\alpha}{\max\limits_{T_0}\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ввиду произвольности t_0, такая функция существует при любом, как угодно малом α.

Определим теперь функцию $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ на характеристиках, пересекающих отрезок $[Q_1Q_2]$, следующим образом. Если характеристика L пересекает отрезок $[Q_1Q_2]$ в точке Q и $Q_2Q=r$, то положим на L

$$\psi_\delta^\alpha[x(r, s_1),\ y(r, s_1)]=\psi[s_1-\theta(r)].$$

В остальной части области T_0, где функция $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ может оказаться не определенной, положим

$$\psi_\delta^\alpha(x, y)=0.$$

Вне внешней границы T_0 положим

$$\psi_\delta^\alpha(x, y)=1.$$

Определенная таким путем функция $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ является непрерывной. Действитетельно, она непрерывна на L_1, так как принимает в точке Q_2 значение $\psi(0)=1$. Непрерывность в остальных точках области T_0 очевидна.

Покажем, что $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ дважды дифференцируема во всей области T_0. Для этого достаточно показать, что $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ дважды дифференцируема в точках, лежащих на характеристиках, входящих в T_0 через отрезок $[Q_1Q_2]$.

Рассмотрим какую-нибудь точку $P(x, y)$ в области T_0 и пусть через нее проходит характеристика L, пересекающая $[Q_1Q_2]$ в точке Q. Предположим сначала, что $L\neq L_1$. Пусть E_1 и E_2 — точки внутри отрезка $[Q_1Q_2]$ такие, что $Q\in[E_1, E_2]$. Характеристики, проходящие через E_1 и E_2, обозначим, соответственно, через L' и L''. В области, заключенной между кривыми L' и L'', от переменных x, y можно перейти к переменным $r(x, y)$, $s_1(x, y)$. При этом, как доказано в ([1]),

$$\frac{\partial(r, s_1)}{\partial(x, y)}\neq 0, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s_1)}\neq 0,$$

где функции $r(x, y)$ и $s_1(x, y)$ имеют непрерывные частные производные 2-порядка. Функция $\psi_\delta^\alpha[x(r, s_1),\ y(r, s_1)]$ дважды дифференцируема по переменным r, s_1, следовательно, она дифференцируема и по переменным x, y.

Для случая $Q=Q_2$ можно повторить предыдущие рассуждения, поскольку на отрезке Q_0Q_1 в некоторой окрестности Q_2

$$\psi_\delta^\alpha(x, y)=\psi(0).$$

Построенная функция $\psi_\delta^\alpha(x, y)$, очевидно, удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, $\frac{d\psi_\delta^\alpha}{ds_1}$ и $\frac{d\psi_\delta^\alpha}{ds}$ могут отличаться только знаком и, следовательно,

$$\left|\sqrt{A^2+B^2}\frac{d\psi_\delta^\alpha}{ds}\right|\leqslant \max_{T_0}\sqrt{A^2+B^2}\frac{\alpha}{\max\limits_{T_0}\sqrt{A^2+B^2}}=\alpha.$$

Таким же путем определяется $\psi_\delta^\alpha(x, y)$ внутри кривой L_0.

Таким образом, лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Если Q_0 — точка на замкнутой характеристике L_0, не касающейся границы, то для любого $\alpha_0>0$ существуют такие ε_0 и δ_0, что для всех $\varepsilon<\varepsilon_0$*

$$|u_\varepsilon(x, y)-U(x, y)|<\alpha_0$$

в δ_0-окрестности точки Q_0.

Замечание 2. Теорему 3 достаточно доказать для случая, когда правая часть уравнения (1) $D(x, y)$ равна нулю в некоторой δ-окрестности кривой L_0. Справедливость этого утверждения можно показать так же, как в замечании 1. Вместо функции $\frac{D(x,y)}{C(x,y)}$ здесь надо рассмотреть такую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $z_{L_0}(x, y)$, которая на L_0 совпадает с $U(x, y)$.

Доказательство теоремы 3 проводится таким же образом, как доказательство теоремы 2. только вместо δ-окрестности особой точки надо рассматривать δ-окрестность кривой L_0, а вместо функции $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$, построенной в лемме 2, функцию $\psi_\delta^\alpha(x, y)$, построенную в лемме 3.

ТЕОРЕМА 4. *Если $Q_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка области G, причем*

$$A^2(x_0, y_0)+B^2(x_0, y_0)\neq 0,$$

и характеристика L_0, проходящая через Q_0, не замкнута и не является особой характеристикой, то для любого $\alpha_0>0$ существуют такие ε_0 и δ_0, что в δ_0-окрестности точки Q_0

$$|u_\varepsilon(x, y)-U(x, y)|<\alpha_0$$

для всех $\varepsilon<\varepsilon_0$.

Доказательство. Рассмотрим поведение характеристики L_0 при возрастании параметра s. Возможны следующие случаи.

1. При некотором значении $s=s_0$ кривая L_0 в точке $P_0\in\Gamma_1$ выходит из области G. Выберем β-окрестность точки Q_0 так, чтобы через каждую точку Q, принадлежащую этой окрестности, проходила характеристика, выходящая из G в какой-нибудь точке $P_0\in\Gamma_1$ (рис. 4). Проведем в точке Q_0 нормаль к кривой L_0, и пусть Q_1 и Q_2 — точки этой нормали, причем

Q_1 и Q_2 принадлежат β-окрестности Q_0. Пусть через Q_1 проходит характеристика L_1, через Q_2 — характеристика L_2. Точки, в которых эти кривые выходят из области G, обозначим, соответственно, через P_1 и P_2. Соединим Q_1 и Q_2 какой-нибудь кривой N таким образом, чтобы дуга Q_0P_0 характеристики L_0 оказалась внутри области T, ограниченной кривыми Q_1P_1, P_1P_2, P_2Q_2 и N. Для области T справедлива теорема, доказанная Левинсоном в работе ([1]), о равномерной сходимости решений $u_\varepsilon(x, y)$ и $U(x, y)$ во всякой внутренней по отношению к T области. Так как для точки Q можно подобрать δ_0 так, чтобы δ_0-окрестность Q_0 находилась внутри T, то для рассматриваемого случая теорема доказана.

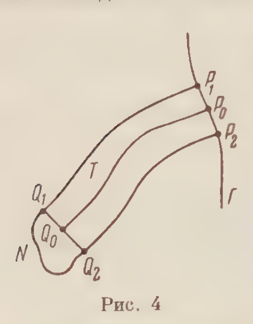


Рис. 4

2. Характеристика L_0 выходит из области G в точке $P_0 \in \tilde{\Gamma}_1 - \Gamma_1$. Так же, как и для предыдущего случая, построим область T, рассматривая вместо множества Γ_1 множество $\tilde{\Gamma}_1$. Нетрудно заметить, что на Γ существует такая функция $\varphi_1(P)$, что

$$|\varphi_1(P) - \varphi(P)| < \frac{\alpha_0}{4}$$

и решение $U_1(x, y)$ уравнения (3), принимающее на $\tilde{\Gamma}_1$ значения $\varphi_1(P)$, имеет непрерывные производные второго порядка в области T. Но если на границе задана функция $\varphi_1(P)$, то для точки Q_0 теорема доказана. Отсюда, а также из принципа максимума для решений уравнений (1) и (3) вытекает справедливость теоремы и в случае, когда $P_0 \in \tilde{\Gamma}_1 - \Gamma_1$.

3. Может оказаться, что ω-предельным множеством характеристики L_0 является некоторая замкнутая кривая R. В этом случае можно найти столь малую β-окрестность точки Q_0, что любая характеристика, выходящая из этой окрестности, имеет своим ω-предельным множеством ту же кривую R [см. ([5]), гл. II, § 1].

Возьмем на кривой R произвольную точку E (рис. 5). Согласно теореме 3, при любом α_1 для точки $E \in R$ можно найти такую δ_1-окрестность E, что в этой окрестности

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{3}$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_1$. Пусть P_0 — точка на L_0, принадлежащая δ_1-окрестности точки E. Проведем в точке P_0 нормаль P_1P_2 к кривой L_0, принадлежащую δ_1-окрестности точки E. Точки P_1 и P_2 можно взять настолько близко к P_0, чтобы ни одна характеристика не пересекала два раза отрезка P_1P_2 и чтобы характеристики L_1 и L_2, проходящие соответственно через P_1 и P_2, выходили из β-окрестности Q_0. Кроме того, по известной теореме, точки P_1 и P_2 могут быть выбраны так, чтобы у характеристик, пересекающих отрезок P_1P_2, одна из полутраекторий лежала внутри

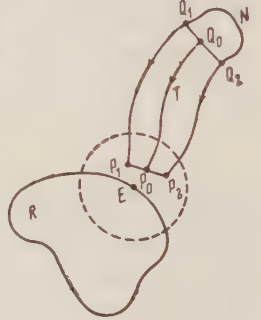


Рис. 5

δ_1-окрестности кривой R [см. ([5]), гл. II, § 1]. Как и в предыдущем случае, строим область T, ограниченную кривыми Q_1P_1, P_1P_2, P_2Q_2 и кривой N, соединяющей точки Q_1 и Q_2.

Так же, как и при доказательстве теоремы 3, будем считать, что $D(x, y) = 0$ в δ_1-окрестности кривой R. Тогда ясно, что на отрезке P_1P_2 значение $U(P)$ (P — произвольная точка отрезка P_1P_2) равно нулю. Следовательно, на том же отрезке

$$|u_\varepsilon(P)| < \frac{\alpha_0}{3}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Пусть $v_\varepsilon(x, y)$ — решение в области T уравнения (1), принимающее на границе T нулевое значение. Выберем δ_0 так, чтобы замкнутая δ_0-окрестность точки Q_0 находилась внутри T. По упомянутой выше теореме Левинсона, в δ_0-окрестности точки Q_0 величина $|v_\varepsilon(x, y) - U(x, y)|$ может быть сделана меньше $\frac{\alpha_0}{3}$ при достаточно малом ε.

Оценим разность $u_\varepsilon(x, y) - v_\varepsilon(x, y)$. Заметим, что на отрезке P_1P_2

$$|u_\varepsilon(P) - v_\varepsilon(P)| < \frac{\alpha_0}{3},$$

а на кривых Q_1P_1, Q_2P_2 и N

$$|u_\varepsilon(x, y) - v_\varepsilon(x, y)| < K_0,$$

где

$$K_0' = \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x,y)}{C(x,y)}\right|.$$

Но в этом случае из той же теоремы Левинсона следует, что в δ_0-окрестности точки Q_0 при достаточно малом ε

$$|u_\varepsilon(x, y) - v_\varepsilon(x, y)| < \frac{2}{3}\alpha_0.$$

Следовательно, в этой же окрестности при достаточно малом ε

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| \leqslant |u_\varepsilon(x, y) - v_\varepsilon(x, y)| + \\ + |v_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_0 = \alpha_0.$$

Тем самым для рассматриваемого случая теорема доказана.

4. Возьмем, наконец, случай, когда ω-предельное множество кривой L_0 содержит по крайней мере одну особую точку. Пусть это будет точка O. Если точка O не принадлежит границе области, то, воспользовавшись теоремой 2, можно доказать сходимость в точке Q_0 аналогично тому, как это доказывалось в случае 3. Следовательно, надо рассмотреть случай, когда точка O лежит на границе области.

Построим, так же как и в лемме 2, функцию $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$, равную нулю в γ-окрестности точки O. При этом δ выберем настолько малым, чтобы в δ-окрестности точки O функция $D(x, y)$ равнялась нулю. Величина α будет определена в дальнейшем. Границу γ-окрестности точки O обозначим через C_γ, границу δ-окрестности — через C_δ. Пусть при движении вдоль характеристики L_0 в положительном направлении от Q_0 точка P_0 является первой точкой пересечения L_0 с C_γ (рис. 6). Выберем γ_1 настолько малым, чтобы все характеристики, выходящие из γ_1-окрестности

Q_0, пересекали C_γ. Рассмотрим характеристики L_1 и L_2, выходящие из γ_1-окрестности точки Q_0. Первые точки пересечения L_1 и L_2 с C_γ обозначим соответственно через P_1 и P_2, первые точки пересечения L_1 и L_2 с C_δ — через E_1 и E_2.

Криволинейный четырехугольник $E_1P_1P_2E_2$ будем обозначать через T_1. Функция $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$ равна нулю на C_γ и единице на C_δ. Отсюда следует, что на кривой E_1E_2

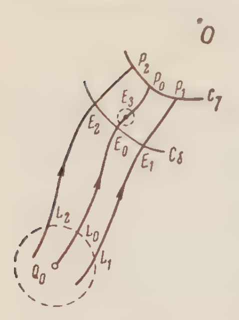


Рис. 6

$$1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y) = 0,$$

а на P_1P_2

$$1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y) = 1.$$

Кроме того, будем считать, что

$$1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y) = 0$$

в некоторой окрестности E_1E_2. Этого можно было добиться при построении функции $\varphi_\delta^\alpha(x, y)$. Возьмем в T_1 точку $E_3 \in L_0$ так, чтобы в β_0-окрестности E_3

$$1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y) = 0.$$

Оценим сначала разность $u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)$ в β_0-окрестности точки E_3. Для этого рассмотрим в области T_1 функцию $z_\varepsilon(x, y)$ такую, что $L_\varepsilon(z_\varepsilon) = 0$, а на границе T_1 значения $z_\varepsilon(x, y)$ совпадают со значениями функции

$$K_0[1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y)],$$

где

$$K_0 = \max|\varphi(P)| + \max\left|\frac{D(x,y)}{C(x,y)}\right|.$$

Ясно, что в области T_1

$$L_\varepsilon[-z_\varepsilon + K_0(1 - \varphi_\delta^\alpha)] = -K_0\varepsilon\Delta\varphi_\delta^\alpha + C(x, y)K_0 -$$
$$-K_0\left[A(x, y)\frac{\partial\varphi_\delta^\alpha}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial\varphi_\delta^\alpha}{\partial y} + C(x, y)\varphi_\delta^\alpha(x, y)\right] < \varepsilon K_0 \max|\Delta\varphi_\delta^\alpha| +$$
$$+ K_0\alpha + K_0C(x, y)[1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y)] < \varepsilon K_0 \max|\Delta\varphi_\delta^\alpha| + K_0\alpha.$$

Выберем α так, чтобы $K_0\alpha < \frac{\alpha_0}{4}$, а затем ε_1 так, чтобы для $\varepsilon < \varepsilon_1$ выполнялось неравенство

$$K_0\varepsilon\max|\Delta\varphi_\delta^\alpha| < \frac{\alpha_0}{4}.$$

Так как на границе области T_1

$$-z_\varepsilon(x, y) + K_0[1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y)] = 0,$$

то всюду в области T_1

$$-z_\varepsilon(x, y) + K_0[1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y)] > -\frac{\alpha_0}{2\min|C|}$$

и, следовательно,

$$z_\varepsilon(x, y) < K_0[1 - \varphi_\delta^\alpha(x, y)] + \frac{\alpha_0}{2\min|C|}.$$

Значит, в β_0-окрестности точки E_3

$$z_\varepsilon(x, y) < \frac{\alpha_0}{2\min|C|}$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Пусть теперь $w_\varepsilon(x, y)$ — решение в области T_2 уравнения (1), принимающее на кривых P_1E_1, E_1E_2 и E_2P_2 значения K_0, а на P_1P_2 — нулевые значения вне некоторых окрестностей точек P_1 и P_2.

По теореме Левинсона, существует такое ε_2, что в β_0-окрестности точки E_3 для $\varepsilon < \varepsilon_2$ величина $w_\varepsilon(x, y)$ меньше $\frac{\alpha_0}{2\min|C|}$.

На границе области T_1

$$|u_\varepsilon(Q)| \leqslant w_\varepsilon(Q) + z_\varepsilon(Q)$$

(Q — точка границы), следовательно, всюду в T_1

$$|u_\varepsilon(x, y)| \leqslant w_\varepsilon(x, y) + z_\varepsilon(x, y).$$

Поэтому в β_0-окрестности точки E_3

$$|u_\varepsilon(x, y)| < \frac{\alpha_0}{2\min|C|} + \frac{\alpha_0}{2\min|C|} = \frac{\alpha_0}{\min|C|}$$

для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Аналогичным образом можно показать, что в β_0-окрестности E_3

$$|U(x, y)| < \frac{\alpha_0}{\min|C|}.$$

Из последних двух неравенств следует, что для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \frac{2\alpha_0}{\min|C|}$$

в той же окрестности точки E_3.

Исследование поведения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности точки Q_0 проводится дальше так же, как и в предыдущих случаях.

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает справедливость утверждения сформулированной выше основной теоремы 1. В самом деле, возьмем замкнутую область $H \in \bar{G}$ так, чтобы H не содержала точек $\Gamma \setminus \tilde{\Gamma}_1$ и особых характеристик. Для каждой точки области H справедлива одна из теорем 2, 3 и 4. Окружим каждую точку области H соответствующей δ_0-окрестностью, т. е. кругом радиуса δ_0. Из бесконечной системы кругов можно выбрать конечную подсистему, покрывающую область H. Каждому кругу из этой подсистемы соответствует какое-то определенное ε_0. Взяв из всех этих ε_0 минимальное, $\varepsilon_{0\min}$, мы получим, что в H для $\varepsilon < \varepsilon_{0\min}$

$$|u_\varepsilon(x, y) - U(x, y)| < \alpha_0.$$

Следствие. *Функция $U(x, y)$ непрерывна в тех точках области $G+\Gamma$, которые не лежат на особых характеристиках и не принадлежат множеству Ω_0.*

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность О. А. Олейник за постановку задачи и помощь, оказанную при ее решении.

Поступило
17. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Levinson N., The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε, Ann. of Math., N 2 (1950), 428—445.

[2] Олейник О. А., Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных, Математ. сборник, 31/73 : 1 (1952), 104—118.

[3] Олейник О. А., О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных, Доклады Ак. наук СССР, т. 85, № 3 (1952), 493—496.

[4] Lichtenstein L., Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus I: Die erste Randwertaufgabe, Allgemeine ebene Gebiete, Journ. reine und angew. Math., 142 (1913) 1—40.

[5] Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., ГТТИ, 1949.

[6] Каменомостская С. Л., Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных, Математ. сборник, 31/73 : 3 (1952), 703—708.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 361—380

Н. М. КОРОБОВ

ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе изучается специальный класс чисел — «числа с ограниченным отношением» и даются приложения этих чисел к решению задач теории диофантовых приближений с показательными функциями.*

Введение

Пусть q — произвольное целое, большее единицы. Зададим число α его разложением в q-ичной системе счисления:

$$\alpha = 0, \delta_1\delta_2 \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n} \ldots . \tag{1}$$

Для произвольного целого $n \geqslant 1$ рассмотрим n-значные числа $\delta_1 \ldots \delta_n$, $\delta_2 \ldots \delta_{n+1}, \ldots$, образованные соседними знаками разложения (1). Предположим, что для некоторого индекса λ среди первых λ n-значных чисел

$$\delta_1 \ldots \delta_n,\ \delta_2 \ldots \delta_{n+1}, \ldots, \delta_\lambda \ldots \delta_{\lambda+n-1}$$

встретится каждое из q^n существующих в q-ичной системе счисления n-значных чисел. Пусть $\lambda = \lambda(n)$ — наименьший из индексов, обладающих указанным свойством.

Число α назовем *числом с ограниченным отношением*, если найдется константа $C_1 = C_1(\alpha)$ такая, что для всех $n \geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} < C_1.$$

Таким образом, числа с ограниченным отношением обладают тем свойством, что среди первых $\lambda(n) = O(q^n)$ n-значных комбинаций, образованных соседними знаками их q-ичного разложения, встретится любая наперед заданная комбинация знаков.

В первой главе этой работы доказывается существование и дается метод построения чисел с ограниченным отношением. Понятие чисел с ограниченным отношением обобщается затем на многомерный случай (числа с ограниченным общим отношением).

Известно [см., например, ([1]), стр. 53—60], что иррациональные числа α, разложения которых в непрерывную дробь имеют ограниченные неполные частные, обладают следующим свойством: для них и только для них существует константа $C = C(\alpha)$ такая, что неравенства

$$0 < x < Ct, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{t} \tag{2}$$

разрешимы в целых числах x и y при произвольном β и любом $t \geqslant 1$.

---

* Краткое сообщение о части помещенных здесь результатов содержится в работе ([6]).

Во второй главе показано, что задача типа (2) разрешима и для показательных функций: при заданном целом $q \geqslant 2$ для чисел с ограниченным отношением и только для них можно указать константу $C = C(\alpha)$, при которой неравенства

$$0 \leqslant x < Ct, \quad |\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t} \tag{3}$$

разрешимы в целых числах при произвольном β и любом $t \geqslant 1$.

Таким образом, числа с ограниченным отношением в неравенствах (3) играют ту же роль, что и числа с ограниченными неполными частными в неравенствах (2).

Далее, во второй главе показано, что разрешима и общая многомерная задача типа (2): для чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, являющихся числами с ограниченным общим отношением, и только для них существует константа $C = C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ такая, что при любом $t \geqslant 1$ и любых $\beta_1, \ldots, \beta_s$ система неравенств

$$0 \leqslant x < Ct^s, \quad \left.\begin{array}{l} |\alpha_1 q_1^x - y_1 - \beta_1| < \frac{1}{t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\alpha_s q_s^x - y_s - \beta_s| < \frac{1}{t} \end{array}\right|$$

разрешима в целых числах $x, y_1, \ldots, y_s$ (здесь $s \geqslant 1$, $q_1, \ldots, q_s$ — произвольные целые, бо́льшие единицы).

В начале третьей главы при помощи метода, использованного при построении чисел с ограниченным общим отношением, дается элементарное решение задачи о нахождении чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_s$, для которых система функций

$$\alpha_1 q_1^x, \alpha_2 q_2^x, \ldots, \alpha_s q_s^x \tag{4}$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Согласно Борелю, число α называется нормальным, если в его q-ичном разложении

$$\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n} \ldots \tag{1'}$$

при любом заданном целом $n \geqslant 1$ среди n-значных комбинаций, образованных соседними знаками разложения (1′),

$$\delta_{k+1} \ldots \delta_{k+n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

каждая из q^n возможных комбинаций знаков встречается с асимптотически равной частотой [см., например, (7) и (8)].

Понятие нормального числа естественно обобщается для случая системы чисел. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы разложениями в системах счисления соответственно с основаниями $q_1, q_2, \ldots, q_s$:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \delta_1^{(1)} \delta_2^{(1)} \ldots \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_s = 0, \delta_1^{(s)} \delta_2^{(s)} \ldots \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)} \ldots \end{array}$$

Назовем числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *совместно нормальными*, если при любых заданных целых $n_1, \ldots, n_s$ среди групп знаков

$$\left.\begin{array}{c}\delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)}\end{array}\right\} \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

каждая из возможных различных $q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_s^{n_s}$ групп встречается с асимптотически равной частотой. Легко проверить, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ будут совместно нормальными в том и только в том случае, когда система функций (4) равномерно распределена. Таким образом в § 1 третьей главы указывается некоторый класс совместно нормальных чисел.

В последнем параграфе исследуется вопрос о числе попаданий дробных долей системы функций

$$\alpha_1 q_1^x, \ \alpha_2 q_2^x, \ \ldots, \ \alpha_s q_s^x$$

в заданную часть единичного s-мерного куба и указывается класс величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых выполняется соотношение

$$N(v) = vP + O\left(P^{1-\frac{1}{s+1}}\right),$$

где v — объем рассматриваемой части куба и $N(v)$ — число попаданий при $x = 1, 2, \ldots, P$.

ГЛАВА I

ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ

§ 1. Доказательство существования чисел с ограниченным отношением основано на использовании нормальных периодических систем $\rho_n(q)$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — целые числа из интервала $0 \leqslant \beta_k \leqslant q-1$. Числа β_k $(k=1, 2, \ldots)$ будем называть знаками. Нормальной периодической системой $\rho_n(q)$ называется система знаков

$$\beta_1\beta_2 \ldots \beta_t\beta_1 \ldots \beta_{n-1} \quad (t = q^n),$$

обладающая тем свойством, что получающиеся из ее соседних знаков q^n n-значных чисел

$$\beta_1 \ldots \beta_n, \ \beta_2 \ldots \beta_{n+1}, \ \ldots, \ \beta_t\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$$

совпадают с совокупностью всех возможных в q-ичной системе счисления q^n n-значных чисел [см., например, ([2]), гл. II, § 3 или ([5]), гл, I]. Систему, состоящую из первых q^n знаков нормальной периодической системы $\rho_n(q)$, будем обозначать через $\rho_n'(q)$.

Пусть дана последовательность систем

$$\rho_1'(q), \ \rho_2'(q), \ \ldots, \ \rho_k'(q), \ \rho_{k+1}'(q), \ \ldots \tag{1}$$

таких, что для любого $k \geqslant 1$ первые знаки системы $\rho_{k+1}'(q)$ дополняют систему $\rho_k'(q)$ до нормальной периодической системы $\rho_k(q)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\psi(k)$ — *любая ограниченная положительная целочисленная функция. При произвольном выборе систем* $\rho_1'(q)$, $\rho_2'(q)$, ... *типа* (1) *всякое число* α, *заданное равенством*

$$\alpha = 0,\underbrace{\rho_1'(q)\ldots\rho_1'(q)}_{\psi(1)}\underbrace{\rho_2'(q)\ldots\rho_2'(q)}_{\psi(2)}\ldots\underbrace{\rho_k'(q)\ldots\rho_k'(q)}_{\psi(k)}\ldots, \qquad (2)$$

является числом с ограниченным отношением *.

Доказательство. Обозначим через M константу, ограничивающую значения функции $\psi(k)$. Пусть A_n — число знаков разложения (2), предшествующих первой из систем $\rho_{n+1}'(q)$. Очевидно,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \psi(k)\, q^k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} q^k < 2Mq^n.$$

В силу выбора числа α, среди первых A_n n-значных чисел, образованных соседними знаками разложения (2), встретятся все n-значные числа, входящие в некоторую систему $\rho_n(q)$ и, таким образом, встретятся все n-значные числа, существующие в q-ичной системе счисления. Согласно определению $\lambda(n)$, получим:

$$\lambda(n) \leqslant A_n < 2Mq^n.$$

Положим $C_1 = 2M$; тогда

$$\lambda(n) < C_1 q^n$$

и, следовательно, α — число с ограниченным отношением.

§ 2. Пусть $s \geqslant 1$ и $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — произвольные целые, бо́льшие единицы. Определим числа $n_\nu = n_\nu(n)$ для каждого целого $n \geqslant 1$ равенствами:

$$n_\nu = \left[\frac{\ln q_1}{\ln q_\nu}\, n\right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Рассмотрим для заданного n всевозможные группы знаков, состоящие из s строк:

$$\left.\begin{matrix} \beta_1^{(1)} \ldots \beta_{n_1}^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ \beta_1^{(s)} \ldots \beta_{n_s}^{(s)} \end{matrix}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь в ν-й строке ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) стоит произвольное n_ν-значное число, записанное в системе счисления с основанием q_ν.

Две группы знаков вида (3) будем считать одинаковыми в том случае, когда каждое из n_ν-значных чисел одной из них совпадает со стоящим в той же строке n_ν-значным числом другой группы. Обозначим через T_n число всех различных групп (3), соответствующих заданному n. Пользуясь определением чисел n_ν, получим:

$$T_n = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_s^{n_s} \leqslant q_1^{sn}.$$

---

* В равенстве (2) (и в аналогичных равенствах далее) каждый знак каждой из систем $\rho_k'(q)$ ($k = 1, 2, \ldots$) следует рассматривать как очередной знак q-ичного разложения α.

Пусть величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ заданы своими разложениями в системах счисления соответственно с основаниями $q_1, \ldots, q_s$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \delta_1^{(1)} \ldots \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_s &= 0, \delta_1^{(s)} \ldots \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)} \ldots \end{aligned}$$

Обозначим через $\lambda_s = \lambda_s(n)$ наименьший из индексов, обладающих тем свойством, что для $k = 0, 1, \ldots, \lambda_s - 1$ среди групп знаков

$$\left.\begin{matrix} \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{k+1}^{(s)} \ldots \delta_{k+n_s}^{(s)} \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

встретится каждая из T_n возможных различных групп (3). Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых существует константа $C_1 = C_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ такая, что для всех $n \geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{\lambda_s(n)}{q_1^{sn}} < C_1,$$

назовем *числами с ограниченным общим отношением.*

Числа с ограниченным общим отношением обладают, следовательно, тем свойством, что среди первых $\lambda_s(n) = O(q_1^{sn})$ групп знаков (4), образованных соседними знаками q_ν-ичных разложений чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, встретится любая из возможных групп знаков вида (3). Доказательство существования чисел с ограниченным общим отношением основано на использовании специальных систем знаков $r_n^{(\nu)}(i)$, совокупность которых можно характеризовать как «многомерные» нормальные периодические системы.

Обозначим через $t_n^{(\nu)}(i)$ число знаков системы $r_n^{(\nu)}(i)$. Системы $r_n^{(\nu)}(i)$ и числа $t_n^{(\nu)}(i)$ для $\nu + i \leqslant s$ определим рекуррентными равенствами:

$$\left.\begin{gathered} r_n^{(\nu)}(i) = \\ = \underbrace{r_n^{(\nu)}(i-1) \ldots r_n^{(\nu)}(i-1)}\, 0\, \underbrace{r_n^{(\nu)}(i-1) \ldots r_n^{(\nu)}(i-1)}\, 0 \ldots \underbrace{r_n^{(\nu)}(i-1) \ldots r_n^{(\nu)}(i-1)}\, 00 \ldots 0 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{v_\nu} \\ r_n^{(\nu)}(0) = \rho'_{n_\nu}(q_\nu) \ldots \rho'_{n_\nu}(q_\nu), \quad t_n^{(\nu)}(0) = q_\nu^{n_\nu} + q_\nu^{n_\nu} q_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} + \cdots + q_\nu^{n_\nu} \ldots q_1^{n_1}. \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Здесь число фигурных скобок $v_\nu = v_\nu(i)$ равно общему наибольшему делителю чисел $q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}$ и $t_n^{(\nu)}(i-1)$, каждая фигурная скобка содержит $v_\nu^{-1} q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}$ систем $r_n^{(\nu)}(i-1)$, число нулей, стоящих после последней фигурной скобки, равно $q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}} - v_\nu + 1$. Системы $\rho'_{n_\nu}(q_\nu)$ выбраны так, чтобы n_ν-значные числа, с которых они начинаются, состояли из одних нулей $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$.

Системы $r_n^{(\nu)}(i)$ понимаются в равенстве (5) как $t_n^{(\nu)}(i)$-значные числа, записанные в системе счисления с основанием q_ν; каждый знак каждой из систем $r_n^{(\nu)}(i-1)$ рассматривается при этом как очередной знак числа $r_n^{(\nu)}(i)$.

Покажем, что для $\nu+i\leqslant s$ справедливо равенство:

$$t_n^{(\nu)}(i)=q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}+q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}q_{\nu+i-1}^{n_{\nu+i-1}}+\cdots+q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}\ldots q_1^{n_1}. \tag{6}$$

Действительно, в силу определения $t_n^{(\nu)}(0)$, равенство (6) выполняется при $i=0$. Из (5) для значений i, принадлежащих интервалу $1\leqslant i\leqslant s-\nu$, получим:

$$t_n^{(\nu)}(i)=(t_n^{(\nu)}(i-1)\,q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}v_\nu^{-1}+1)\,v_\nu+q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}-v_\nu=$$
$$=t_n^{(\nu)}(i-1)\,q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}+q_{\nu+i}^{n_{\nu+i}}.$$

Отсюда по индукции следует справедливость равенства (6) для любого i из интервала $1\leqslant i\leqslant s-\nu$. В частности, согласно (6),

$$t_n^{(\nu)}(s-\nu)=q_s^{n_s}+q_s^{n_s}q_{s-1}^{n_{s-1}}+\cdots+q_s^{n_s}\cdots q_1^{n_1}=t_n^{(s)}\ (0) \tag{7}$$

и, следовательно, системы

$$r_n^{(1)}(s-1),\ r_n^{(2)}(s-2),\ \ldots\ r_n^{(s)}\ (0)$$

состоят из одинакового числа знаков.

Рассмотрим таблицу знаков:

$$\begin{array}{l|l} r_n^{(1)}(s-1) & \underbrace{0\ldots0}_{n_1-1} \\ r_n^{(2)}(s-2) & \underbrace{0\ldots0}_{n_2-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_n^{(s)}(0) & \underbrace{0\ldots0}_{n_s-1} \end{array} \tag{8}$$

Обозначим через $\gamma_k^{(\nu)}$ знак, стоящий в k-м столбце и ν-й строке этой таблицы, и выпишем s чисел

$$\left.\begin{array}{c} \gamma_{k+1}^{(1)}\cdots\gamma_{k+n_1}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{k+1}^{(s)}\cdots\gamma_{k+n_s}^{(s)} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Первые знаки чисел (9) образуют $(k+1)$-й столбец таблицы (8); для каждого $\nu=1,2,\ldots,s$ число, образованное соседними знаками ν-й строки в (9), согласно определению систем $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$, представляет собой n_ν-значное число в системе счисления с основанием q_ν. Таким образом, совокупность знаков (9) является группой знаков типа (3).

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Среди групп знаков* (9), *получающихся при* $k=0,1,2,\ldots,\ t_n^{(s)}(0)-1$, *содержится каждая из возможных групп знаков вида* (3).

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $s=1$. В этом случае таблица (8) состоит из одной строки

$$r_n^{(1)}(0)\,\underbrace{0\ldots0}_{n_1-1}$$

и, в силу (5), представляет собой нормальную периодическую систему $\rho_{n_1}(q_1)$. Группа знаков (9) также состоит из одной строки:

$$\gamma_{k+1}^{(1)} \ldots \gamma_{k+n_1}^{(1)}. \tag{10}$$

При $k = 0,1,2,\ldots,t-1$, где $t = t_n^{(1)}(0) = q_1^{n_1}$, числа (10) в соответствии с равенством

$$r_n^{(1)}(0)\,0 \ldots 0 = \rho_{n_1}(q_1)$$

образуют совокупность всех существующих n_1-значных чисел в системе счисления с основанием q_1, чем утверждение леммы доказано для $s = 1$.

Пусть теперь $s \geqslant 2$ и утверждение леммы доказано для $s-1$. Докажем его для s. Пользуясь определением систем $r_n^{(\nu)}(i)$ [см. (5)], запишем таблицу (8) в виде:

$$\begin{array}{l}
\left[\begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots \\ \cdot \\ \ldots \end{matrix} \begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix}\right] \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \left[\begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots \\ \cdot \\ \ldots \end{matrix} \begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix}\right] \begin{matrix} 0 \ldots \\ \ldots \\ 0 \ldots \end{matrix} \\
\rho'_{n_s}(q_s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} \left[\begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots \\ \cdot \\ \ldots \end{matrix} \begin{pmatrix} r_n^{(1)}(s-2) \\ \cdots\cdots \\ r_n^{(s-1)}(0) \end{pmatrix}\right] \left.\begin{matrix} 0\ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0\ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots 0 \end{matrix} \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rho'_{n_s}(q_s) \;|\; 0 \ldots 0
\end{array} \tag{11}$$

Согласно (5), первые знаки систем $r_n^{(\nu)}(i)$ совпадают со знаками систем $\rho'_{n_\nu}(q_\nu)$. Следовательно, в силу выбора систем $\rho'_{n_\nu}(q_\nu)$, ν-я строка каждой круглой скобки в (11) начинается n_ν-значным числом, состоящим из одних нулей ($\nu = 1,2,\ldots,s-1$).

Таким образом, круглые скобки в (11) можно рассматривать как левые части таблиц (8), составленных с заменой s на $s-1$.

Обозначим через $\delta_k^{(\nu)}$ знак, стоящий в ν-й строке и k-м столбце таблицы (11). Согласно индукционному предположению, среди групп знаков

$$\left.\begin{matrix} \delta_{k+1}^{(1)} \ldots \delta_{k+n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{k+1}^{(s-1)} \ldots \delta_{k+n_{s-1}}^{(s-1)} \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

при $k = 0,1,\ldots,t_n^{(s-1)}(0)-1$ встретится каждая возможная группа вида:

$$\left.\begin{matrix} \beta_1^{(1)} \ldots \beta_{n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_1^{(s-1)} \ldots \beta_{n_{s-1}}^{(s-1)} \end{matrix}\right\}. \tag{13}$$

Пусть k пробегает значения $0,1,\ldots,t_n^{(s)}(0)-1$. Тогда в совокупность групп (12) войдут группы, возникающие из всех круглых скобок, содержащихся в (11). Фиксируем произвольную группу чисел (13). Пусть первый раз эта группа совпадает с группой (12) при $k = k_0$. Очевидно, эта же группа будет повторяться при любом k вида

$$k = k_0 + (\mu_1 - 1)\,t_n^{(s-1)}(0) + (\mu_2 - 1)\left(1 + t_n^{(s-1)}(0)\,q_s^{n_s} v_{s-1}^{-1}\right), \tag{14}$$

где v_{s-1} — общий наибольший делитель чисел $t_n^{(s-1)}(0)$ и $q_s^{n_s}$,

$$\mu_1 = 1,2,\ldots, q_s^{n_s} v_{s-1}^{-1}, \quad \mu_2 = 1,2,\ldots, v_{s-1}.$$

Легко видеть, что всякая величина z, имеющая вид

$$z = z_0 + ax + \left(1 + \frac{ab}{d}\right) y,$$

где $d = (a, b)$, пробегает полную систему вычетов по модулю b, когда x и y пробегают значения

$$x = 0,1,2,\ldots, \frac{b}{d} - 1, \quad y = 0,1,2,,\ldots, d-1.$$

Таким образом, k в (14) пробегает полную систему вычетов по модулю $q_s^{n_s}$. Следовательно, выбранная группа чисел (13), встречаясь в (11), комбинируется с каждым из n_s-значных чисел, входящих в состав систем $\rho'_{n_s}(q_s)$, расположенных в последней строке таблицы (11).

Так как группа чисел (13) была выбрана произвольно, то отсюда получим, что в (11) встречается любая группа из s чисел

$$\left.\begin{matrix} \beta_1^{(1)} \ldots \beta_{n_1}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_1^{(s-1)} \ldots \beta_{n_{s-1}}^{(s-1)} \\ \beta_1^{(s)} \ldots \beta_{n_s}^{(s)} \end{matrix}\right\},$$

чем утверждение леммы полностью доказано.

Замечание. Если числа $q_1, \ldots, q_s$ попарно просты, то при доказательстве утверждения основной леммы можно пользоваться величинами $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$ с более простым строением, чем в общем случае. Так, например, можно положить:

$$r_n^{(\nu)}(s-\nu) = \rho'_{n_\nu}(q_\nu) \ldots \rho'_{n_\nu}(q_\nu) \quad (\nu = 1,2,\ldots, s),$$

где число систем $\rho'_{n_\nu}(q_\nu)$ равно $(q_1^{n_1} \ldots q_s^{n_s})\, q_\nu^{-n_\nu}$. Доказательство леммы проводится в этом случае, как и раньше, при помощи индукции.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой ограниченной положительной целочисленной функции $\psi(k)$ числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, определенные равенствами*

$$\alpha_\nu = 0,\ \underbrace{r_1^{(\nu)}(s-\nu) \ldots r_1^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(1)} \ldots \underbrace{r_k^{(\nu)}(s-\nu) \ldots r_k^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(k)} \ldots$$

$$(\nu = 1,2,\ldots, s), \tag{15}$$

*являются числами с ограниченным общим отношением *.*

Доказательство. Выпишем числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 = 0,\, r_1^{(1)}(s-1) \ldots r_1^{(1)}(s-1) \ldots r_k^{(1)}(s-1) \ldots r_k^{(1)}(s-1) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_s = 0,\, r_1^{(s)}(0) \ldots r_1^{(s)}(0) \ldots r_k^{(s)}(0) \ldots r_k^{s}(0) \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \tag{16}$$

* Каждый знак каждой из систем $r_k^{(\nu)}(s-\nu)$ в разложении (15) (и в аналогичных разложениях далее) следует понимать как очередной знак q_ν-ичного разложения α_ν.

Так как при $\nu = 1, 2, \ldots, s$ число знаков $t_k^{(\nu)}(s-\nu)$ в каждой из систем $r_k^{(\nu)}(s-\nu)$ одинаково, то одинаковым будет и число знаков, предшествующих первой из систем $r_{n+1}^{(\nu)}(s-\nu)$ в разложении каждой из величин α_ν. Обозначим это число через B_n. Пользуясь равенствами (15), получим:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} t_k^{(\nu)}(s-\nu)\,\psi(k) = \sum_{k=1}^{n} t_k^{(s)}(0)\,\psi(k).$$

Пусть M — константа, которой ограничена функция $\psi(k)$. Согласно (7) записывая, для краткости, n_ν вместо $n_\nu(k)$, получим:

$$t_k^{(s)}(0) = q_s^{n_s} + q_s^{n_s} q_{s-1}^{n_{s-1}} + \ldots + q_s^{n_s} \ldots q_1^{n_1} \leqslant q_1^{k} + q_1^{2k} + \cdots + q_1^{sk} < 2q_1^{sk},$$

и, следовательно,

$$B_n < 2M \sum_{k-1}^{n} q_1^{sk} < 4\,Mq_1^{sn}.$$

Рассматривая в равенствах (16) группы знаков, указанные в определении $\lambda_s(n)$, и применяя лемму, получим:

$$\lambda_s(n) \leqslant B_n < 4Mq_1^{sn},$$

чем теорема доказана.

ГЛАВА II

ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

§ 1. ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы существовало число $C > 0$, для которого при любых β и $t \geqslant 1$ найдутся целые числа x и y, удовлетворяющие неравенствам*

$$0 \leqslant x < Ct, \quad |\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы α было числом с ограниченным отношением.

Доказательство. Определим целые n и ν неравенствами:

$$q^{n-1} \leqslant t < q^n,$$

$$\frac{\nu}{q^n} \leqslant \{\beta\} < \frac{\nu+1}{q^n}.$$

Очевидно будет $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant \nu \leqslant q^n - 1$. Запишем дробь $\frac{\nu}{q^n}$ в q-ичной системе счисления:

$$\frac{\nu}{q^n} = 0, \beta_1 \ldots \beta_n.$$

В силу определения ν, получим:

$$\{\beta\} = 0, \beta_1 \ldots \beta_n + \frac{\theta}{q^n} \quad (0 \leqslant \theta < 1).$$

Пусть α — число с ограниченным отношением, заданное своим разложением в q-ичной системе счисления: $\alpha = 0, \delta_1\delta_2 \ldots$. Тогда для некоторого x из интервала

$$0 \leqslant x \leqslant C_1 q^n \tag{2}$$

n-значное число $\delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n}$ совпадет с числом $\beta_1 \ldots \beta_n$. Для указанного значения x будет:

$$\{\alpha q^x\} = 0, \delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n}\delta_{x+n+1} \ldots = 0, \beta_1 \ldots \beta_n + \frac{\theta_1}{q^n} \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Выберем $y = [\alpha q^x] - [\beta]$; тогда

$$\alpha q^x - y - \beta = \{\alpha q^x\} - \{\beta\} = \frac{\theta - \theta_1}{q^n}. \tag{3}$$

Используя очевидные неравенства

$$\left|\frac{\theta_1 - \theta}{q^n}\right| < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{t},$$

$$C_1 q^n < qC_1 t = Ct,$$

получим из (2) и (3):

$$0 \leqslant x < Ct,$$

$$|\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t},$$

чем доказана достаточность условий теоремы.

Пусть теперь α — произвольное число, для которого неравенства (1) разрешимы при любых β и $t \geqslant 1$. Допустим, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{q^n} = \infty.$$

Тогда найдется целое положительное $n = n(C)$ такое, что

$$\lambda(n) > 2Cq^n.$$

Выберем $t = 2q^n$. В силу последнего неравенства, на интервале $0 \leqslant x < Ct$ в q-ичном разложении

$$\alpha = 0, \delta_1 \ldots \delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n} \ldots$$

встретится не каждое n-значное число. Пусть $\beta_1 \ldots \beta_n$ — одно из таких не встретившихся n-значных чисел. Выберем

$$\beta = 0,\beta_1 \ldots \beta_n + \frac{1}{2q^n}.$$

Тогда для всех целых x и y $(0 \leqslant x < Ct)$ будет:

$$|\alpha q^x - y - \beta| \geqslant \frac{1}{2q^n} = \frac{1}{t},$$

что противоречит выбору α. Отсюда следует, что $\lambda(n) = O(q^n)$, чем теорема доказана полностью.

Замечание. Для чисел α, указанных в теореме 1, функция αq^x

равномерно распределена * и, следовательно, эти числа α являются нормальными. Однако не всякое число с ограниченным отношением является нормальным в смысле Бореля. Так, например, число

$$\alpha = 0, \rho_1'(q)\underbrace{0\ldots0}_{q}\rho_2'(q)\underbrace{0\ldots0}_{q^2}\ldots\rho_k'(q)\underbrace{0\ldots0}_{q^k}\ldots$$

является числом с ограниченным отношением, но, очевидно, не будет нормальным.

§ 2. В задаче о приближениях вида

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{t} \text{ или } |\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t}, \qquad (4)$$

где $0 \leqslant x < Ct$, можно потребовать, чтобы неравенства (4) были разрешимы не для всех $t \geqslant 1$ (как это делалось в начале главы), а лишь для некоторой последовательности неограниченно возрастающих значений t. Именно такой характер (с еще большим ослаблением требований) имеет фундаментальная теорема П. Л. Чебышева о существовании бесконечного числа целочисленных решений неравенства

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{C}{x} \qquad (5)$$

для любого иррационального α и любого β при $C = 2$ [см., например, (4), стр. 237—276].

Для случая показательных функций из теоремы 1 этой главы следует, что существуют величины α, для которых при $C = 2q$ и произвольном β неравенство

$$|\alpha q^x - y - \beta| < \frac{C}{x} \qquad (6)$$

имеет бесконечное множество целочисленных решений. Заметим, что неравенство (6), в отличие от аналогичного неравенства (5) для линейной функции, может иметь бесконечное число решений, очевидно, не при любом иррациональном α и даже не при любом α, для которого дробные доли функции αq^x равномерно распределены.

Покажем, что константу $C = 2q$ в неравенстве (6) можно улучшить до $1 + \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число.

Пусть α задано q-ичным разложением

$$\alpha = 0, \rho_{n_1}'(q)\rho_{n_2}'(q)\ldots\rho_{n_k}'(q)\ldots, \qquad (7)$$

где величины $\rho_{n_k}'(q)$ выбраны произвольно, но так, что выполняется условие: для $k \geqslant 1$ первые n_k знаков системы $\rho_{n_{k+1}}'(q)$ совпадают с первыми знаками $\rho_{n_k}'(q)$ и $n_{k+1} \geqslant 2n_k$.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого α, заданного разложением* (7), *при произвольно малом $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$|\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1+\varepsilon}{x} \qquad (8)$$

* Это утверждение легко проверить, пользуясь, например, теоремой 2 из работы (8).

для любого β имеет бесконечное множество целочисленных решений.

Доказательство. Пусть k_0 выбрано так, что при $k > k_0$ будет

$$q^{n_1} + \cdots + q^{n_{k-1}} + q^{n_k} < (1+\varepsilon)\, q^{n_k}.$$

Пусть, далее, x принадлежит интервалу

$$q^{n_1} + \cdots + q^{n_{k-1}} \leqslant x \leqslant q^{n_1} + \cdots + q^{n_{k-1}} + q^{n_k}.$$

Представим, как и при доказательстве теоремы 1, величины α, $\{\alpha q^x\}$ и $\{\beta\}$ в виде:

$$\alpha = 0, \delta_1\delta_2 \ldots \delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n_k} \ldots,$$
$$\{\alpha q^x\} = 0, \delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n_k} + \frac{\theta_1}{q^{n_k}}, \quad \{\beta\} = 0, \beta_1 \ldots \beta_{n_k} + \frac{\theta}{q^{n_k}}$$
$$(0 \leqslant \theta, \theta_1 < 1).$$

Выбирая x так, чтобы выполнялось равенство

$$\delta_{x+1} \ldots \delta_{x+n_k} = \beta_1 \ldots \beta_{n_k},$$

и полагая

$$y = [\alpha q^x] - [\beta],$$

получим:

$$|\alpha q^x - y - \beta| = |\{\alpha q^x\} - \{\beta\}| = \frac{|\theta_1 - \theta|}{q^{n_k}} < \frac{1+\varepsilon}{x},$$

чем утверждение теоремы доказано.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — произвольные целые числа, бо́льшие единицы. Для того чтобы существовала константа C, при которой для всех $t \geqslant 1$ и любых $\beta_1, \ldots, \beta_s$ система неравенств*

$$0 \leqslant x < Ct^s, \quad \left.\begin{array}{l} |\alpha_1 q_1^x - y_1 - \beta_1| < \frac{1}{t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\alpha_s q_s^x - y_s - \beta_s| < \frac{1}{t} \end{array}\right\}$$

была разрешима в целых числах $x, y_1, \ldots, y_s$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ были числами с ограниченным общим отношением.

Доказательство. Докажем сперва достаточность условий теоремы. Пусть для $\nu = 1, 2, \ldots, s$ числа α_ν и β_ν заданы своими разложениями в системах счисления с основанием q_ν:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= 0, \delta_1^{(\nu)}\delta_2^{(\nu)} \ldots, \\ \beta_\nu &= [\beta_\nu] + 0, \beta_1^{(\nu)}\beta_2^{(\nu)} \ldots. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — числа с ограниченным общим отношением, то существует константа C_1 такая, что для всех целых $n \geqslant 1$ будет

$$\lambda_s(n) < C_1 q_1^{sn}.$$

Выберем n из условия

$$\frac{1}{q_s} q_1^{n-1} \leqslant t < \frac{1}{q_s} q_1^n. \tag{10}$$

Согласно определению функции $\lambda_s(n)$ на интервале $0 \leqslant x < C_1 q_1^{sn}$ найдется значение x, для которого выполняются равенства:

$$\delta_{x+1}^{(\nu)} \ldots \delta_{x+n_\nu}^{(\nu)} = \beta_1^{(\nu)} \ldots \beta_{n_\nu}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{11}$$

(Здесь числа n_ν определены как в главе I, § 2.) Из (9) получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu q_\nu^x &= [\alpha_\nu q_\nu^x] + 0, \delta_{x+1}^{(\nu)} \ldots \delta_{x+n_\nu}^{(\nu)} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^{n_\nu}} \\ \beta_\nu &= [\beta_\nu] + 0, \beta_1^{(\nu)} \ldots \beta_{n_\nu}^{(\nu)} + \frac{\theta_\nu'}{q_\nu^{n_\nu}} \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant \theta_\nu, \theta_\nu' < 1.$$

Выберем x так, чтобы выполнялись равенства (11); тогда для

$$y_\nu = [\alpha_\nu q_\nu^x] - [\beta_\nu]$$

будет:

$$|\alpha_\nu q_\nu^x - y_\nu - \beta_\nu| = \left| \frac{\theta_\nu - \theta_\nu'}{q_\nu^{n_\nu}} \right| < \frac{1}{q_\nu^{n_\nu}}.$$

В силу определения величин n_ν, пользуясь (10), получим:

$$n_\nu > \frac{\ln q_1}{\ln q_\nu} n - 1, \quad q_\nu^{n_\nu} > \frac{1}{q_\nu} q_1^n,$$

$$\frac{1}{q_\nu^{n_\nu}} < \frac{q_\nu}{q_1^n} \leqslant \frac{q_s}{q_1^n} < \frac{1}{t}.$$

Таким образом, выполняются неравенства

$$|\alpha_\nu q_\nu^x - y_\nu - \beta_\nu| < \frac{1}{t},$$

где y_ν и x — целые, $0 \leqslant x < C_1 q_1^{sn}$. Но, согласно (10),

$$q_1^n < q_1 q_s t, \quad C_1 q_1^{sn} < C_1 q_1^s q_s^s t^s = Ct^s$$

и, следовательно, $0 \leqslant x < Ct^s$, чем достаточность условий доказана.

Перейдем к доказательству необходимости условий. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — произвольная система чисел, для которых существует константа C такая, что при любых $\beta_1, \ldots, \beta_s$ и любом $t \geqslant 1$ разрешимы неравенства

$$0 \leqslant x < Ct^s, \quad |\alpha_\nu q_\nu^x - y_\nu - \beta_\nu| < \frac{1}{t} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Выпишем разложения чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ в системах счисления с основаниями, равными соответственно $q_1, \ldots, q_s$:

$$\alpha_1 = 0, \delta_1^{(1)} \ldots \delta_{x+1}^{(1)} \ldots \delta_{x+n_1}^{(1)} \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_s = 0, \delta_1^{(s)} \ldots \delta_{x+1}^{(s)} \ldots \delta_{x+n_s}^{(s)} \ldots$$

Допустим, что эти числа не являются числами с ограниченным общим отношением. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_s(n)}{q_1^{sn}}=\infty.$$

Отсюда следует, что для любого $M>0$ найдется $n=n(M)$ такое, что

$$\lambda_s(n)>Mq_1^{sn}+1.$$

Но тогда среди группы чисел

$$\left.\begin{matrix}\delta_{x+1}^{(1)}\ldots\delta_{x+n_1}^{(1)}\\ \cdots\cdots\\ \delta_{x+1}^{(s)}\ldots\delta_{x+n_s}^{(s)}\end{matrix}\right\}\tag{12}$$

при $x=0, 1, \ldots, [Mq_1^{sn}]$ встретится не каждая из возможных групп вида

$$\left.\begin{matrix}\beta_1^{(1)}\ldots\beta_{n_1}^{(1)}\\ \cdots\cdots\\ \beta_1^{(s)}\ldots\beta_{n_s}^{(s)}\end{matrix}\right\}.\tag{13}$$

Пусть (13) — одна из таких не встретившихся в (12) групп. Выберем

$$M=2^sC,\quad t=2q_1^n,$$

$$\beta_\nu=0,\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}+\frac{1}{2q_\nu^{n_\nu}}\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Тогда для всякого x из интервала $0\leqslant x<Mq_1^{sn}$ найдется хотя бы одно значение $\nu=\nu(x)$ такое, что

$$|\alpha_\nu q_\nu^x-y_\nu-\beta_\nu|\geqslant\frac{1}{2q_\nu^{n_\nu}}\geqslant\frac{1}{2q_1^n}=\frac{1}{t}.\tag{14}$$

Так как

$$Mq_1^{sn}=2^sCq_1^{sn}=Ct^s,$$

то x в (14) принадлежит интервалу $0\leqslant x<Ct^s$. Но тогда неравенство (14) противоречит выбору чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, чем теорема 3 доказана.

ГЛАВА III

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

§ 1. Пусть $s\geqslant1$, $q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_s$ — произвольные целые, бо̀льшие единицы, и $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$ — системы знаков, определенные как в основной лемме главы 1.

ТЕОРЕМА 1. *При любом выборе величин* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, *определенных равенствами*

$$\alpha_\nu=0,\ \underbrace{r_1^{(\nu)}(s-\nu)\ldots r_1^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(1)}\ldots\underbrace{r_k^{(\nu)}(s-\nu)\ldots r_k^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(k)}\ldots,\tag{1}$$

где $\psi(k) > 0$ — *произвольная целочисленная функция, неограниченно возрастающая при* $k \to \infty$, *система функций*

$$\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Доказательство. Пусть x пробегает значения $1, 2, \ldots, P$. Обозначим через v объем произвольной области единичного s-мерного куба и через $N(v)$ — число попаданий в эту область точек $(\{\alpha_1 q_1^x\}, \ldots, \{\alpha_s q_s^x\})$, координаты которых равны соответственно дробным долям функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$.

Согласно определению равномерного распределения, надо показать, что выполняется соотношение

$$N(v) = vP + o(P). \tag{2}$$

Легко видеть, что равенство (2) достаточно доказать для случая, когда область единичного куба представляет собой произвольный s-мерный параллелепипед, у которого ребра параллельны координатным осям и одна из вершин лежит в начале координат. Действительно, через число попаданий в такие параллелепипеды легко выразить число попаданий дробных долей в любой s-мерный параллелепипед, который лежит внутри единичного s-мерного куба и оси которого параллельны координатным осям.

Таким образом равенство (2) будет доказано для любого параллелепипеда, оси которого параллельны координатным осям и, следовательно, для любой области, достаточно хорошо аппроксимируемой параллелепипедами.

Пусть $v = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_s$ — объем s-мерного параллелепипеда, у которого вершина лежит в начале координат, ребра параллельны координатным осям и длины ребер равны соответственно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, где γ_ν — произвольные числа из интервала $0 < \gamma_\nu < 1$. Зададим числа γ_ν для $\nu = 1, 2, \ldots, s$ разложениями в системах счисления с основаниями q_ν:

$$\gamma_\nu = 0, \beta_1^{(\nu)}\beta_2^{(\nu)} \ldots .$$

Обозначим через n произвольное целое, бо́льшее единицы, и определим, как и в гл. I, величины $n_\nu = n_\nu(n)$ равенствами

$$n_\nu = \left[\frac{\ln q_1}{\ln q_\nu} n\right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Пусть $t_n^{(\nu)}(s-\nu)$ обозначает число знаков в системе $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$; тогда [см. (7), гл. 1]

$$t_n^{(\nu)}(s-\nu) = t_n^{(s)}(0) =$$
$$= q_1^{n_1} \cdots q_s^{n_s} + q_2^{n_2} \cdots q_s^{n_s} + \cdots + q_s^{n_s} = q_1^{n_1} \cdots q_s^{n_s} + O(q_1^{(s-1)n}). \tag{3}$$

Обозначим через T_n число знаков разложения (1), предшествующих первой из систем $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$. Очевидно,

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{(s)}(0)\,\psi(i). \tag{4}$$

Выпишем в равенствах (1) каждый знак разложений α_ν:

$$\alpha_\nu = 0,\delta_1^{(\nu)}\delta_2^{(\nu)}\ldots\delta_{x+1}^{(\nu)}\ldots\delta_{x+n_\nu}^{(\nu)}\ldots \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Из равенств

$$\begin{array}{ll} \{\alpha_1 q_1^x\} = 0,\delta_{x+1}^{(1)}\ldots\delta_{x+n_1}^{(1)}\ldots, & \gamma_1 = 0,\beta_1^{(1)}\ldots\beta_{n_1}^{(1)}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \{\alpha_s q_s^x\} = 0,\delta_{x+1}^{(s)}\ldots\delta_{x+n_s}^{(s)}\ldots, & \gamma_s = 0,\beta_1^{(s)}\ldots\beta_{n_s}^{(s)}\ldots \end{array}$$

следует, что точка

$$(\{\alpha_1 q_1^x\}, \ldots, \{\alpha_s q_s^x\}) \tag{5}$$

попадает в указанный выше параллелепипед для тех значений x, при которых для каждого ν из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant s$ n_ν-значное число $\delta_{x+1}^{(\nu)}\ldots\delta_{x+n_\nu}^{(\nu)}$ меньше числа $\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}$. Точка (5) будет лежать вне параллелепипеда, если хотя бы одно из чисел $\delta_{x+1}^{(\nu)}\ldots\delta_{x+n_\nu}^{(\nu)}$ больше соответствующего числа $\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}$. Если среди чисел $\delta_{x+1}^{(\nu)}\ldots\delta_{x+n_\nu}^{(\nu)}$ есть равные числам $\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}$, то точка (5) может лежать как внутри, так и вне параллелепипеда. При подсчете числа попаданий $N(v)$ последний случай будем учитывать в остаточном члене.

Определим k из условия $T_k \leqslant P < T_{k+1}$ и представим P в виде:

$$P = T_k + rt_k^{(s)}(0) + r', \quad 0 \leqslant r < \psi(k), \quad 0 \leqslant r' < t_k^{(s)}(0). \tag{6}$$

Будем, в целях сокращения записи, обозначать n_ν-значные числа $\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}$ через $\tau_\nu(n)$. Тогда

$$\gamma_\nu q_\nu^{n_\nu} = \beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)} + 0,\beta_{n_\nu+1}^{(\nu)}\ldots = \tau_\nu(n) + O(1). \tag{7}$$

Согласно основному свойству систем $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$, когда x пробегает значения из интервала

$$T_n + (r_n - 1)\, t_n^{(s)}(0) \leqslant x < T_n + r_n t_n^{(s)}(0) \quad (1 \leqslant r_n \leqslant \psi(n), \tag{8}$$

в группе знаков, состоящей из s чисел

$$\left.\begin{array}{c} \delta_{x+1}^{(1)}\ldots\delta_{x+n_1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{x+1}^{(s)}\ldots\delta_{x+n_s}^{(s)} \end{array}\right\}, \tag{9}$$

встречается каждая из возможных $q_1^{n_1}\ldots q_s^{n_s}$ различных комбинаций чисел (см. гл. I, основная лемма). Обозначим через R_n число попаданий для тех случаев, когда в группах (9), при изменении x на выбранном интервале, встречается хотя бы одно число, равное соответствующему числу $\beta_1^{(\nu)}\ldots\beta_{n_\nu}^{(\nu)}$. Пусть $N_n(v)$ — общее число попаданий при изменении x на интервале (8); тогда

$$N_n(v) = \tau_1(n)\ldots\tau_s(n) + R_n + O(q_1^{(s-1)n}). \tag{10}$$

(Последнее слагаемое в правой части этого равенства получаем при

учете попаданий, возникающих в связи с наличием остаточного члена в (3).)

Пользуясь определением величин $\tau_\nu(n)$ и R_n, без труда получаем оценки:

$$\tau_\nu(n) = \gamma_\nu q_\nu^{n_\nu} + O(1), \quad \tau_\nu(n) = O(q_1^n), \quad R_n = O(q_1^{(s-1)n}). \tag{11}$$

Теперь равенство (10) примет вид:

$$N_n(v) = \tau_1(n) \ldots \tau_s(n) + O(q_1^{(s-1)n}).$$

Замечая, что, в силу (7),

$$\tau_1(n) \ldots \tau_s(n) = \gamma_1 \ldots \gamma_s q_1^{n_1} \ldots q_s^{n_s} + O(q_1^{(s-1)n})$$

и что

$$q_1^{n_1} \ldots q_s^{n_s} = t_n^{(s)}(0) + O(q_1^{(s-1)n}),$$

получим:

$$\tau_1(n) \ldots \tau_s(n) = \gamma_1 \ldots \gamma_s t_n^{(s)}(0) + O(q_1^{(s-1)n}),$$

$$N_n(v) = v\, t_n^{(s)}(0) + O(q_1^{(s-1)n}).$$

Разобьем интервал $1 \leqslant x \leqslant P$ на части вида (8); тогда для $N(v)$ получим:

$$N(v) = \sum_{n=1}^{k-1} N_n(v)\, \psi(n) + N_k(v)\, r + O(r').$$

Но, в силу (6),

$$r' < t_k^{(s)}(0) = O(q_1^{sk}),$$

следовательно,

$$N(v) = v\left(\sum_{n=1}^{k-1} t_n^{(s)}(0)\, \psi(n) + r t_k^{(s)}(0)\right) + $$
$$+ O\left(\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n} \psi(n) + q_1^{(s-1)k}\, r + q_1^{sk}\right).$$

Согласно определению T_n,

$$\sum_{n=1}^{k-1} t_n^{(s)}(0)\, \psi(n) + r t_k^{(s)}(0) = T_k + r t_k^{(s)}(0) =$$
$$= P - r' = P + O(q_1^{sk}).$$

Таким образом,

$$N(v) = vP + O\left(\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n}\, \psi(n) + q_1^{(s-1)k}\, r + q_1^{sk}\right). \tag{12}$$

Пользуясь тем, что для $\nu = 1, 2, \ldots, s$

$$q_\nu^{n_\nu} = q_\nu^{\left[\frac{\ln q_1}{\ln q_\nu} n\right]} > \frac{1}{q_\nu} q_1^n$$

и, следовательно,

$$t_n^{(s)}(0) > q_1^{n_1} \ldots q_s^{n_s} > \frac{1}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_s} q_1^{sn}, \tag{13}$$

получим:

$$\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n} \cdot \psi(n) < q_1 \ldots q_s \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t_n^{(s)}(0)\,\psi(n)}{q_1^n} = o(T_k),$$

$$q_1^{(s-1)k} \cdot r < q_1 \ldots q_s \frac{r t_k^{(s)}(0)}{q_1^k} = o(r t_k^{(s)}(0)),$$

$$q_1^{sk} = q_1^s \cdot q_1^{s(k-1)} < q_1 \ldots q_s \cdot q_1^s t_{k-1}^{(s)}(0) = o(T_k).$$

Замечая, что

$$T_k + r t_k^{(s)}(0) \leqslant P,$$

получим отсюда:

$$\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n} \psi(n) + r q_1^{(s-1)k} + q_1^{sk} = o(P),$$

чем, в силу (12), теорема доказана.

§ 2. Поставим вопрос о нахождении возможно лучшей оценки разности

$$N(v) - vP,$$

где $N(v)$, как и в предыдущем параграфе, — число попаданий дробных долей системы функций

$$\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$$

в заданную часть единичного куба, имеющую объем v, при изменении x на интервале $1 \leqslant x \leqslant P$.

Пусть $r_n^{(\nu)}(s-\nu)$ — системы знаков, определенные как в основной лемме гл. I, и $\psi(k)$ — произвольная целочисленная функция, для которой существуют две константы $C_2 > C_1 > 0$ такие, что

$$C_1 q_1^k \leqslant \psi(k) \leqslant C_2 q_1^k \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *При любом выборе величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, заданных равенствами:*

$$\alpha_\nu = 0, \underbrace{r_1^{(\nu)}(s-\nu) \ldots r_1^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(1)}, \ldots \underbrace{r_k^{(\nu)}(s-\nu) \ldots r_k^{(\nu)}(s-\nu)}_{\psi(k)} \ldots \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s), \tag{14}$$

для числа $N(v)$ выполняется соотношение:

$$N(v) = vP + O(P^{1-\frac{1}{s+1}}).$$

Доказательство. Так как равенства (14), при помощи которых определены величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, являются частным случаем равенств (1) теоремы 1, то можно применять все соотношения, полученные в предыдущем параграфе.

В частности, пользуясь соотношением (12), получим:

$$N(v) = vP + O\left(\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n} \cdot \psi(n) + rq_1^{(s-1)k} + q_1^{sk}\right).$$

Но $\psi(n) < C_2 q_1^n$, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{k-1} q_1^{(s-1)n} \psi(n) < C_2 \sum_{n=1}^{k-1} q_1^{sn} = O(q_1^{sk}). \qquad (15)$$

Согласно (6),

$$P = T_k + rt_k^{(s)}(0) + r',$$

где

$$T_k = \sum_{n=1}^{k-1} t_n^{(s)}(0)\psi(n), \quad 0 \leqslant r < \psi(k), \quad 0 \leqslant r' < t_k^{(s)}(0).$$

В силу выбора функции $\psi(k)$ выполняется неравенство

$$rq_1^{(s-1)k} < \psi(k)\, q_1^{(s-1)k} < C_2 q_1^{sk}.$$

Пользуясь этим неравенством и оценкой (15), получим:

$$N(v) = vP + O(q_1^{sk}). \qquad (16)$$

Но из определения T_k и неравенства (13) следует, что

$$P \geqslant T_k > t_{k-1}^{(s)}(0)\, \psi(k-1) > \frac{C_1}{q_1 \cdots q_s} q_1^{(k-1)s} q_1^{k-1}.$$

Таким образом,

$$q_1^{(s+1)k} = O(P), \quad q_1^{sk} = O(P^{\frac{s}{s+1}}),$$

и из (16) получаем:

$$N(v) = vP + O(P^{1-\frac{1}{s+1}}).$$

Замечание. Выберем в теореме 2 $s = 1$; тогда при $\alpha_1 = \alpha$, $q_1 = q$ и $v = \gamma$ получим:

$$N(\gamma) = \gamma P + O(\sqrt{P}), \qquad (17)$$

где $N(\gamma)$ — число попаданий дробных долей функции αq^x на произвольный интервал длины γ, принадлежащий интервалу $(0,1)$. Вопрос о величинах α, для которых оценка (17) могла бы быть улучшена, остается пока открытым.

Поступило
10. II. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хинчин А. Я., Цепные дроби, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
[2] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215—238.
[3] Шапиро-Пятецкий И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.
[4] Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 1, Изд. Акад. наук СССР. 1946.
[5] Коробов Н. М., Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 17—46.
[6] Коробов Н. М., О некоторых задачах чебышевского типа, Доклады Ак. наук СССР, 89, № 3 (1953), 397—400.
[7] Davenport H. and Erdös P., Note on normal decimals, Canadian J. Math., 4 (1952), 58—63.
[8] Copeland A. H. Sr. and Erdös P., Note on normal numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 857—860.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 381—422

В. А. МАРЧЕНКО

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе доказываются специальные теоремы тауберова типа, находящие естественные применения в спектральном анализе дифференциальных операторов. В качестве примера подобных приложений в работе выводится уточненная асимптотическая формула для спектральной функции одномерного дифференциального оператора второго порядка и исследуется сходимость разложений по собственным функциям этого оператора.

Введение

Настоящая работа посвящена усовершенствованию и обобщению метода, использованного в работе автора ([1]) для получения асимптотических формул спектральных функций одномерных дифференциальных операторов второго порядка. Этим методом здесь решается следующая общая задача тауберова типа:

Пусть при некотором целом $n \geqslant 0$ *неубывающие и непрерывные слева** *функции* $\rho(\lambda)$ *и* $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *удовлетворяют условиям*:

I. *На множестве бесконечно дифференцируемых функций* $f(x)$, *равных нулю вне интервала* $(-h, h)$, *имеет место тождество*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\, G(x)\, dx, \tag{1}$$

где $G(x)$ — *некоторая функция, определенная и суммируемая на интервале* $(-h, h)$, *и*

$$E_f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

II. *Одна из функций* $\rho(\lambda)$ *или* $\sigma(\lambda)$, *скажем* $\sigma(\lambda)$, *такова, что*

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} \frac{\sigma(a+\lambda_0) - \sigma(a)}{|a|^n} = \sigma^*(\lambda_0) < \infty \tag{2}$$

при некотором $\lambda_0 > 0$.

---

* Требование непрерывности слева несущественно. Оно введено для того, чтобы все интегралы с весом $d\rho(\lambda)$ или $d\sigma(\lambda)$ можно было считать интегралами Лебега — Стильтьеса.

Требуется по дифференциальным свойствам функции $G(x)$ оценить $|\rho(\lambda)-\sigma(\lambda)|$ при больших $|\lambda|$ или сделать какое-нибудь другое заключение о близости $\rho(\lambda)$ к $\sigma(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ $\Big($например, оценить $\Big|\int\limits_a^{a+1}\{\rho(\lambda)-\sigma(\lambda)\}\,d\lambda\Big|$ при $|a|\to\infty$ и т. п.$\Big)$.

Решение этой задачи содержится в § 4 настоящей работы. Частный случай сформулированной задачи (для $n=0$, $h=\infty$) рассмотрен в работе автора ([1]), а общий случай рассмотрен Б. М. Левитаном [см. ([2])]. Однако результаты, полученные в этих работах, менее общи и (что существенней) менее точны, чем те, которые содержатся в § 4 настоящей работы.

Рассмотренные в последнем параграфе примеры возможных приложений носят главным образом иллюстративный характер. Основные же приложения к спектральному анализу дифференциальных операторов (обыкновенных и в частных производных) будут рассмотрены отдельно.

Заметим, наконец, что обозначениями для преобразований Фурье:

$$E_f(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

для вариации функции $\alpha(\lambda)$ в полуинтервале $[a,\ b)$

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b\{\alpha(\lambda)\}$$

и для

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}\ \frac{\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^{a+l}\{\alpha(\lambda)\}}{|a|^n}=\varkappa^*(l)$$

мы будем пользоваться на протяжении всей статьи, не оговаривая этого каждый раз особо.

Кроме того, условимся говорить, что функция $g(x)$ имеет в интервале $(a,\ b)$ k производных, если в каждой точке этого интервала существуют производные до $(k-1)$-го порядка включительно, причем производная $(k-1)$-го порядка абсолютно непрерывна, т. е. если

$$g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{k-1}x^{k-1}+\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{k-1}\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая суммируемая функция. Производной нулевого порядка функции $g(x)$ мы, как обычно, называем самое функцию $g(x)$.

§ 1. Предварительные оценки

Пусть неубывающая функция $\alpha(\lambda)$ при некотором $n\geqslant 0$ и $\lambda_0>0$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}\ \frac{\alpha(a+\lambda_0)-\alpha(a)}{|a|^n}=\varkappa^*(\lambda_0)<\infty, \tag{1.1}$$

из которого, очевидно, вытекает, что и

$$\sup_{-\infty<a<\infty} \frac{\alpha(a+\lambda_0)-\alpha(a)}{(1+|a|)^n} = A < \infty. \tag{1.2}$$

Докажем, прежде всего, что тогда при всех значениях λ справедливы неравенства:

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} \frac{|\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)|}{|a|^n} = \alpha^*(\lambda) \leqslant \alpha^*(\lambda_0)\left(1+\frac{|\lambda|}{\lambda_0}\right), \tag{1.3}$$

$$\sup_{|a|\geqslant 1} \frac{|\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)|}{|a|^n} \leqslant \frac{A}{\lambda_0}(2+\lambda_0+|\lambda|)^{n+1}. \tag{1.4}$$

Пусть $\lambda>0$ и $\left[\frac{\lambda}{\lambda_0}\right]=N$. Тогда $\lambda<(N+1)\lambda_0$ и

$$\alpha(a+\lambda)-\alpha(a) \leqslant \alpha(a+\overline{N+1}\,\lambda_0)-\alpha(a) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \{\alpha(a+k\lambda_0+\lambda_0)-\alpha(a+k\lambda_0)\},$$

т. е.

$$\frac{\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)}{|a|^n} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha(a+k\lambda_0+\lambda_0)-\alpha(a+k\lambda_0)}{(1+|a+k\lambda_0|)^n}\cdot\frac{(1+|a+k\lambda_0|)^n}{|a|^n}, \tag{1.5}$$

откуда при $|a|\to\infty$, согласно (1.1), получим:

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} \frac{\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)}{|a|^n} \leqslant \alpha^*(\lambda_0)(N+1) \leqslant \alpha^*(\lambda_0)\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_0}\right),$$

и неравенство (1.3) доказано.

Для доказательства неравенства (1.4) заметим, что, согласно (1.2)

$$\frac{\alpha(a+k\lambda_0+\lambda_0)-\alpha(a+k\lambda_0)}{(1+|a+k\lambda_0|)^n} \leqslant A,$$

откуда, используя (1.5), получим:

$$\frac{\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)}{|a|^n} \leqslant A\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{|a|}+\left|1+\frac{k\lambda_0}{a}\right|\right)^n \leqslant A\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{|a|}+1+\frac{k\lambda_0}{|a|}\right)^n.$$

Поэтому при $|a|\geqslant 1$

$$\frac{\alpha(a+\lambda)-\alpha(a)}{|a|^n} \leqslant A(N+1)(2+N\lambda_0)^n \leqslant \frac{A}{\lambda_0}(\lambda+\lambda_0)(2+\lambda)^n$$

и

$$\frac{\alpha(a+\lambda)+\alpha(a)}{|a|^n} \leqslant \frac{A}{\lambda_0}(2+\lambda_0+\lambda)^{n+1}.$$

Таким образом, при $\lambda>0$ оба неравенства доказаны. Доказательства при $\lambda<0$ вполне аналогичны.

ЛЕММА 1.1. *Если функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ удовлетворяют условию* I, *а функция $\sigma(\lambda)$ — условию* II, *то функция $\rho(\lambda)$ тоже удовлетворяет условию* II, *причем*

$$\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) < C_1 \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где $C_1 < 150$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Положим в формуле (1)

$$f(x) = g(x) e^{iax},$$

где $g(x)$ — пока произвольная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|x| \geqslant h$. Так как преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением:

$$E_f(\lambda) = E_g(\lambda - a),$$

то формула (1) примет такой вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_g(\lambda - a)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} E_g(\lambda - a)\, d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) e^{iax}]^{(n)} G(x)\, dx. \qquad (1.6)$$

Оценим правую часть этой формулы. Имеем:

$$[g(x) e^{iax}]^{(n)} = (ia)^n g(x) e^{iax} + (ia)^{n-1} n g'(x) e^{iax} + \cdots =$$
$$= (ia)^n \left[g(x) e^{iax} + O\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(x) e^{iax}]^{(n)} G(x)\, dx = (ia)^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} g(x) G(x)\, dx + O\left(\frac{1}{a}\right)\right],$$

откуда по теореме Римана—Лебега о стремлении к нулю преобразования Фурье суммируемой функции получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(x) e^{iax}]^{(n)} G(x)\, dx = o(|a|^n) \quad (|a| \to \infty).$$

Следовательно, формула (1.6) при $|a| \to \infty$ дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_g(\lambda - a)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} E_g(\lambda - a)\, d\sigma(\lambda) = o(|a|^n)$$

или

$$|a|^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} E_g(\mu)\, d_\mu \rho(a + \mu) = |a|^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} E_g(\mu)\, d_\mu \sigma(a + \mu) + o(1). \qquad (1.7)$$

Легко проверить, что функция

$$K(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2^{-1-k}\lambda}{2^{-1-k}\lambda}\right)^2$$

является преобразованием Фурье четной бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю при $|x| \geqslant 1$ *. Поэтому $K(h\lambda)$ — преобразование Фурье бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю при $|x| \geqslant h$, и мы имеем право подставить в формулу (1.7) $K(h\mu)$ вместо $E_g(\mu)$. Так как $K(h\mu) \geqslant 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(h\mu)\, d_\mu \rho(a+\mu) \geqslant \int_0^{\frac{1}{h}} K(h\mu)\, d_\mu \rho(a+\mu) \geqslant \min_{|\mu| \leqslant \frac{1}{h}} K(h\mu)\left[\rho\left(a+\frac{1}{h}\right)-\rho(a)\right] = K(1)\left[\rho\left(a+\frac{1}{h}\right)-\rho(a)\right]$$

и, согласно (1.7),

$$K(1)\,|a|^{-n}\left[\rho\left(a+\frac{1}{h}\right)-\rho(a)\right] \leqslant |a|^n \int_{-\infty}^{\infty} K(h\mu)\, d_\mu \sigma(a+\mu) + o(1),$$

откуда при $|a| \to \infty$ следует:

$$\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) = \overline{\lim_{|a|\to\infty}}\, |a|^{-n}\left[\rho\left(a+\frac{1}{h}\right)-\rho(a)\right] \leqslant \frac{1}{K(1)}\, \overline{\lim_{|a|\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} K(h\mu)\, d_\mu \frac{\sigma(a+\mu)-\sigma(a)}{|a|^n}. \tag{1.8}$$

Из условия II, которому удовлетворяет функция $\sigma(\lambda)$, согласно (1.4) следует:

$$\sup_{|a|\geqslant 1} |a|^{-n}\left[\sigma(a+\mu)-\sigma(a)\right] \leqslant A\lambda_0^{-1}(2+\lambda_0+|\mu|)^{n+1}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(h\mu)\, d_\mu \frac{\sigma(a+\mu)-\sigma(a)}{|a|^n} = h\int_{-\infty}^{\infty} K'(h\mu)\frac{\sigma(a+\mu)-\sigma(a)}{|a|^n}\, d\mu$$

и

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} K(h\mu)\, d_\mu \frac{\sigma(a+\mu)-\sigma(a)}{|a|^n} \leqslant h\int_{-\infty}^{\infty} |K'(h\mu)|\,\sigma^*(\mu)\, d\mu,$$

где, согласно (1.3),

$$\sigma^*(\mu) = \overline{\lim_{|a|\to\infty}}\, |a|^{-n}|\sigma(a+\mu)-\sigma(a)| \leqslant \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)(1+h|\mu|).$$

---

* См., например, ([3]).

Таким образом, из неравенства (1.8) следует:

$$\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant \frac{1}{K(1)}\,\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h\,|K'(h\mu)|\,(1+h\,|\mu|)\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{K(1)}\,\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K'(\lambda)|\,(1+|\lambda|)\,d\lambda$$

или

$$\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant C_1\,\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где

$$C_1 = \frac{1}{K(1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K'(\lambda)|\,(1+|\lambda|)\,d\lambda, \quad K(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2^{-1-k}\lambda}{2^{-1-k}\lambda}\right)^2.$$

Простые оценки, которые мы здесь опускаем, показывают, что $C_1 < 150$. Лемма доказана.

Итак, из условий задачи, сформулированной во введении, вытекает, что обе функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ должны удовлетворять требованию II. Но тогда, согласно (1.4), функции $|\rho(\lambda)|$ и $|\sigma(\lambda)|$ при $|\lambda| \to \infty$ растут не быстрее, чем $|\lambda|^{n+1}$.

Это замечание позволяет для функций $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ ввести преобразования Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка, определяемые формулами:

$$E_{n+2}(x;\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x} - L_{n+2}(\lambda, x)}{(-i\lambda)^{n+2}}\,d\rho(\lambda), \tag{1.9}$$

$$E_{n+2}(x;\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x} - L_{n+2}(\lambda, x)}{(-i\lambda)^{n+2}}\,d\sigma(\lambda), \tag{1.9'}$$

где

$$L_{n+2}(\lambda, x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{(-i\lambda x)^k}{k!} & \text{для } |\lambda| \leqslant 1, \\ 0 & \text{для } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная $n+2$ раза непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого конечного интервала. Умножая обе части формулы (1.9) на $f^{(n+2)}(x)$ и интегрируя, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n+2)}(x)\,E_{n+2}(x;\rho)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{f^{(n+2)}(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x} - L_{n+2}(\lambda, x)}{(-i\lambda)^{n+2}}\,d\rho(\lambda)\right\}dx,$$

откуда, меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, найдем *:

---

* Законность этих операций вытекает из того, что функция $f(x)$ равна нулю вне некоторого конечного интервала, $E_f(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ убывает быстрее, чем $|\lambda|^{-n-2}$, и $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условию II.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+2)}(x)\, E_{n+2}(x; \rho)\, dx = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Аналогичным образом из формулы (1.9′) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+2)}(x)\, E_{n+2}(x; \sigma)\, dx = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+2)}(x)\, [E_{n+2}(x; \rho) - E_{n+2}(x; \sigma)]\, dx \qquad (1.10)$$

на множестве всех $n+2$ раза непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, равных нулю вне конечных интервалов.

Последнее равенство мы получили, предполагая только, что обе функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ удовлетворяют условию II. Если же функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$, кроме того, удовлетворяют условию I, то, выбирая в формуле (1.10) в качестве $f(x)$ бесконечно дифференцируемые функции, равные нулю вне интервала $(-h, h)$, и сравнивая (1.10) с формулой (1), получим:

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{n+2}(x)\, [E_{n+2}(x; \rho) - E_{n+2}(x; \sigma)]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\, G(x)\, dx,$$

откуда, очевидно, следует, что при $|x| < h$

$$(-1)^n [E_{n+2}(x; \rho) - E_{n+2}(x; \sigma)] = \sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k + \int_0^x (x-t)\, G(t)\, dt$$

и, следовательно, при $|x| < h$

$$G(x) = (-1)^n [E_{n+2}(x; \rho) - E_{n+2}(x; \sigma)]'' - \left(\sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k\right)''. \qquad (1.11)$$

Таким образом, условие I, накладываемое на функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$, равносильно тому, что разность преобразований Бохнера — Стильтьеса $(n+2)$-го порядка этих функций дважды дифференцируема в интервале $(-h, h)$.

Следовательно, из условия I вытекает, что правую часть формулы (1.10) всегда можно дважды интегрировать по частям, если только $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant h$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\, G(x)\, dx,$$

какова бы ни была $n+2$ раза непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, равная нулю при $|x| \geqslant h$.

Тем самым доказана

ЛЕММА 1.2. *Если неубывающие функции $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ удовлетворяют условиям I и II, то формула (1) справедлива для всех $n+2$ раза непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, равных нулю вне интервала $(-h, h)$.*

Заметим, наконец, что из всего сказанного выше следует, что если ввести функцию

$$\alpha(\lambda) = \rho(\lambda) - \sigma(\lambda),$$

то задача, сформулированая во введении, эквивалентна следующей:

Пусть функция $\alpha(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале и удовлетворяет условиям:

I'. *При некотором $\lambda_0 > 0$*

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}} |a|^{-n} \bigvee_a^{a+\lambda_0} \{\alpha(\lambda)\} = \alpha^*(\lambda_0) < \infty.$$

II''. *Преобразование Бохнера — Стильтьеса $(n+2)$-го порядка функции $\alpha(\lambda)$ дважды дифференцируемо в интервале $(-h, h)$.*

Требуется по дифференциальным свойствам $E^*_{n+2}(x; \alpha)$ оценить $|\alpha(\lambda)|$ при больших $|\lambda|$ или сделать какое-нибудь другое заключение о поведении $\alpha(\lambda)$ при больших значениях $|\lambda|$.

§ 2. Первая основная лемма

В задаче, сформулированной во введении, требовалось оценить $|\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)|$ при больших значениях $|\lambda|$. Имея в виду различные приложения, мы несколько обобщим постановку вопроса, а именно, будем оценивать при больших N разность

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

где ядра $T(N, \lambda)$ $(0 \leqslant N < \infty$ — параметр) удовлетворяют следующим естественным ограничениям:

A. *При любом N функция $T(N, \lambda)$ имеет ограниченную вариацию по $\lambda\ (-\infty < \lambda < \infty)$ и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + |\lambda|^{n+2}\right) |T(N, \lambda)|\, d\lambda < \infty.$$

B. *При любом N функция $T(N, \lambda)$ имеет $k \geqslant 0$ производных по λ, причем $|T^{(m)}(N, \lambda)| = o(|\lambda|^{-n-2})$, когда $|\lambda| \to \infty$ $(m = 0, 1, \ldots, k-1, k)$. Производная k-го порядка $T^{(k)}(N, \lambda)$ имеет ограниченную вариацию и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| < \infty.$$

C. *При любом конечном* a

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\int\limits_{-a}^{a}(1+|\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|}=0$$

(*в пунктах* A, B, C *число* n — *такое же, как в условиях* I, II).

В точках разрыва функции $T^{(k)}(N,\lambda)$ мы полагаем:

$$T^{(k)}(N,\lambda)=\frac{1}{2}\{T^{(k)}(N,\lambda-0)+T^{(k)}(N,\lambda+0)\}. \tag{2.1}$$

Из формулы обращения Фурье, согласно условию A и (2.1), следует:

$$T(N,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(N,x)\,e^{-i\lambda x}\,dx, \tag{2.2}$$

где функция

$$f(N,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(N,\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{2.2'}$$

$n+2$ раза непрерывно дифференцируема по x. Следовательно, ядра $T(N,\lambda)$ являются преобразованиями Фурье $n+2$ раза непрерывно дифференцируемых функций $f(N,x)$.

Введем четную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ вида:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=1\quad\text{при } |x|<\frac{2}{3},\\ 0\leqslant\varphi(x)&\leqslant 1\quad\text{при } \frac{2}{3}\leqslant|x|\leqslant 1,\\ \varphi(x)&=0\quad\text{при } |x|\geqslant 1\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

и положим

$$f_1(N,x)=f(N,x)\,\varphi\left(\frac{x}{h}\right),\quad f_2(N,x)=f(N,x)\left[1-\varphi\left(\frac{x}{h}\right)\right]. \tag{2.4}$$

Обозначая через $T_1(N,\lambda)$ и $T_2(N,\lambda)$ преобразования Фурье этих функций:

$$T_1(N,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(N,x)\,e^{-i\lambda x}\,dx,\quad T_2(N,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_2(N,x)\,e^{-i\lambda x}\,dx, \tag{2.4'}$$

будем иметь:

$$T(N,\lambda)=T_1(N,\lambda)+T_2(N,\lambda),$$

и, полагая $\alpha(\lambda)=\rho(\lambda)-\sigma(\lambda)$, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_1(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_2(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda).$$

Согласно предыдущему, $T_1(N, \lambda)$ является преобразованием Фурье $n+2$ раза непрерывно дифференцируемой функции $f_1(N, x)$, равной нулю вне интервала $(-h, h)$. Поэтому, согласно лемме 1.2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)}\, G(x)\, dx,$$

что приводит к следующей основной формуле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)} G(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda), \quad (2.5)$$

где $\alpha(\lambda) = \rho(\lambda) - \sigma(\lambda)$ и, согласно (1.11),

$$G(x) = (-1)^n E''_{n+2}(x; \alpha) - \left(\sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k\right)''.$$

Оценкой правой части этой формулы мы и займемся в этом параграфе.

ЛЕММА 2.1. *Если неубывающая, непрерывная слева функция $\alpha(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.1), то при любом $h > 0$ справедливо неравенство:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda)\right|}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|} \leqslant C_2 2^k h^{-k} \alpha^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где константа C_2 зависит только от функции $\varphi(x)$ и функцию $\varphi(x)$ можно выбрать так, что $C_2 < 5 \cdot 10^5$.

Доказательство. Согласно условию B, мы имеем право в формуле (2.2′) произвести $k+1$ раз интегрирование по частям, после чего получим:

$$f(N, x) = \frac{(ix)^{-k-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)$$

$$T_2(N, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(N, x)\left[1 - \varphi\left(\frac{x}{h}\right)\right] e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1 - \varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x}\, d_\mu T^{(k)}(N, \mu)\right\} dx.$$

Покажем, что в этой формуле можно поменять порядок интегрирований. Действительно, по теореме Фубини, при любом конечном a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left\{\frac{1 - \varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x}\, d_\mu T^{(k)}(N, \mu)\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-a}^{a} \frac{1 - \varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-ix(\lambda-\mu)}\, dx\right\} d_\mu T^{(k)}(N, \mu)$$

и

$$T_2(N, \lambda) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-a}^{a} \frac{1-\varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-ix(\lambda-\mu)}\, dx \right\} d_\mu T^{(k)}(N, \mu).$$

Так как внутренний интеграл при $a \to \infty$ сходится при всех значениях μ, оставаясь при этом равномерно ограниченным, а функция $T^{(k)}(N, \mu)$ имеет ограниченную вариацию, то, по теореме Лебега,

$$T_2(N, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-ix(\lambda-\mu)}\, dx \right\} d_\mu T^{(k)}(N, \mu),$$

и законность перемены порядка интегрирований доказана.

Положим

$$A_k(z) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{1-\varphi(u)}{(iu)^{k+1}} e^{-iuz}\, du. \tag{2.6}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi\left(\frac{x}{h}\right)}{(ix)^{k+1}} e^{-ix(\lambda-\mu)}\, dx = \frac{h^{-k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi(u)}{(iu)^{k+1}} e^{-ihu(\lambda-\mu)}\, du = h^{-k} A_k(h\lambda - h\mu)$$

и

$$T_2(N, \lambda) = h^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} A_k(h\lambda - h\mu)\, d_\mu T^{(k)}(N, \mu),$$

откуда следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = h^{-k} \int_{+\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_k(h\lambda - h\mu)\, d_\mu T^{(k)}(N, \mu) \right\} d\alpha(\lambda). \tag{2.7}$$

Согласно (2.6), $A_k(z)$ есть преобразование Фурье бесконечно дифференцируемой функции, все производные которой суммируемы на вещественной оси. Поэтому $|A_k(z)|$ при $|z| \to \infty$ убывает быстрее любой отрицательной степени $|z|$, и в формуле (2.7) можно поменять порядок интегрирований, что дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = h^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_k(h\lambda - h\mu)\, d_\lambda \alpha(\lambda) \right\} d_\mu T^{(k)}(N, \mu) =$$

$$= h^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t \alpha\left(\frac{t}{h} + \mu\right) \right\} d_\mu T^{(k)}(N, \mu),$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) =$$

$$= h^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t \frac{\alpha\left(\frac{t}{h} + \mu\right) - \alpha(\mu)}{1 + |\mu|^n} \right\} (1 + |\mu|^n)\, d_\mu T^{(k)}(N, \mu). \tag{2.8}$$

Положим

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{|\mu| \to \infty}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t \frac{\alpha\left(\frac{t}{h} + \mu\right) - \alpha(\mu)}{1 + |\mu|^n} \right| = A_k, \\ &\sup_{-\infty < \mu < \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t \frac{\alpha\left(\frac{t}{h} + \mu\right) - \alpha(\mu)}{1 + |\mu|^n} \right| = m \end{aligned} \tag{2.9}$$

и пусть

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t \frac{\alpha\left(\frac{t}{h} + \mu\right) - \alpha(\mu)}{1 + |\mu|^n} \right| < A_k + \varepsilon$$

при $|\mu| > \mu_\varepsilon$. Тогда, согласно (2.8),

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) \right| \leqslant h^{-k} m \int_{-\mu_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)| +$$

$$+ h^{-k}(A_k + \varepsilon) \left\{ \int_{\mu_\varepsilon}^{\infty} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)| + \int_{-\infty}^{-\mu_\varepsilon} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)| \right\}$$

и, тем более,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) \right| \leqslant h^{-k} \left\{ m \int_{-\mu_\varepsilon}^{\mu_\varepsilon} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)| + \right.$$

$$\left. + (A_k + \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)| \right\}.$$

Разделив обе части этого неравенства на

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)|$$

и устремив N к бесконечности, мы, согласно свойству C семейства $T(N, \mu)$, получим:

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)|} \leqslant h^{-k}(A_k+\varepsilon),$$

откуда, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, следует:

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\mu|^n)\, |d_\mu T^{(k)}(N, \mu)|} \leqslant h^{-k}A_k. \tag{2.10}$$

Оценим A_k. Из формулы (2.6) при $k \geqslant 1$ найдем:

$$|A_k(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\infty} u^{-k-1}\, du = \frac{1}{\pi k}\left(\frac{3}{2}\right)^k < 2^k,$$

а при $k=0$ и $|z| \leqslant 1$

$$|A_k(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi(u)}{u} \sin uz\, du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left\{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin uz}{u}\, du\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\frac{\sin uz}{u}\, du\right|\right\} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < 1.$$

Поэтому при $|z| \leqslant 1$ и любом $k \geqslant 0$

$$|A_k(z)| < 2^k. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь $|z| > 1$. Из формулы (2.6), интегрируя по частям, получим:

$$A_k(z) = \frac{-1}{2\pi(-iz)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} i^{-k-1}\left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}}\right)''' e^{-iuz}\, du$$

и

$$A_k'(z) = \frac{3i^{-k-1}}{2\pi i z^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}}\right)''' e^{-iuz}\, du - \frac{i^{-k-1}}{2\pi z^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}}\right)''' u e^{-iuz}\, du.$$

Поэтому $A'_k(z)$ существует при $z \neq 0$, убывает при $|z| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|z|$ и

$$|A'_k(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi |z|^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}} \right)''' \right| (3+|u|)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi |z|^3} \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\infty} \left| \left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}} \right)''' \right| (3+|u|)\, du$$

равномерно относительно $|z| \geqslant 1$.

Простые оценки показывают, что

$$\left| \left(\frac{1-\varphi(u)}{u^{k+1}} \right)''' \right| < M(k+1)(k+2)(k+3)\, u^{-k-4},$$

где

$$M = \sup_{-\infty<u<\infty} \left\{ |\varphi(u)-1| + |\varphi'(u)| + \frac{1}{2}|\varphi''(u)| + \frac{1}{6}|\varphi'''(u)| \right\}.$$

Следовательно, при $|z| > 1$

$$|A'_k(z)| \leqslant \frac{M}{\pi |z|^3}(k+1)(k+2)(k+3) \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\infty} u^{-k-4}(3+u)\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(k+1)(k+2)\cdot 12(k+2)}{2\pi |z|^3 (k+2)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+2},$$

т. е.

$$|A'_k(z)| \leqslant \frac{6M(k+1)(k+2)}{\pi |z|^3} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+2} \quad (|z| \geqslant 1). \tag{2.12}$$

Далее, имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) = \int\limits_{-1}^{0} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) + \int\limits_{0}^{1} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) +$$
$$+ \int\limits_{1}^{\infty} A_k(t)\, d_t \left\{\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\} + \int\limits_{-\infty}^{-1} A_k(t)\, d_t \left\{\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\},$$

откуда, интегрируя по частям (что допустимо, так как $|A_k(t)|$ и $|A'_k(t)|$ убывают при $|t| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|t|$), получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) = \int\limits_{-1}^{0} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) + \int\limits_{0}^{1} A_k(t)\, d_t\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) -$$
$$- A_k(1)\left\{\alpha\left(\frac{1}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\} + A_k(-1)\left\{\alpha\left(-\frac{1}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\} -$$
$$- \int\limits_{1}^{\infty} A'_k(t) \left\{\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\} dt - \int\limits_{-\infty}^{-1} A'_k(t) \left\{\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right) - \alpha(\mu)\right\} dt.$$

Разделив обе части этого равенства на $1+|\mu|^n$ и устремляя $|\mu|$ к бесконечности, получим:

$$\overline{\lim_{|\mu|\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} A_k(t)\,d_t\,\frac{\alpha\left(\frac{t}{h}+\mu\right)-\alpha(\mu)}{1+|\mu|^n}\right|\leqslant 4\sup_{|t|\leqslant 1}|A_k(t)|\,\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)+$$
$$+\int_1^{\infty}|A_k'(t)|\,\alpha^*\left(\frac{t}{h}\right)dt+\int_{-\infty}^{-1}|A_k'(t)|\,\alpha^*\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Отсюда, согласно (2.11), (2.12) и (2.9), следует:

$$A_k\leqslant 4\cdot 2^k\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)+\frac{6M(k+1)(k+2)}{\pi}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+2}\left\{\int_1^{\infty}t^{-3}\alpha^*\left(\frac{t}{h}\right)dt+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{-1}|t|^{-3}\alpha^*\left(\frac{t}{h}\right)dt\right\}$$

и, в силу (1.3),

$$A_k\leqslant 4\cdot 2^k\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)\left\{1+\frac{12M(k+1)(k+2)}{\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}\int_1^{\infty}(t^{-3}+t^{-2})\,dt\right\}=$$
$$=2^k\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)\left\{4+\frac{12M(k+1)(k+2)}{\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}\frac{4\cdot 3}{2}\right\}.$$

Так как

$$\frac{6\cdot 12(1+k)(2+k)}{\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}<140\quad(k=0,1,2,\ldots),$$

то окончательно получим:

$$A_k\leqslant 2^k\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)\{4+140M\}.$$

Из этого неравенства и из (2.10) следует:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}T_2(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)\right|}{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)\,|\,d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)}\leqslant C_2\,2^k h^{-k}\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где

$$C_2=4+140M.$$

Пусть

$$\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{5\lambda}{6}}{\lambda}\left(\frac{\sin\frac{\lambda}{25}}{\frac{\lambda}{25}}\right)^4\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin a_k\lambda}{a_k\lambda}\right)^2 e^{i\lambda u}\,d\lambda,$$

где $a_k > 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{300}$. Тогда $\varphi(u)$ есть четная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (2.3) *. Простые оценки показывают, что для этой функции

$$\sup_{-\infty<u<\infty}\left\{|1-\varphi(u)|+|\varphi'(u)|+\frac{1}{2}|\varphi''(u)|+\frac{1}{6}|\varphi'''(u)|\right\}<3000$$

и

$$C_2 = 4 + 140\cdot 3000 < 5\cdot 10^5.$$

Лемма доказана полностью.

Замечание. *Пусть семейство S непрерывных слева функций $\alpha(\lambda)$, имеющих ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, удовлетворяет следующему условию:*

$$\sup_{-\infty<a<\infty}\left\{\sup_{\alpha(\lambda)\in S}(1+|a|)^{-n}\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\{\alpha(\lambda)\}\right\}<\infty,$$

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}\ \sup_{\alpha(\lambda)\in S}|a|^{-n}\overset{a+\frac{1}{h}}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\{\alpha(\lambda)\} = S^*\left(\frac{1}{h}\right)<\infty.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \sup_{\alpha(\lambda)\in S}\frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_2(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|}\leqslant C_2 2^k h^{-k} S^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где константа C_2 — та же, что в лемме 2.1.

Доказательство этого неравенства аналогично доказательству леммы 2.1.

§ 3. Вторая основная лемма

До сих пор мы не делали никаких предположений о характере функции $G(x)$, фигурирующей в условии I. Значение дифференциальных свойств этой функции выясняется в следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. *Пусть семейство ядер $T(N,\lambda)$ удовлетворяет условиям* A, B, C, *а функция $G(x)$, определенная в интервале $(-h, h)$, имеет в этом интервале k производных (число $k \geqslant 0$ — такое же, как в условии* B). *Положим, как и прежде,*

$$f(N,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(N,\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,\qquad f_1(N,x)=f(N,x)\,\varphi\left(\frac{x}{h}\right),$$

где $\varphi(x)$ — четная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (2.3).

---

* См., например, ([3]).

Если ряд Фурье функции $G^{(k)}(x)$ и ему сопряженный сходятся в точке $x=0$, то при $N\to\infty$

$$I(N)=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(N,x)]^{(n)}G(x)\,dx=$$

$$=(-1)^n\sum_{m\leqslant k-n}\frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)}G^{(n+m)}(0)\,T^{(m)}(N,0)+$$

$$+o\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|\right\},$$

где через $G^{(k)}(0)$ обозначена сумма ряда Фурье функции $G^{(k)}(x)$ в точке $x=0$.

Доказательство. Полагая

$$P(x)=G(0)+G'(0)\frac{x}{1}+\cdots+G^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!},\quad G_1(x)=G(x)-P(x),\tag{3.1}$$

$$I_1(N)=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(N,x)]^{(n)}P(x)\,dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}f_1(N,x)\,P^{(n)}(x)\,dx,\tag{3.2}$$

$$I_2(N)=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(N,x)]^{(n)}G_1(x)\,dx,\tag{3.3}$$

будем иметь:

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N).\tag{3.4}$$

Функция $G_1(x)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на $G(x)$, и, кроме того, ее производные до k-го порядка включительно равны нулю при $x=0$ (под $G_1^{(k)}(0)$ мы понимаем сумму ряда Фурье функции $G_1^{(k)}(x)$ в точке $x=0$).

Оценим $I_1(N)$. При $k<n$

$$P^{(n)}(x)\equiv 0,$$

откуда, согласно (3.2), следует, что $I_1(N)=0$. При $k\geqslant n$

$$P^{(n)}(x)=G^{(n)}(0)+G^{(n+1)}(0)\frac{x}{1}+\cdots+G^{(k)}(0)\frac{x^{k-n}}{(k-n)!}.\tag{3.5}$$

Из определения функции $f(N,x)$ и свойств ядер $T(N,\lambda)$ следует:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}f(N,x)\,x^m\,dx=(-i)^m T^{(m)}(N,0)\quad(0\leqslant m\leqslant k).\tag{3.6}$$

Имеем:

$$I_1(N) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f_1(N, x) P^{(n)}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^n \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(N, x) P^{(n)}(x)\, dx +$$

$$+ (-1)^n \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} [f_1(N, x) - f(N, x)] P^{(n)}(x)\, dx,$$

откуда, согласно (3.5) и (3.6), следует:

$$I_1(N) = (-1)^n \Big\{ G^{(n)}(0)\, T(N, 0) - iG^{(n+1)}(0)\, T'(N, 0) +$$

$$+ \cdots + \frac{(-i)^{k-n}}{(k-n)!} G^{(k)}(0)\, T^{(k-n)}(N, 0) \Big\} +$$

$$+ (-1)^n \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(N, x) \left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1\right] P^{(n)}(x)\, dx,$$

и так как

$$f(N, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{(ix)^{-k-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda),$$

то

$$I_1(N) = (-1)^n \sum_{m=0}^{k-n} G^{(n+m)}(0)\, T^{(m)}(N, 0) \frac{(-i)^m}{m!} +$$

$$+ (-1)^n \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1}{2\pi\, (ix)^{k+1}} P^{(n)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda) \right\} dx. \qquad (3.7)$$

Далее,

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1}{2\pi\, (ix)^{k+1}} P^{(n)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda) \right\} dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-a}^{a} \frac{e^{i\lambda x}\left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1\right]}{2\pi\, (ix)^{k+1}} P^{(n)}(x)\, dx \right\} d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda),$$

и так как внутренний интеграл сходится при всех значениях λ, оставаясь при этом равномерно ограниченным по λ, а функция $T^{(k)}(N, \lambda)$, по условию, имеет ограниченную вариацию, то, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, имеем:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1}{2\pi\, (ix)^{k+1}} P^{(n)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda) \right\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E(\lambda)\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda), \qquad (3.8)$$

где

$$E(\lambda) = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \frac{e^{i\lambda x}\left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right) - 1\right]}{2\pi (ix)^{k+1}} P^{(n)}(x)\, dx$$

является преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемой функции, все производные которой суммируемы на вещественной оси. Поэтому $E(\lambda)$ убывает при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|\lambda|$ и согласно свойству С семейства $T(N, \lambda)$, при $N \to \infty$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\lambda)\, d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda) \right| = o\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| \right\}. \qquad (3.9)$$

Из (3.7), (3.8) и (3.9) следует, что при $N \to \infty$

$$I_1(N) = (-1)^n \sum_{m=0}^{k-n} \frac{(-i)^m}{m!} G^{(n+m)}(0)\, T^{(m)}(N, 0) + \\ + o\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| \right\},$$

если $k \geqslant n$. Объединяя случаи $k < n$ и $k \geqslant n$, получим:

$$I_1(N) = (-1)^n \sum_{m < k-n} \frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)} G^{(n+m)}(0)\, T^{(m)}(N, 0) + \\ + o\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_n T^{(k)}(N, \lambda)| \right\}. \qquad (3.10)$$

Оценим $I_2(N)$. Пусть $k < n$. Тогда, согласно (3.3),

$$I_2(N) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)} G_1(x)\, dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n-k)} G_1^{(k)}(x)\, dx,$$

откуда, замечая, что

$$[f_1(N, x)]^{(n-k)} = \left[f(N, x)\, \varphi\left(\frac{x}{h}\right)\right]^{(n-k)} = \\ = \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} h^{-m} \varphi^{(m)}\left(\frac{x}{h}\right) f^{(n-k-m)}(N, x),$$

$$f^{(n-k-m)}(N, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^{n-k-m} e^{i\lambda x} T(N, \lambda)\, d\lambda,$$

получим:

$$I_2(N) = (-1)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{G_1^{(k)}(x)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} h^{-m} \varphi^{(m)}\left(\frac{x}{h}\right) (i\lambda)^{n-k-m} \cdot e^{i\lambda x} T(N, \lambda)\, d\lambda \right\} dx.$$

В этой формуле, очевидно, можно поменять порядок интегрирований. Поэтому, полагая

$$E_m(\lambda) = \frac{(i)^{n-k-m}}{2\pi} \binom{n-k}{m} h^{-m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(m)}\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(k)}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$

получим:

$$I_2(N) = (-1)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{n-k} \lambda^{n-k-m} E_m(\lambda) \right\} T(N, \lambda)\, d\lambda,$$

откуда после интегрирований по частям следует:

$$I_2(N) = -\frac{1}{k!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{n-k} \int\limits_0^{\lambda} (\lambda - t)^k t^{n-k-m} E_m(t)\, dt \right\} d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda). \tag{3.11}$$

Заметим, что функция $\varphi(x)$ равна единице в некоторой окрестности нуля, а ряд Фурье функции $G_1^{(k)}(x)$ и ему сопряженный сходятся в точке $x = 0$, причем ряд Фурье сходится к нулю в этой точке. Отсюда, по принципу локализации, следует, что пределы

$$\lim_{a \to \infty} \int\limits_b^a E_m(\lambda)\, d\lambda, \quad \lim_{b \to -\infty} \int\limits_b^0 E_m(\lambda)\, d\lambda$$

существуют и сумма их равна нулю:

$$\lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to -\infty}} \int\limits_b^a E_m(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Так как

$$\lim_{|t| \to \infty} E_m(t) = 0,$$

то при $m \geqslant 1$ и $|\lambda| \to \infty$

$$\int\limits_0^{\lambda} (\lambda - t)^k t^{n-k-m} E_m(t)\, dt = o\{|\lambda|^{n-m+1}\}. \tag{3.12}$$

Если же $m = 0$, то

$$\int\limits_0^{\lambda} (\lambda - t)^k t^{n-k} E_0(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \int\limits_0^{\lambda} t^{n-k+j} E_0(t)\, dt. \tag{3.13}$$

Как уже отмечалось выше, интеграл

$$\mathscr{E}(t) = \int_{-\infty}^{t} E_0(z)\,dz$$

существует и $\lim_{|t|\to\infty} \mathscr{E}(t) = 0$. Поэтому

$$\int_0^\lambda t^{n-k+j} E_0(t)\,dt = \int_0^\lambda t^{n-k+j} d\mathscr{E}(t) =$$
$$= \lambda^{n-k+j}\mathscr{E}(\lambda) - (n-k+j)\int_0^\lambda t^{n-k+j-1}\mathscr{E}(t)\,dt$$

и при $|\lambda|\to\infty$

$$\int_0^\lambda t^{n-k+j} E_0(t)\,dt = o\{|\lambda|^{n-k+j}\};$$

отсюда, согласно (3.13), следует, что при $|\lambda|\to\infty$

$$\int_0^\lambda (\lambda - t)^k t^{n-k} E_0(t)\,dt = o\{|\lambda|^n\}. \qquad (3.14)$$

Из формул (3.12) и (3.14) вытекает, что при $|\lambda|\to\infty$

$$\sum_{m=0}^{n-k}\int_0^\lambda (\lambda - t)^k t^{n-k-m} E_m(t)\,dt = o\{|\lambda|^n\},$$

откуда, используя формулу (3.11) и свойство С семейства ядер $T(N, \lambda)$, получим:

$$I_2(N) = o\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|\right\} \qquad (3.15)$$

при $N\to\infty$.

Пусть теперь $k \geqslant n$. Тогда, согласно (3.3),

$$I_2(N) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)} G_1(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f_1(N, x)\, G_1^{(n)}(x)\,dx$$

или

$$I_2(N) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(N, x)\,\varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} T(N, \lambda)\,d\lambda\right\} dx,$$

откуда после перемены порядка интегрирований получим:

$$I_2(N) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ T(N, \lambda) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x) e^{i\lambda x} dx \right\} d\lambda. \qquad (3.16)$$

Функция $\varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x)$ дифференцируема $k-n$ раз, равна нулю вне интервала $(-h, h)$ и совпадает с $G_1^{(n)}(x)$ в некоторой окрестности нуля. Поэтому, если

$$E(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x) \right]^{(k-n)} e^{i\lambda x} dx,$$

то

$$(-i\lambda)^{-m} E(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right) G_1^{(n)}(x) \right]^{(k-n-m)} e^{i\lambda x} dx \quad (0 \leqslant m \leqslant k-n), \qquad (3{,}17)$$

причем из свойств функции $G_1^{(n)}(x)$ и принципа локализации следует, что

$$\lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to -\infty}} \int_b^a (-i\lambda)^{-m} E(\lambda) d\lambda = 0 \quad (0 \leqslant m \leqslant k-n). \qquad (3.18)$$

Согласно (3.16) и (3.17), имеем:

$$I_2(N) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda) (-i\lambda)^{-k+n} E(\lambda) d\lambda,$$

или

$$I_2(N) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda) \frac{d^{k+1}\Phi(\lambda)}{d\lambda^{k+1}} d\lambda, \qquad (3.19)$$

где

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\lambda} \left\{ (\lambda - z)^{n-1} \frac{1}{(k-n)!} \int_{-\infty}^{z} (z-t)^{k-n} (-it)^{n-k} E(t) dt \right\} dz.$$

Функция $\Phi(\lambda)$ выбрана так, что она сама и ее производные до $(k+1)$-го порядка включительно ведут себя при $|\lambda| \to \infty$ как $o\{|\lambda|^n\}$. В этом нетрудно убедиться, используя формулу (3.18) и повторяя рассуждения, приведшие к оценкам (3.12) и (3.14).

При таком выборе функции $\Phi(\lambda)$ (согласно свойству В семейства ядер $T(N, \lambda)$) в формуле (3.19) можно произвести $(k+1)$-кратное интегрирование по частям:

$$I_2(N) = (-1)^{n+k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda).$$

Так как $\Phi(\lambda)=o\{|\lambda|^n\}$ при $|\lambda|\to\infty$, то из последней формулы и свойства С семейства ядер $T(N,\lambda)$ следует, что при $N\to\infty$

$$I_2(N)=o\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|\Big\}.$$

Таким образом, формула (3.15) доказана и при $k\geqslant n$. Для завершения доказательства леммы нам остается заметить, что

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N),$$

откуда, согласно (3.10) и (3.15), следует:

$$I(N)=(-1)^n\sum_{m\leqslant k-n}\frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)}G^{(n+m)}(0)\,T^{(m)}(N,0)+\\ +o\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|\Big\}, \tag{3.20}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. *Для того чтобы оценка* (3.20) *была равномерной для некоторого семейства* $G(x,\alpha)$ *функций, удовлетворяющих условиям этой леммы, достаточно, чтобы при* $x=0$ *ряды Фурье функций* $G^{(k)}(x,\alpha)$ *и им сопряженные сходились равномерно для всего семейства и*

$$\sup_\alpha\Big[\int_{-h}^{h}|G^{(k)}(x,\alpha)|\,dx+\sum_{l=0}^{k}|G^{(l)}(0,\alpha)|\Big]<\infty.$$

В частности, если функции $G(x,\alpha)$ *имеют на одну производную больше, чем требуется в лемме, и*

$$\sup_\alpha\Big[\int_{-h}^{h}|G^{(k+1)}(x,\alpha)|\,dx+\sum_{l=0}^{k}|G^{(l)}(0,\alpha)|\Big]<\infty,$$

то оценка (3.20) *будет заведомо равномерной для всего семейства.*

Замечание 2. *Если ядра* $T(N,\lambda)$ *четны относительно* λ *и числа* n, k *тоже четные, то достаточно предположить, что ряд Фурье функции* $\{G(x)+G(-x)\}^{(k)}$ *сходится при* $x=0$.

Действительно, в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1^{(n)}(N,x)\,G(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f_1^{(n)}(N,x)\{G(x)+G(-x)\}\,dx$$

и так как функция $\{G(x)+G(-x)\}^{(k)}$ — четная, то ряд, сопряженный ряду Фурье этой функции в точке $x=0$, заведомо сходится.

Аналогичные ослабления условий леммы 3.1 можно получить, делая другие предположения о характере функций $T(N,\lambda)$ и чисел n, k.

§ 4. Основные теоремы

Основные результаты настоящей работы являются непосредственными следствиями лемм, доказанных в двух предыдущих параграфах.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть неубывающие, непрерывные слева функции* $\rho(\lambda)$ *и* $\sigma(\lambda)$ *удовлетворяют условиям* I, II, *а семейство функций* $T(N, \lambda)$ — *условиям* A, B, C. *Пусть, далее,* $\varphi(x)$ — *четная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям* (2.3), *и*

$$f_1(N, x) = \frac{1}{2\pi}\varphi\left(\frac{x}{h}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda\{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\} - \int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_1(N, x)]^{(n)} G(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 + |\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|}\right| \leqslant C_3 2^k h^{-k}\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right),$$

где константа C_3 *зависит только от функции* $\varphi(x)$, *которую можно выбрать так, что* $C_3 < 8.10^7$.

Доказательство. Согласно формуле (2.5), имеем:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda\{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\} - \int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_1(N, x)]^{(n)} (G(x)\, dx\right| = \\ = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d_\lambda\{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\}\right|,$$

откуда следует, что

$$R = \overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda\{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\} - \int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_1(N, x)]^{(n)} G(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 + |\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\rho(\lambda)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 + |\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|} + \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \lambda)\, d\sigma(\lambda)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 + |\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|}.$$

Из этого неравенства и леммы 2.1 следует, что

$$R \leqslant C_2 2^k h^{-k}\left\{\rho^*\left(\frac{1}{h}\right) + \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)\right\},$$

откуда, согласно лемме 1.1, получим:

$$R \leqslant C_2 2^k h^{-k}\{C_1 + 1\}\,\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right) < 151\cdot C_2 2^k h^{-k}\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Выбирая функцию $\varphi(x)$ так, как в лемме 2.1, будем иметь:

$$C_3 = 151 \cdot C_2 < 151 \cdot 5 \cdot 10^5 < 8 \cdot 10^7.$$

Следовательно, $R \leqslant C_3 2^k h^{-k} \sigma^* \left(\frac{1}{h}\right)$ и функцию $\varphi(x)$ можно выбрать так, что $C_3 < 8 \cdot 10^7$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим частный случай этой теоремы при $n = 0$ и нечетных функциях $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$. Пусть

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\lambda| < N, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |\lambda| = N, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > N. \end{cases}$$

Это семейство ядер удовлетворяет условиям A, B, C при $k = 0$, причем если $n = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n) |d_\lambda T(N, \lambda)| = 4,$$

$$f_1(N, x) = \frac{1}{2\pi} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) \int_{-N}^{N} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) \frac{\sin Nx}{x}$$

и в точках непрерывности функций $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda \{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\} = 2\,[\rho(N) - \sigma(N)].$$

Следовательно, в этом частном случае, согласно теореме 4.1, имеем:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \rho(N) - \sigma(N) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) G(x)\, dx \right| \leqslant 16 \cdot 10^7 \cdot \sigma^* \left(\frac{1}{h}\right).$$

Пусть $0 < a < \frac{2}{3} h$. Тогда, в силу (2.3) и теоремы Римана — Лебега о стремлении к нулю коэффициентов Фурье, получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) G(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx + o(1) \quad (N \to \infty)$$

и

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \rho(N) - \sigma(N) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx \right| \leqslant 16 \cdot 10^7 \cdot \sigma^* \left(\frac{1}{h}\right). \quad (4.1)$$

Если относительно функции $G(x)$ ничего, кроме суммируемости на интервале $(-h, h)$, неизвестно, то об интеграле

$$I(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx$$

можно лишь сказать, что $I(N)=o(N)$ при $N\to\infty$. В этом случае из (4.1) следует только, что при $N\to\infty$

$$\rho(N)=\sigma(N)+o(N). \tag{4.2}$$

Если функция $G(x)$ ограничена в окрестности нуля, то $I(N)=O(\ln N)$ при $N\to\infty$. В этом случае из (4.1) следует, что при $N\to\infty$

$$\rho(N)=\sigma(N)+O(\ln N). \tag{4.3}$$

Если, наконец, функция $G(x)$ имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности нуля, то

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin Nx}{x}G(x)\,dx=\frac{G(+0)+G(-0)}{4}$$

и, согласно (4.1),

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\rho(N)-\sigma(N)-\frac{1}{4}\{G(+0)+G(-0)\}\right|\leqslant 16\cdot 10^7\cdot\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

В частности, если условия теоремы 4.1 выполнены при любом конечном h и $\sigma^*(+0)=0$ (например, $\sigma(\lambda)=\lambda$), то при $N\to\infty$

$$\rho(N)=\sigma(N)+\frac{1}{4}\{G(+0)+G(-0)\}+o(1). \tag{4.4}$$

Легко понять, что при сделанных предположениях о функции $G(x)$ оценки (4.2), (4.3) и (4.4) в общем случае улучшить нельзя.

Далее, из (4.1) интегрированием по n найдем:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left|\frac{1}{T}\int_0^T\rho(N)\,dN-\frac{1}{T}\int_0^T\sigma(N)\,dN-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin^2\frac{Tx}{2}}{Tx^2}G(x)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant 16\cdot 10^7\cdot\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)$$

и, если $x=0$ является точкой Лебега функции $G(x)$,

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left|\frac{1}{T}\int_0^T\rho(N)\,dN-\frac{1}{T}\int_0^T\sigma(N)\,dN-\frac{G(0)}{2}\right|\leqslant 16\cdot 10^7\cdot\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

В частности, если условия теоремы 4.1 выполнены при любом конечном h и $\sigma^*(+0)=0$, то при $T\to\infty$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\rho(N)\,dN=\frac{1}{T}\int_0^T\sigma(N)\,dN+\frac{1}{2}G(0)+o(1). \tag{4.5}$$

Формулы (4.2), (4.3), (4.4) и (4.5), полученные при различных предположениях, относящихся к дифференциальным свойствам функции $G(x)$, хорошо иллюстрируют их влияние на точность решения поставленной во введении общей задачи.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть неубывающие, непрерывные слева функции* $\rho(\lambda)$ *и* $\sigma(\lambda)$ *удовлетворяют условиям* I, II, *а семейство ядер* $T(N, \lambda)$ — *условиям* A, B, C. *Если функция* $G(x)$ *из формулы* (1) *дифференцируема в интервале* $(-h, h)$ $k \geqslant 0$ *раз (число* k — *такое же, как в условии* B), *причем ряд Фурье функции* $G^{(k)}(x)$ *и ему сопряженный сходятся в точке* $x = 0$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\sigma(\lambda) + (-1)^n \sum_{m \leqslant k-n} \frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)} G^{(n+m)}(0)\, T^{(m)}(N, 0) + R(N),$$

где

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{|R(N)|}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|} \leqslant 8\cdot 10^7 \cdot 2^k \cdot h^{-k} \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Доказательство. Согласно теореме 4.1, функцию $\varphi(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda \{\rho(\lambda) - \sigma(\lambda)\} - \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)} G(x)\, dx \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|} \leqslant$$

$$\leqslant 8\cdot 10^7 \cdot 2^k \cdot h^{-k} \cdot \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

С другой стороны, из свойств функции $G(x)$ и леммы 3.1 следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(N, x)]^{(n)} G(x)\, dx =$$

$$= (-1)^n \sum_{m \leqslant k-n} \frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)} G^{(n+m)}(0)\, T^{(m)}(N, 0) +$$

$$+ o\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| \right\}$$

при $N \to \infty$. Доказываемая теорема является очевидным следствием этих двух формул.

Заметим, что если условия теоремы выполняются при любом конечном значении h, то

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{|R(N)|}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n)\, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)|} \begin{cases} = 0, & \text{если } k > 0, \\ \leqslant 8\cdot 10^7 \cdot \sigma^*(0), & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Ясно также, что замечание 2 к лемме 3.1 в такой же мере относится и к доказанной теореме.

Пример. Для суммирования расходящихся рядов и интегралов обычно употребляют ядра $T(N, \lambda)$ вида

$$T(N, \lambda) = P\left(\frac{\lambda}{N}\right), \tag{4.6}$$

где $P(\lambda)$ — некоторая функция, равная нулю вне интервала $(-1, 1)$. Если функция $P(\lambda)$ дифференцируема $k \geqslant 0$ раз, причем производная k-го порядка имеет ограниченную вариацию, то семейство (4.6), очевидно, удовлетворяет условиям A и B; причем здесь

$$T^{(m)}(N, 0) = N^{-m} P^{(m)}(0), \tag{4.7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n) \, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| = N^{-k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + N^n |\mu|^n) \, |d_\mu P^{(k)}(\mu)|,$$

откуда следует, что

$$N^{-k+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mu|^n \, d_\mu P^{(k)}(\mu)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n) \, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant N^{-k+n} \, 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |d_\mu P^{(k)}(\mu)| \tag{4.8}$$

и

$$\int\limits_{-a}^{a} (1 + |\lambda|^n) \, |d_\lambda T^{(k)}(N, \lambda)| = N^{-k} \int\limits_{-\frac{a}{N}}^{\frac{a}{N}} (1 + N^n |\mu|^n) \, |d_\mu P^{(k)}(\mu)| \leqslant$$
$$\leqslant N^{-k} (1 + |a|^n) \int\limits_{-\frac{a}{N}}^{\frac{a}{N}} |d_\mu P^{(k)}(\mu)|.$$

Из двух последних неравенств следует, что при $n > 0$ семейство (4.6) всегда удовлетворяет условию C, а при $n = 0$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда функция $P^{(k)}(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = 0$.

Для семейства (4.6), согласно теореме 4.2 и формулам (4.7) и (4.8), имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\rho(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\sigma(\lambda) +$$
$$+ (-1)^n \sum_{m < k-n} \frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)} G^{(n+m)}(0) \, P^{(m)}(0) \, N^{-m} + \frac{r(N)}{N^{k-n}}, \tag{4.9}$$

где

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} |r(N)| \leqslant 16\cdot 10^7\cdot 2^k\cdot h^{-k}\sigma^*\left(\frac{1}{h}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d_\mu P^{(k)}(\mu)|. \qquad (4.9')$$

(При $n=0$ предполагается, конечно, непрерывность $P^{(k)}(\lambda)$ в точке $\lambda=0$.)

Используя связь функции $G(x)$ с преобразованием Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка функции $\alpha(\lambda)=\rho(\lambda)-\sigma(\lambda)$, замечание к лемме 2.1 и замечание 1 к лемме 3.1, можно доказать такую теорему:

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть семейство S непрерывных слева функций $\alpha(\lambda)$, имеющих ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, удовлетворяет следующим условиям:*

1.
$$\sup_{-\infty<a<\infty}\left[\sup_{\alpha(\lambda)\in S}(1+|a|^n)^{-1}\bigvee_a^{a+\frac{1}{h}}\{\alpha(\lambda)\}\right]<\infty,$$

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}\sup_{\alpha(\lambda)\in S}|a|^{-n}\bigvee_a^{a+\frac{1}{h}}\{\alpha(\lambda)\}=S^*\left(\frac{1}{h}\right)<\infty.$$

2. *Преобразования Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка функций $\alpha(\lambda)$ $E_{n+2}(x,\alpha)$ дифференцируемы в интервале $(-h, h)$ $k+2$ раза $(k\geqslant 0)$, причем*

$$\sup_{\alpha(\lambda)\in S}\left[\int\limits_{-h}^{h}|E_{n+2}^{(k+2)}(x,\alpha)|\,dx+\sum_{l=0}^{k+2}|E_{n+2}^{(l)}(0,\alpha)|\right]<\infty.$$

3. *В точке $x=0$ ряды Фурье функций $E_{n+2}^{(k+2)}(x,\alpha)$ и им сопряженные сходятся равномерно для всего семейства.*

Если семейство ядер $T(N,\lambda)$ удовлетворяет условиям A, B, C, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(N,\lambda)\,d\alpha(\lambda)=\sum_{m\leqslant k-n}\frac{(-i)^m}{\Gamma(m+1)}E_{n+2}^{(n+2+m)}(0,\alpha)\,T^{(m)}(N,0)+R(N,\alpha),$$

где

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_{\alpha(\lambda)\in S}\frac{|R(N,\alpha)|}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\lambda|^n)\,|d_\lambda T^{(k)}(N,\lambda)|}\leqslant 8\cdot 10^7\cdot 2^k\cdot h^{-k}S^*\left(\frac{1}{h}\right).$$

Пример. Пусть непрерывная слева функция $\alpha(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале и

$$\overline{\lim_{|a|\to\infty}}|a|^{-n}\bigvee_a^{a+\frac{1}{h}}\{\alpha(\lambda)\}=\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right)<\infty.$$

Пусть, далее, преобразование Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка этой функции $E_{n+2}(x)$ непрерывно дифференцируемо в каждом из интервалов $(-h, 0)$ и $(0, h)$. Тогда

$$E_{n+2}(x) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{E_{n+2}^{(m)}(+0) - E_{n+2}^{(m)}(-0)}{2m!} |x| x^{m-1} + \mathscr{E}(x), \tag{4.10}$$

где функция $\mathscr{E}(x)$ дифференцируема $n+2$ раза во всем интервале $(-h, h)$, причем ее производные до $(n+1)$-го порядка включительно непрерывны и

$$\frac{\mathscr{E}^{(n+2)}(-0) + \mathscr{E}^{(n+2)}(+0)}{2} = \frac{E_{n+2}^{(n+2)}(-0) + E_{n+2}^{(n+2)}(+0)}{2}. \tag{4.11}$$

Так как преобразование Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка функции λ^{k+1} равно *

$$\frac{(k+1)(i)^k}{2(n+1-k)!} |x| x^{n-k} + P_{n+1}(x) \quad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

где $P_{n+1}(x)$ — полином $(n+1)$-й степени, то функция

$$\beta(\lambda) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(i)^{-n-1+m}}{(n+2-m)} \{E_{n+2}^{(m)}(+0) - E_{n+2}^{(m)}(-0)\} \lambda^{n+2-m} \tag{4.12}$$

имеет преобразование Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка, равное

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{E_{n+2}^{(m)}(+0) - E_{n+2}^{(m)}(-0)}{2m!} |x| x^{m-1} + Q_{n+1}(x),$$

где $Q_{n+1}(x)$ — полином $(n+1)$-й степени. Следовательно, функция $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) - \beta(\lambda)$ имеет преобразование Бохнера—Стильтьеса $(n+2)$-го порядка, равное $\mathscr{E}(x) - Q_{n+1}(x)$ и, согласно (4.12),

$$\gamma^*\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant \alpha^*\left(\frac{1}{h}\right) + \beta^*\left(\frac{1}{h}\right) = \alpha^*\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{h} | E'_{n+2}(+0) - E'_{n+2}(-0)|. \tag{4.13}$$

Поэтому если ряд Фурье функции $\mathscr{E}^{(n+2)}(x)$ и ему сопряженный сходятся в точке $x = 0$, а семейство $T(N, \lambda)$ удовлетворяет условиям A, B, C с $k = n$, то, согласно теореме 4.3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d_\lambda \{\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)\} = \frac{\mathscr{E}^{(n+2)}(+0) + \mathscr{E}^{(n+2)}(-0)}{2} T(N, 0) + R(N),$$

где

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{|R(N)|}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n) | d_\lambda T^{(n)}(N, \lambda)|} \leqslant$$

$$\leqslant 8 \cdot 10^7 \cdot 2^k \cdot h^{-k} \left\{\alpha^*\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{h} | E'_{n+2}(+0) - E'_{n+2}(-0)|\right\}.$$

* См., например, ([4]), стр. 114.

Отсюда, согласно (4.11) и (4.12), следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \frac{E_{n+2}^{(n+2)}(+0) + E_{n+2}^{(n+2)}(-0)}{2} T(N, 0) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda) \sum_{m=1}^{n+1} (i)^{-n-1+m} \{E_{n+2}^{(m)}(+0) - E_{n+2}^{(m)}(-0)\} \lambda^{n+1-m} d\lambda + R(N)$$

с той же оценкой для $R(N)$.

§ 5. Некоторые приложения

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые приложения предыдущих теорем. При этом мы ограничимся здесь только такими задачами, в которых можно использовать эти теоремы без предварительных сколько-нибудь сложных преобразований.

На протяжении всего параграфа мы будем пользоваться простейшим семейством $T(N, \lambda)$ вида

$$T(N, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\lambda| < N, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |\lambda| = N, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > N, \end{cases} \tag{5.1}$$

которое, очевидно, удовлетворяет условиям А, В, С при $k = 0$. Если $n = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^n) |d_\lambda T(N, \lambda)| = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |d_\lambda T(N, \lambda)| = 4. \tag{5.2}$$

Далее, для любой непрерывной слева функции $\alpha(\lambda)$, имеющей ограниченную вариацию в каждом конечном интервале, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(N+0) + \alpha(N)}{2} - \frac{\alpha(-N+0) + \alpha(-N)}{2}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим сначала простейшие приложения к спектральному анализу дифференциальных операторов.

Пусть дифференциальный оператор

$$L[u] = \frac{d^2}{dx^2} u(x) - q(x) u(x)$$

задан на полуинтервале $[0, a)$, где $a \leqslant \infty$ и вещественная функция $q(x)$ суммируема на каждом сегменте $[0, b]$ при любом $b < a$.

Краевая задача для оператора L определяется граничным условием в нуле:

$$u'(0) - \theta u(0) = 0 \tag{5.4}$$

и, возможно, в точке a.

Обозначим через $\omega(\lambda, x)$ решение уравнения

$$L[u] + \lambda u = 0$$

при начальных условиях:

$$u(0)=1, \quad u'(0)=\theta.$$

Каждой краевой задаче (5.4) соответствует неубывающая непрерывная слева спектральная функция $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$, порождающая изометрическое отображение пространства $L^2[0, a)$ на $L^2_{\{\rho\}}(-\infty, \infty)$ по формулам:

$$F(\lambda)=\underset{b\to a}{\text{l. i. m.}}\int_0^b f(x)\,\omega(\lambda, x)\,dx, \tag{5.5}$$

$$f(x)=\underset{N\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{-N}^{N} F(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\rho(\lambda), \tag{5.5'}$$

где интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{\{\rho\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2[0, a)$ соответственно и

$$\int_0^a |f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Для спектральной функции $\rho(\lambda)$ имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\left|\frac{\rho(\lambda+0)+\rho(\lambda)}{2}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\theta-\rho(-\infty)\right|\leqslant 5\cdot 10^7\cdot a^{-1}.$$

В частности, если оператор L задан на полуоси (т. е. $a=\infty$), то при $\lambda\to+\infty$

$$\rho(\lambda)-\rho(-\infty)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}-\theta+o(1).$$

Доказательство. Пусть $\rho(\lambda)$ — спектральная функция краевой задачи (5.4) и $\rho(+0)=0$, что всегда можно предполагать. В работах И. М. Гельфанда — Б. М. Левитана ([5]) и М. Г. Крейна ([6]) доказано, что функция

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\rho(\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sqrt{\lambda}$$

должна иметь в интервале $(-2a, 2a)$ две абсолютно непрерывные производные и $\Phi''(0)=-\theta$. Отсюда, в частности, следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0}\operatorname{ch}\sqrt{|\lambda|}\,x\,d\rho(\lambda)<\infty \quad (0\leqslant x\leqslant 2a) \tag{5.6}$$

сходится при всех $x\in(-2a, 2a)$ и функция

$$\Phi_1(x)=\int_{-\infty}^{+0}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\rho(\lambda)$$

бесконечно дифференцируема в этом интервале, причем

$$\Phi_1''(0) = -\rho(-\infty).$$

Положим

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sqrt{\lambda} = \Phi_2(x). \tag{5.7}$$

Так как

$$\Phi_2(x) = \Phi(x) - \Phi_1(x),$$

то в интервале $(-2a, 2a)$ функция $\Phi_2(x)$ тоже имеет две абсолютно непрерывные производные и

$$\Phi_2''(0) = -\theta + \rho(-\infty).$$

Пусть $f(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне интервала $(-2a, 2a)$. Умножая обе части равенства (5.7) на $f''(x)$ и дважды интегрируя по частям, получим:

$$\int_{+0}^{\infty} C_f(\sqrt{\lambda})\,d\rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} C_f(\sqrt{\lambda})\,d\sqrt{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Phi_2''(x)\,dx,$$

где

$$C_f(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\mu x\,dx.$$

Введем непрерывную слева функцию $\rho_1(\mu)$, совпадающую с $\rho(\mu^2)$ при $\mu > 0$ и нечетно продолженную в точках непрерывности на отрицательную полуось. Тогда предыдущая формула может быть записана так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_f(\mu)\,d\rho_1(\mu) - \int_{-\infty}^{\infty} C_f(\mu)\,d\frac{2}{\pi}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,2\Phi_2''(x)\,dx. \tag{5.8}$$

Заметим, что если

$$E_f(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\mu x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\mu x\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\mu x\,dx,$$

то, в силу нечетности (в точках непрерывности) функций $\rho_1(\mu)$ и $\sigma(\mu) = \frac{2}{\pi}\mu$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\mu)\,d\rho_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_f(\mu)\,d\rho_1(\mu), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\mu)\,d\frac{2}{\pi}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} C_f(\mu)\,d\frac{2}{\pi}\mu,$$

откуда, согласно (5.8), следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\mu)\,d\rho_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\mu)\,d\frac{2}{\pi}\mu + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,2\Phi_2''(x)\,dx,$$

какова бы ни была бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, равная нулю вне интервала $(-2a, 2a)$.

Таким образом, функции $\rho_1(\mu)$ и $\sigma(\mu) = \frac{2}{\pi}\mu$ удовлетворяют всем условиям теоремы 4.2 при $n = k = 0$ и $h = 2a$. Здесь функция $G(x) = 2\Phi_2''(x)$ абсолютно непрерывна и

$$G(0) = -2\theta + 2\rho(-\infty), \quad \sigma^*\left(\frac{1}{h}\right) = \sigma^*\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{\pi a}.$$

Поэтому для семейства (5.1) ядер $T(N, \lambda)$, согласно теореме 4.2 и формулам (5.2), (5.3), имеем:

$$\varlimsup_{N\to\infty} \left|\rho_1(N+0) + \rho_1(N) - \frac{4}{\pi}N + 2\theta - 2\rho(-\infty)\right| \leqslant 32\cdot 10^7 \cdot \frac{1}{\pi a},$$

откуда, возвращаясь к функции $\rho(\lambda)$, получим:

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} \left|\frac{\rho(\lambda+0)+\rho(\lambda)}{2} - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \theta - \rho(-\infty)\right| \leqslant 5\cdot 10^7 \cdot a^{-1}.$$

В частности, если оператор L задан на полуоси $(a = \infty)$, то при $\to +\infty$

$$\rho(\lambda) - \rho(-\infty) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} - \theta + o(1),$$

что и требовалось доказать.

Для исследования сходимости разложения (5.5′) нам понадобятся простейшие свойства операторов преобразования. Как известно [см. (7),(8)], существуют оператор V и ему обратный V^{-1} вида

$$\underset{x}{V}[f(x)] = f(x) + \int_0^x K(x, u) f(u)\, du, \quad \underset{x}{V^{-1}}[g(x)] = g(x) + \int_0^x H(x, u) g(u)\, du$$

такие, что

$$\omega(\lambda, x) = \underset{x}{V}[\cos\sqrt{\lambda}x], \quad \cos\sqrt{\lambda}x = \underset{x}{V^{-1}}[\omega(\lambda, x)].$$

При этом ядра $K(x, u)$ и $H(x, u)$ ограничены в каждой области $0 \leqslant u \leqslant x \leqslant b$ при любом фиксированном $b < a$. Поэтому из формулы

$$\omega(\lambda, x) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, u)\cos\sqrt{\lambda}u\, du$$

следует:

$$\begin{aligned} |\omega(\lambda, x)| &\leqslant C(x) && \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda < \infty, \\ |\omega(\lambda, x)| &\leqslant C(x)\,\mathrm{ch}\sqrt{|\lambda|}x && \text{при} -\infty < \lambda \leqslant 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где функция

$$C(x) = 1 + \int_0^x |K(x, u)|\, du$$

ограничена в каждом сегменте $[0, b]$, если $b < a$:

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} C(x) = C_1(b) < \infty. \tag{5.10}$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция из пространства $L^2[0, a)$ и*

$$F(\lambda) = \underset{b \to a}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_0^b f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx,$$

$$C(\sqrt{\lambda}) = \underset{b \to a}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_0^b f(x) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, dx,$$

где интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_{\{\rho\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\{\sqrt{\lambda}\}}[0, \infty)$ соответственно.

При каждом фиксированном $b < a$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$ и

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{0 \leqslant x \leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{N} F(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_0^N C(\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, d\sqrt{\lambda} \right| = 0.$$

Доказательство. Пусть b — произвольное положительное число меньшее a. Возьмем произвольное положительное $h < \frac{1}{2}(a - b)$ и рассмотрим в области $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant h$ семейство функций

$$u_M(x, t) = \int_{-M}^{M} F(\lambda)\, \omega(\lambda, t)\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda). \tag{5.11}$$

Эти функции, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$u''_{xx} - q(x)\, u = u''_{tt} - q(t)\, u$$

при начальных данных

$$u_M(x, 0) = f_M(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_M(x, t)\big|_{t=0} = \theta f_M(x),$$

где

$$f_M(x) = \int_{-M}^{M} F(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda). \tag{5.12}$$

Пользуясь методом Римана для решения этого уравнения и замечая, что

$$u_M(x, t) = u_M(t, x),$$

получим:

$$u_M(x, t) = \frac{f_M(x+t) + f_M(|x-t|)}{2} + \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, u) f_M(u)\, du, \qquad (5.13)$$

где ядро $W(x, t, u)$ ограничено в области $|x-t| \leqslant u \leqslant x+t$, $0 \leqslant x \leqslant b$ $0 \leqslant t \leqslant h$.

Применяя к обеим частям формулы (5.11) оператор $\underset{t}{V}^{-1}$, получим:

$$\int_{-M}^{M} F(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda) = u_M(x, t) + \int_0^t H(t, y) u_M(x, y)\, dy.$$

откуда следует:

$$\int_{-M}^{M} C_g(\sqrt{\lambda}) F(\lambda) \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-h}^{h} g(t) \left\{ u_M(x, |t|) + \int_0^{|t|} H(|t|, y) u_M(x, y)\, dy \right\} dt, \qquad (5.14)$$

$$C_g(\sqrt{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt,$$

какова бы ни была бесконечно дифференцируемая функция $g(t)$, равная нулю вне интервала $(-h, h)$.

Пусть теперь $M \to \infty$. Согласно (5.5′) и (5.12), последовательность $f_M(x)$ сходится в метрике пространства L^2 $[0, a)$ к функции $f(x)$. Поэтому согласно (5.13),

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-h}^{h} g(t) \left\{ u_M(x, |t|) + \int_0^{|t|} H(|t|, y) u_M(x, y)\, dy \right\} dt =$$

$$= \int_{-h}^{h} g(t) \frac{f(|x+t|) + f(|x-t|)}{2}\, dt + \int_{-h}^{h} g(t) A_1(x, t)\, dt, \qquad (5.15)$$

где

$$A_1(x, t) = \int_{|x-|t||}^{x+|t|} W(x, |t|, u) f(u)\, du + \int_0^{|t|} H(|t|, y) \frac{f(x+y) + f(|x-y|)}{2}\, dy +$$

$$+ \int_0^{|t|} \left\{ H(|t|, y) \int_{|x-y|}^{x+y} W(x, y, u) f(u)\, du \right\} dy.$$

Так как в рассматриваемой нами области ядра $H(t, y)$ и $W(x, t, u)$ ограничены, то, согласно неравенству Буняковского,

$$|A_1(x, t)| \leqslant C_2 \|f\| |t|^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant b; -h \leqslant t \leqslant h), \tag{5.16}$$

где C_2 — некоторая константа.

Далее, при любом $m \geqslant 0$ имеем:

$$\int_{-M}^{+0} (1+|\lambda|)^m |\cos \sqrt{\lambda} t \omega(\lambda, x) F(\lambda)| d\rho(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_{-M}^{+0} (1+|\lambda|)^{2m} |\cos \sqrt{\lambda} t \omega(\lambda, x)|^2 d\rho(\lambda) \int_{-M}^{+0} |F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда, согласно (5.5′), (5.6), (5.9) и (5.10), следует, что в рассматриваемой нами области интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} t \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda) = B(x, t)$$

сходится абсолютно и равномерно, а функция $B(x, t)$ бесконечно дифференцируема по t. Поэтому при $0 \leqslant x \leqslant b$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda) \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно, а функция

$$A_2(x, t) = \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} t \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda) \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda)$$

удовлетворяет неравенству:

$$|A_2(x, t)| \leqslant C_3 |t| \quad (0 \leqslant x \leqslant b; -h < t < h), \tag{5.17}$$

где C_3 — некоторая константа.

Таким образом,

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{+0} C_g(\sqrt{\lambda}) F(\lambda) \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda) =$$
$$= \lim_{M \to \infty} \int_{-h}^{h} \left\{ g(t) \int_{-M}^{+0} F(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} t \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda) \right\} dt =$$
$$= C_g(0) \int_{-\infty}^{+0} F(\lambda) \omega(\lambda, x) d\rho(\lambda) + \int_{-h}^{h} g(t) A_2(x, t) dt. \tag{5.18}$$

Наконец, согласно известным свойствам классического интеграла Фурье,

$$\int_{-h}^{h} g(t)\frac{f(|x+t|)+f(|x-t|)}{2}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\,C(\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda}. \qquad (5.19)$$

Сопоставляя равенства (5.14), (5.15), (5.18) и (5.19), получим:

$$\int_{+0}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\,F(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\rho(\lambda) + C_g(0)\int_{-\infty}^{+0} F(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\rho(\lambda) +$$

$$+\int_{-h}^{h} g(t)\,A_2(x, t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} C_g(\sqrt{\lambda})\,C(\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda} + \int_{-h}^{h} g(t)\,A_1(x, t)\,dt,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_g(\mu)\,d_\mu\alpha(\mu, x) = \int_{-h}^{h} g(t)\,A(x, t)\,dt, \qquad (5.20)$$

где функции $\alpha(\mu, x)$ определяются формулой:

$$\alpha(\mu, x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\mu^2} F(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\mu^2} C(\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda}, & \text{если } \mu > 0, \\ 0, & \text{если } \mu \leqslant 0, \end{cases}$$

и

$$A(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t).$$

Заметим, что из оценок (5.16) и (5.17) следует:

$$|A(x, t)| \leqslant C_4 |t|^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant b, \quad -h < t < h), \qquad (5.21)$$

где C_4 — некоторая константа.

Из определения функций $\alpha(\mu, x)$ вытекает, что при любом $l > 0$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b} \mathop{\mathrm{V}}_{l}^{l+\frac{1}{h}} \{\alpha(\mu, x)\} \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)|\,|\omega(\lambda, x)|\,d\rho(\lambda) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C(\sqrt{\lambda})|\,d\sqrt{\lambda},$$

откуда, согласно (5.9) и (5.10), находим:

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b} \overset{l+\frac{1}{h}}{\underset{l}{\mathrm{V}}} \{\alpha(\mu, x)\} \leqslant C_1(b) \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)|\, d\rho(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C(\sqrt{\lambda})|\, d\sqrt{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(b)\left[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda) \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} d\rho(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C(\sqrt{\lambda})|^2\, d\sqrt{\lambda} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} d\sqrt{\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_1(b)\left[\left\{\rho\left(\left[l+\frac{1}{h}\right]^2\right) - \rho(l^2)\right\} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2}{\pi} h^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C(\sqrt{\lambda})|^2\, d\sqrt{\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В силу теоремы 5.1,

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \left\{\rho\left(\left[l+\frac{1}{h}\right]^2\right) - \rho(l^2)\right\} < \infty$$

и так как $F(\lambda) \in L^2_{\{\rho\}}(-\infty, \infty)$, $C(\sqrt{\lambda}) \in L^2_{\{\sqrt{\lambda}\}}[0, \infty)$, то

$$\lim_{l\to\infty} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |F(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda) = 0, \qquad \lim_{l\to\infty} \int_{l^2}^{\left(l+\frac{1}{h}\right)^2} |C(\sqrt{\lambda})|^2\, d\sqrt{\lambda} = 0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \overset{l+\frac{1}{h}}{\underset{l}{\mathrm{V}}} \{\alpha(\mu, x)\} = 0. \tag{5.22}$$

Совершенно так же проверяется, что

$$\sup_{-\infty<l<\infty} \left[\sup_{0\leqslant x\leqslant b} \overset{l+\frac{1}{h}}{\underset{l}{\mathrm{V}}} \{\alpha(\mu, x)\}\right] < \infty.$$

Следовательно, семейство функций $\alpha(\mu, x)$ $(0 \leqslant x \leqslant b)$ удовлетворяет при $n = 0$ всем условиям, при которых справедливо замечание к лемме 2.1.

Для семейства (5.1) ядер $T(N, \mu)$ при любом $\varepsilon \in (0, h)$ имеем:

$$T(N, \mu) = T_1(N, \mu) + T_2(N, \mu),$$

где

$$T_1(N, \mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{i\mu x}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos \mu x\, dx,$$

$$T_2(N, \mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\left[1 - \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] e^{i\mu x}\, dx.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) + \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x)$$

и так как, согласно (5.22) и замечанию к лемме 2.1,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T_2(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) \right| = 0,$$

то

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) \right| = \overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) \right|,$$

или (согласно (5.3))

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{\alpha(N+0, x) + \alpha(N, x)}{2} \right| = \overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) \right|.$$

Функция $T_1(N, \mu)$ является косинус-преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемой функции

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin Nx}{x} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (0 < \varepsilon < h),$$

равной нулю вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому, в силу (5.20),

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) A(x, t)\, dt,$$

откуда, используя оценку (5.21), получим:

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T_1(N, \mu)\, d_\mu \alpha(\mu, x) \right| \leqslant \frac{C_4}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t|^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{4C_4}{\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{\alpha(N+0, x) + \alpha(N, x)}{2} \right| \leqslant \frac{4C_4}{\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

откуда, в силу (5.22) и произвольной малости числа $\varepsilon > 0$, выводим:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} |\alpha(N, x)| = 0.$$

Вспоминая определение функции $\alpha(\mu, x)$, окончательно получим:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{N^2} F(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, d\rho(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{N^2} C(\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda} x\, d\sqrt{\lambda} \right| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичная теорема имеет место и для других краевых условий, так же как для операторов L с двумя сингулярными концами.

Таким образом, разложение функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L сходится (суммируемо методом Чезаро) тогда и только тогда, когда сходится (суммируемо методом Чезаро) разложение этой функции в классический интеграл Фурье.

Частные случаи этой теоремы были ранее рассмотрены Хааром (9), Стоном (10), Титчмаршем (11) и Б. М. Левитаном (12).*

Приведем в заключение оценку остаточного члена в следующей теореме тауберова типа, аналогичной известной теореме Икеара:

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть* $\rho(\lambda)$ — *непрерывная слева неубывающая функция. Если интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\lambda}\, d\rho(\lambda) = \frac{A}{z} + G(z) \quad (z = x + iy) \tag{5.23}$$

сходится при всех $x > 0$ *и равномерно относительно* $y \in (-h, h)$ *существует предел*

$$\lim_{x \to +0} G(x + iy) = G(iy) \quad (-h < y < h),$$

причем ряд Фурье функции $G(iy) + G(-iy)$ *сходится в точке* $y = 0$, *то*

$$\overline{\lim_{N \to +\infty}} \left| \frac{\rho(N+0) + \rho(N)}{2} - AN - \rho(-\infty) - G(0) \right| \leqslant 32 \cdot 10^7 \cdot A \cdot h^{-1}.$$

Доказательство. Из формулы (5.23) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\lambda}\, d\rho(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-z\lambda}\, dA\lambda + G(z).$$

Умножив обе части этого равенства на произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $f(y)$, равную нулю вне интервала $(-h, h)$, после интегрирования получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, e^{-x\lambda}\, d\rho(\lambda) = \int_{0}^{\infty} E_f(\lambda) e^{-x\lambda}\, dA\lambda + \int_{-h}^{h} f(y)\, G(x + iy)\, dy,$$

откуда при $x \to 0$ следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{0}^{\infty} E_f(\lambda)\, dA\lambda + \int_{-h}^{h} f(y)\, G(iy)\, dy.$$

Таким образом, для функций $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$, где

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} A\lambda & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0, \end{cases}$$

выполнены все условия теоремы 4.2 при $n = k = 0$. Следовательно, для семейства (5.1) ядер $T(N, \lambda)$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} T(N, \lambda)\, d\sigma(\lambda) + G(0) + R(N),$$

где, согласно (5.2) и теореме 4.2,

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} |R(N)| \leqslant 4 \cdot 8 \cdot 10^7 \sigma^* \left(\frac{h}{1}\right) = 32 \cdot 10^7 A h^{-1}.$$

---

* Примечание при корректуре: после того как настоящая статья была сдана в печать, вышла работа Б. М. Левитана (Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955)., 33—58), в которой содержатся доказательства теорем 5.1 и 5.2 для случая $a=\infty$

Поэтому, согласно (5.3) и определению функции $\sigma(\lambda)$,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{\rho(N+0)+\rho(N)}{2}-\frac{\rho(-N+0)+\rho(-N)}{2}-AN-G(0)\right|\leqslant 32\cdot 10^{7}\cdot Ah^{-1}.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to-\infty}\rho(N)=\rho(-\infty)>-\infty.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{\rho(N+0)+\rho(N)}{2}-\rho(-\infty)-AN-G(0)\right|\leqslant 32\cdot 10^{7}\cdot A\cdot h^{-1},$$

что и требовалось доказать.

В частности, если условия теоремы выполнены при любом конечном h, то при $N\to+\infty$

$$\rho(N)-\rho(-\infty)=AN+G(0)+o(1).$$

Поступило
8. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Московского математ. об-ва т. 1 (1952), 363—375.

[2] Левитан Б. М., Об одной специальной тауберовой теореме, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 269—284.

[3] Марченко В. А., О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси. III, Записки матем. отд. физ.-матем. факультета ХГУ и Харьковского матем. об-ва, т. XXII (1950), 116—121.

[4] Bochner C., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[5] Гельфанд И. М. и Левитан Б М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Известия Ак. наук СССР, серия матем. 15 (1951), 300—360.

[6] Крейн М. Г., О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка, Доклады Ак. наук СССР, 38, № 3 (1953), 405—408.

[7] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Московского матем. об-ва, т. 1 (1952), 328—348.

[8] Повзнер А. Я., О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси, Матем. сб., 23 (65) : 1 (1948), 3—52.

[9] Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., 69 (1910), 331—339.

[10] Stone M. H., Certain integrals analogous to Fourier integrals, Math. Zeitschr., 28 (1928), 654—676.

[11] Titchmarsh E. C., On the summability of Eigenfunctions expansions, The quaterly J. of math., 2, No. 8, (1951), 258—268.

[12] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 331—367.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 423—444

С. Я. АЛЬПЕР

О РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В статье устанавливается оценка наилучшего приближения и другие оценки приближения с помощью полиномов, которые получаются различными методами суммирования ряда Фабера для функции, аналитической в односвязной области и непрерывной в ее замыкании. Граница области предполагается гладкой с некоторым добавочным условием относительно гладкости.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D, ограниченной замкнутой кривой Жордана, и непрерывная в замыкании этой области. Через $\rho_n(f, \overline{D})$ мы будем обозначать наилучшее приближение функции $f(z)$ в $\overline{D}$ полиномами n-й степени, т. е. точную нижнюю границу чисел

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z)-P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени $\leqslant n$.

Если функция $f(z)$, аналитическая в D, имеет непрерывную производную $f^{(k)}(z)$, удовлетворяющую в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем α $(0<\alpha\leqslant 1)$, то для случая, когда граница D — аналитическая кривая, известна следующая оценка для $\rho_n(f, \overline{D})$ [см. ([1])]:

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{A}{n^{k+\alpha}}. \tag{1}$$

Для случая, когда граница D — гладкая кривая с непрерывно вращающейся касательной, С. Н. Мергеляном ([2]) установлена оценка

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{B(\varepsilon)}{n^{k+\alpha-\varepsilon}}, \tag{2}$$

которая не может быть существенно улучшена во всем классе областей с гладкой границей и в указанном классе функций. Здесь A и $B(\varepsilon)$ — константы, не зависящие от n.

В настоящей работе устанавливается оценка для $\rho_n(f, \overline{D})$ сверху для случая области с гладкой границей при дополнительном ограничении на гладкость, а также изучаются оценки приближения $f(z)$ полиномами определенного вида, доставляемыми разложением $f(z)$ в ряд по полиномам Фабера при применении к нему различных методов суммирования.

§ 1

Для функций, аналитических в круге, известна такая теорема И. И. Привалова [см. (3), (4)]: если $f(z)=u(r,\vartheta)+iv(r,\vartheta)$ — аналитическая в круге $|z|<1$ функция, $u(r,\vartheta)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и на $|z|=1$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, то $v(r,\vartheta)$ также непрерывна в $|z|\leqslant 1$ и на $|z|=1$ удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем α.

Можно установить теорему аналогичного характера при более слабом ограничении для гармонической функции $u(r,\vartheta)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f(z)=u(r,\vartheta)+iv(r,\vartheta)$ — аналитическая в $|z|<1$ функция, причем $u(r,\vartheta)$ непрерывна в $|z|\leqslant 1$ и для модуля непрерывности $\eta_u(h)$ * функции $u(\vartheta)$, представляющей граничные значения $u(r,\vartheta)$, выполнено условие*

$$\int_0^c \frac{\eta_u(h)}{h}|\lg h|\,dh<\infty, \tag{3}$$

то $v(r,\vartheta)$ непрерывна в $|z|\leqslant 1$ и для модуля непрерывности $\eta_v(h)$ функции $v(\vartheta)$, граничной для $v(r,\vartheta)$, справедливо соотношение

$$\int_0^c \frac{\eta_v(h)}{h}\,dh<\infty. \tag{4}$$

Как известно [см. (4)], значения $v(\vartheta)$ можно выразить через $u(\vartheta)$ при помощи формулы:

$$v(\vartheta)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{u(\vartheta+t)-u(\vartheta)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt. \tag{5}$$

Очевидно, будем иметь:

$$v(\vartheta+h)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{u(\vartheta+t)-u(\vartheta+h)}{2\operatorname{tg}\frac{t-h}{2}}\,dt. \tag{6}$$

Назовем через R_1 и R_2 части интегралов (5) и (6), взятые по отрезку $(-2h,+2h)$; тогда

$$|R_1|=\left|-\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{u(\vartheta+t)-u(\vartheta)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt\right|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\frac{\eta_u(t)}{t}\,dt$$

и, аналогично,

$$|R_2|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{3h}\frac{\eta_u(t)}{t}\,dt.$$

* $\eta_u(h)=\sup|u(\vartheta')-u(\vartheta'')|$ для всевозможных ϑ' и ϑ'' с условием $|\vartheta'-\vartheta''|\leqslant h$.

Представим разность $v(\vartheta+h)-v(\vartheta)$ в виде

$$v(\vartheta+h)-v(\vartheta)=\widetilde{R}+R_2-R_1+R,$$

где

$$\widetilde{R}=-\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)[u(\vartheta+t)-u(\vartheta)]\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t-h)-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}t\right]dt,$$

$$R=[u(\vartheta+h)-u(\vartheta)]\int_{2h}^{\pi}\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t-h)-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t+h)\right]dt.$$

В силу (3), легко получается оценка.

$$\int_0^c\frac{|R_1|}{h}dh\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^c\frac{dh}{h}\int_0^{2h}\frac{\eta_u(t)}{t}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2c}\frac{\eta_u(t)}{t}dt\int_{\frac{t}{2}}^{c}\frac{dh}{h}<\infty;$$

аналогично имеем:

$$\int_0^c\frac{|R_2|}{h}dh<\infty.$$

Замечая, что интеграл в формуле для R стремится к конечному пределу при $h\to0$, мы устанавливаем конечность интеграла

$$\int_0^c\frac{|R|}{h}dh.$$

Нетрудно также получить оценку

$$\int_0^c\frac{|\widetilde{R}|}{h}dh\leqslant C_1\int_0^c dh\int_{2h}^{\pi}\frac{\eta_u(t)}{t^2}dt.$$

Полагая $t=2hr$ и замечая, что, по известному свойству [см. ([5])] модуля непрерывности,

$$\eta_u(2hr)\leqslant(2r+1)\,\eta_u(h),$$

мы, используя (3), получим:

$$\int_0^c\frac{|\widetilde{R}|}{h}dh\leqslant\frac{C_1}{2}\int_0^c\frac{\eta_u(h)}{h}\int_1^{\frac{\pi}{2h}}\frac{2r+1}{r^2}dr<\infty.$$

Этим завершается доказательство неравенства (4).

Докажем теорему, подобную одной теореме Келлога *, относительно граничной производной функции, производящей конформное отображение.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $z=\psi(w)$, аналитическая в $|w|<1$, однолистно отображает этот круг на область D, ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана Γ, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги s на Γ, имеет модуль не-*

* См., например, ([6]).

прерывности $j(h)$ *такой, что*

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\lg h| \, dh < \infty, \tag{7}$$

то $\psi'(w)$ *непрерывна в* $|w| \leqslant 1$ *и на* $|w| = 1$ *имеет место соотношение*

$$\int_0^c \frac{\sigma(h)}{h} \, dh < \infty, \tag{8}$$

где $\sigma(h)$ — *модуль непрерывности* $\psi'(e^{i\vartheta})$, *как функции от* ϑ *.

Заметим, что здесь ограничение для Γ — более слабое, чем в теореме Келлога, где требуется, чтобы $\vartheta(s)$ удовлетворяло условию Липшица по s с показателем α, $0 < \alpha < 1$.

Для доказательства заметим, что при условиях теоремы справедливо соотношение

$$\arg \psi'(w) = \vartheta(z) - \arg w - \frac{\pi}{2}, \quad |w| = 1$$

[см. ([6])], и кроме того, $\psi'(w)$ принадлежит классу H_p при всяком $p > 0$.

Отсюда при $\vartheta' < \vartheta$ имеем:

$$|s - s'| = \int_{\vartheta'}^{\vartheta} |\psi'(e^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqslant \sqrt{\int_{\vartheta'}^{\vartheta} |\psi'(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \cdot \int_{\vartheta'}^{\vartheta} d\vartheta} \leqslant M_1 |\vartheta - \vartheta'|^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$|\arg \psi'(e^{i\vartheta}) - \arg \psi'(e^{i\vartheta'})| \leqslant |\vartheta(s) - \vartheta(s')| + |\vartheta - \vartheta'| \leqslant$$

$$\leqslant j(|s - s'|) + |\vartheta - \vartheta'| \leqslant M_2 j(|\vartheta - \vartheta'|^{\frac{1}{2}}) + |\vartheta - \vartheta'|.$$

Если через $\mu(h)$ обозначить модуль непрерывности $\arg \psi'(e^{i\vartheta})$ как функции от ϑ, то, в силу (7):

$$\int_0^c \frac{\mu(h)}{h} |\lg h| \, dh \leqslant M_2 \int_0^c \frac{j(\sqrt{h})}{h} |\lg h| \, dh + \int_0^c |\lg h| \, dh < \infty.$$

Применяя предыдущую теорему к функции $\lg \psi'(w)$, заключаем, что это — непрерывная функция в $|w| \leqslant 1$, и для модуля непрерывности $\lambda(h)$ функции $\lg \psi'(e^{i\vartheta})$ от переменной ϑ будем иметь:

$$\int_0^c \frac{\lambda(h)}{h} \, dh < \infty. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $\psi'(w) \neq 0$ и непрерывна в круге $|w| \leqslant 1$. Заме-

* Если $\overline{\sigma}(h)$ — модуль непрерывности $\psi'(w)$ как функции от w на $|w| = \rho$, т. е. $\sup |\psi'(w_1) - \psi'(w_2)|$ по всевозможным w_1 и w_2 с условиями $|w_1| = |w_2| = \rho$, $|w_1 - w_2| \leqslant h$, то, как легко видеть, $\overline{\sigma}(h) < A'\sigma(h)$ и $\sigma(h) < A''\overline{\sigma}(h)$.

чая, что для значений w и w', удовлетворяющих условиям

$$|w| < M, \quad |w'| < M,$$

справедливо неравенство

$$|e^w - e^{w'}| \leqslant |w - w'| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nM^{n-1}}{n!} < K_M |w - w'|,$$

мы положим

$$w = \lg \psi'(e^{i\vartheta}), \quad w' = \lg \psi'(e^{i\vartheta'});$$

тогда

$$|\psi'(e^{i\vartheta}) - \psi'(e^{i\vartheta'})| < K_M \lambda(h)$$

при $|\vartheta - \vartheta'| \leqslant h$. Отсюда при помощи (9) получим искомое неравенство (8).

Замечание. Если при условиях теоремы 2 для кривой Γ функция $z' = \psi(w)$ отображает область $|w| > 1$ на внешность кривой Γ, причем точка $z = 0$ лежит внутри Γ, то, как нетрудно видеть, результат получается аналогичный, т. е. $\psi'(w)$ непрерывна и $\neq 0$ в $|w| \geqslant 1$, и для модуля непрерывности $\sigma(h)$ функции $\psi'(e^{i\vartheta})$ справедливо соотношение (8).

§ 2

Пусть K — ограниченный континуум с односвязным дополнением G, содержащим точку $z = \infty$.

Область G отобразим конформно на область $|w| > \rho$ при помощи функции $w = \Phi(z)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1;$$

через $z = \psi(w)$ будем обозначать обратную функцию. Функции $\Phi_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ представляют собой систему полиномов Фабера [см. ([7])], соответствующих континууму K. Мы будем предполагать, что $\psi(w)$ непрерывны в области $|w| > \rho$ с включением точек окружности $|w| = \rho$. В этом случае для всякой функции $f(z)$, непрерывной на континууме K, можно определить числа

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau| = \rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{k+1}} d\tau \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

и составить формально ряд по полиномам Фабера с коэффициентами (10)

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z). \tag{11}$$

ЛЕММА 1. *Если $f(z)$ — непрерывная функция на K и $\psi(w)$ непрерывна в области $|w| > \rho$ с включением точек окружности, то справедливо неравенство*:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right| < A_1 \max_{z \in k} |f(z)| \lg n, \tag{12}$$

где $|w| = \rho$, a_k *определяются формулой* (10) *и константа* $A_1 > 0$ *не зависит от* n *и* w.

Доказательство этой леммы приведено в работе ([8]).

Мы будем говорить дальше, что односвязная область D удовлетворяет условию j, если ее граница Γ представляет собой замкнутую гладкую кривую Жордана, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к вещественной оси как функция длины дуги s на Γ имеет модуль непрерывности $j(h)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\lg h| \, dh < \infty. \tag{13}$$

Заметим, что это условие в частности выполняется, если $\vartheta(s)$ удовлетворяет условию Липшица по s с каким-нибудь положительным показателем.

ЛЕММА 2. *Если область* D *удовлетворяет условию* j *и функция* $z = \psi(w)$, *определенная в начале* § 2, *отображает конформно* $|w| > \rho$ *на внешность* D, *то для значений* w, $|w| = \rho$, *справедливо неравенство*:

$$\int_{|\tau|=\rho} \left| \frac{1}{\tau - w} - \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(w)} \right| |d\tau| < A_2, \tag{14}$$

где A_2 *не зависит от* w.

Для доказательства заметим, что разность под знаком интеграла (14) можно представить в форме

$$\frac{\psi(\tau) - \psi(w) - \psi'(\tau)(\tau - w)}{(\tau - w)^2} : \frac{\psi(\tau) - \psi(w)}{\tau - w}.$$

Для производной $\psi'(w)$ на окружности $|w| = \rho$, согласно замечанию в конце § 1, имеем:

$$m \leqslant |\psi'(w)| \leqslant M,$$

откуда следует:

$$\left| \frac{\psi(\tau) - \psi(w)}{\tau - w} \right| \geqslant m_1 > 0 \tag{15}$$

для любых τ и w, удовлетворяющих условию:

$$|\tau| = \rho, \quad |w| = \rho;$$

m_1 не зависит от τ и w. Поэтому достаточно установить только неравенство

$$I = \int_{|\tau|=\rho} \left| \frac{\psi(\tau) - \psi(w) - \psi'(\tau)(\tau - w)}{(\tau - w)^2} \right| |d\tau| < A_3.$$

Последний интеграл можно представить в виде:

$$I = \int_{|\tau|=\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - w|^2} \left| \int_w^\tau [\psi'(t) - \psi'(\tau)] \, dt \right|,$$

где внутренний интеграл взят по наименьшей дуге окружности $|t| = \rho$ между точками w и τ.

Если $\sigma(h)$ обозначает, как и прежде, модуль непрерывности функции $\psi'(t) = \psi'(\rho e^{i\vartheta})$ в зависимости от ϑ, то, согласно теореме 2 и замечанию, будем иметь:

$$I \leqslant A_4 \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - w|^2} \int\limits_{w}^{\tau} \sigma(|t-\tau|)\,|dt| \leqslant A_4 \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{\sigma(|\tau - w|)}{|\tau - w|}\,|d\tau| < A_3, \quad (16)$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть область D удовлетворяет условию j и функция $f(z)$, аналитическая в D, непрерывна в $\overline{D}$.*

Пусть, далее, две функции: $\varphi_1(w)$, аналитическая в $|w| < \rho$, $\varphi_2(w)$, аналитическая в $|w| > \rho$, определены интегралом типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - w}\,d\tau; \quad (17)$$

тогда функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ непрерывны, соответственно, в областях $|w| \leqslant \rho$ и $|w| \geqslant \rho$ и справедливы неравенства:

$$\omega_1(\delta) < A_5\,\omega(\delta), \quad \omega_2(\delta) < A_6\,\omega(\delta), \quad (18)$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$, а $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ — модули непрерывности функций $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(w)$ на $|w| = \rho$; константы A_5 и A_6 зависят только от области.

Здесь $\omega(\delta)$ будем понимать как величину

$$\sup_{\substack{z',\, z'' \in \overline{D} \\ |z' - z''| \leqslant \delta}} |f(z') - f(z'')|.$$

Для произвольных областей такое определение модуля непрерывности, как показал С. Н. Мергелян ([2]), не является естественным, однако оно целесообразно для областей с гладкой границей, которые мы здесь рассматриваем.

Основная лемма И. И. Привалова об интеграле типа Коши приводит к такому следствию [см. ([9])]:

для всякой непрерывной функции $g(\zeta)$, заданной на замкнутой гладкой кривой Γ, из существования особого интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}\,d\zeta, \quad \tilde{z} \in \Gamma,$$

в смысле главного значения следует существование предельных значений интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

при приближении z к точке $\tilde{z}$ на Γ по некасательным путям, равных

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}\,d\zeta \pm \frac{1}{2}g(\tilde{z}), \tag{19}$$

где знак плюс берется для приближения изнутри области, знак минус — извне. Обратно, из существования предельных значений интеграла типа Коши изнутри или извне Γ по некасательным путям следует существование особого интеграла в смысле главного значения, причем предельные значения интеграла типа Коши определяются величиной (19).

Главное значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}\,d\zeta$$

есть предел интеграла, взятого по дуге Γ_ε, полученной удалением меньшей из дуг Γ с концами в точках $\zeta(\tilde{s}-\varepsilon)$ и $\zeta(\tilde{s}+\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Здесь $\tilde{s}$ — значение дуги s контура Γ, отсчитываемой от некоторой точки, соответствующее точке $\tilde{z}$. Легко убедиться в том, что основная лемма И. И. Привалова и приведенное здесь ее следствие остаются в силе, если особый интеграл понимать в обобщенном смысле главного значения как предел интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}\,d\zeta$$

по части Γ, оставшейся при удалении наименьшей из дуг Γ с концами в точках $\zeta(\tilde{s}-\varepsilon_1)$ и $\zeta(\tilde{s}+\varepsilon_2)$, где ε_1 и ε_2 стремятся к 0 так, что $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\to 1$.

Из условия леммы 3 следует, что интеграл Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

имеет предельные значения $f(\tilde{z})$ изнутри и 0 — извне Γ, поэтому, согласно приведенному следствию, существует особый интеграл и справедлива формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}\,d\zeta = \frac{1}{2}f(\tilde{z}). \tag{20}$$

Этот особый интеграл можно понимать как в обычном, так и в обобщенном смысле главного значения.

Произведя замену переменной $\zeta=\psi(\tau)$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}\psi'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}f[\psi(\tilde{w})]. \tag{21}$$

Полученный интеграл можно понимать в обычном смысле главного значения. Действительно, взяв на окружности $|\tau|=\rho$ дугу с концами $\tau(\tilde{\sigma}-\varepsilon)$ и $\tau(\tilde{\sigma}+\varepsilon)$, где $\tilde{\sigma}$ — значение дуги σ окружности, соответствующее точке $\tilde{w}$, мы получим при отображении $\zeta=\psi(\tau)$ дугу кривой Γ

с концами $\zeta(\tilde{s}-\varepsilon_1)$ и $\zeta(\tilde{s}+\varepsilon_2)$, причем условие $\varepsilon\to 0$ повлечет за собой соотношения $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\to 1$.

В силу леммы 2, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}\right]f[\psi(\tau)]\,d\tau \tag{22}$$

— абсолютно сходящийся, поэтому существует особый интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\tau-\tilde{w}}\,d\tau$$

в обычном смысле главного значения, и для предельных значений $\varphi_2(w)$ справедлива формула:

$$\varphi_2(\tilde{w})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\tau-\tilde{w}}\,d\tau-\frac{1}{2}f[\psi(\tilde{w})]. \tag{23}$$

Из равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{d\tau}{\tau-\tilde{w}}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{z}}=\frac{1}{2}$$

аналогичным образом имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}\right]d\tau=0. \tag{24}$$

Из (21), (23) и (24) следует:

$$\varphi_2(\tilde{w})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}\right]\{f[\psi(\tau)]-f[\psi(\tilde{w})]\}\,d\tau\,. \tag{25}$$

Положим для краткости

$$f[\psi(\tau)]=p(\tau)$$

и обозначим через $\omega^*(\delta)$ модуль непрерывности $p(\tau)$ как функции от τ на окружности $|\tau|=\rho$; тогда будем иметь:

$$\omega^*(\delta)<A_7\,\omega(\delta).$$

Пусть $\tilde{w}$ и $\tilde{w}_1$ — две различные точки на окружности $|\tau|=\rho$.

Опишем из точки $\tilde{w}$, как из центра, окружность радиуса $2|\tilde{w}_1-\tilde{w}|$; пусть l — дуга окружности $|\tau|=\rho$, получающаяся, если идти от точки $\tilde{w}$ в двух направлениях до точек встречи с окружностью, описанной из точки $\tilde{w}$, а L — дополнительная к l дуга окружности $|\tau|=\rho$. В силу леммы 2, имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}\right][p(\tau)-p(\tilde{w})]\,d\tau\right|<$$

$$<A_8\omega(|\tilde{w}-\tilde{w}_1|)\int\limits_{l}\left|\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau-\psi(\tilde{w})}\right||d\tau|<A_9\,\omega(|\tilde{w}-\tilde{w}_1|). \tag{26}$$

Такая же оценка справедлива для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}_1}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}\right]\cdot[p(\tau)-p(\tilde{w}_1)]\,d\tau.$$

Разность $\varphi_2(\tilde{w})-\varphi_2(\tilde{w}_1)$ представим в виде:

$$\varphi_2(\tilde{w})-\varphi_2(\tilde{w}_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}Q(\tau,\tilde{w})\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{l}Q(\tau,w_1)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}[Q(\tau,\tilde{w})-Q(\tau,\tilde{w}_1)]\,d\tau=I_1+I_2+I_3,$$

где $Q(\tau,\tilde{w})$ — подинтегральное выражение в (25).

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются согласно (26). Для оценки интеграла I_3 представим его в виде суммы двух интегралов:

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}_1}+\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}\right]\cdot[p(\tau)-p(\tilde{w})]\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left[\frac{1}{\tau-w_1}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}\right][p(\tilde{w}_1)-p(\tilde{w})]\,d\tau,$$

которые мы обозначим соответственно через $\tilde{I}_3$ и I_3^0. $\tilde{I}_3$ можно записать в виде:

$$\tilde{I}_3=\frac{\tilde{w}-\tilde{w}_1}{2\pi i}\int_{L}\frac{p(\tau)-p(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}}\left\{\frac{1}{\tau-\tilde{w}_1}-\psi'(\tau)\frac{\dfrac{\psi(\tilde{w})-\psi(\tilde{w}_1)}{\tilde{w}-\tilde{w}_1}}{\dfrac{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}}[p(\tau)-p(\tilde{w}_1)]}\right\}d\tau.$$

Вычитая и прибавляя в фигурных скобках величину $\dfrac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}$, разобьем $\tilde{I}_3$ на два интеграла:

$$\tilde{I}_3=\tilde{I}'_3+\tilde{I}''_3,$$

где

$$\tilde{I}'_3=\frac{\tilde{w}-\tilde{w}_1}{2\pi i}\int_{L}\frac{p(\tau)-p(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}}\left[\frac{1}{\tau-\tilde{w}_1}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}\right]d\tau, \tag{27}$$

$$\tilde{I}''_3=\frac{\tilde{w}-\tilde{w}_1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w}_1)}\cdot\frac{p(\tau)-p(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}}\left[1-\frac{\dfrac{\psi(\tilde{w})-\psi(\tilde{w}_1)}{\tilde{w}-\tilde{w}_1}}{\dfrac{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}}}\right]d\tau. \tag{28}$$

Учитывая использованные при доказательстве леммы 2 неравенство (15) и неравенство

$$|\psi'(\tau)|\leqslant M$$

и полагая

$$q(\tau)=\frac{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}{\tau-\tilde{w}},$$

получим для интеграла $\widetilde{I}_3''$ оценку:

$$|\widetilde{I}_3''| < A_{10} |\widetilde{w} - \widetilde{w}_1| \int_L \left| \frac{p(\tau) - p(\widetilde{w})}{\tau - \widetilde{w}} \right| \cdot \left| \frac{q(\tau) - q(\widetilde{w}_1)}{\tau - \widetilde{w}_1} \right| \cdot |d\tau|. \tag{29}$$

Из тождества

$$q(\tau) - q(\widetilde{w}_1) = \frac{\int\limits_{\widetilde{w}}^{\tau} [\psi'(t) - \psi'(\widetilde{w})]\, dt}{\tau - \widetilde{w}} - \frac{\int\limits_{\widetilde{w}}^{\widetilde{w}_1} [\psi'(t) - \psi'(\widetilde{w})]\, dt}{\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}}$$

легко получается неравенство для $\tau \in L$:

$$|q(\tau) - q(\widetilde{w}_1)| < A_{11} \sigma(|\tau - \widetilde{w}_1|),$$

где $\sigma(h)$ обозначает, как и в § 1, модуль непрерывности функции $\psi'(\tau)$ на окружности $|\tau| = \rho$. В силу условия леммы относительно области D и в силу теоремы 2, будем иметь:

$$\int\limits_{2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|}^{\pi\rho} \frac{\sigma(s)}{s}\, ds < A_{12} < \infty, \tag{30}$$

где A_{12} не зависит от $\widetilde{w}$ и $\widetilde{w}_1$; для $\widetilde{I}_3''$ получается оценка:

$$|\widetilde{I}_3''| < A_{13} |\widetilde{w} - \widetilde{w}_1| \int\limits_{2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|}^{\pi\rho} \frac{\omega(s)}{s} \cdot \frac{\sigma(s)}{s}\, ds. \tag{31}$$

Полагая в последних двух интегралах

$$s = 2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|\, t,$$

находим:

$$\int\limits_{1}^{\frac{\pi\rho}{2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|}} \frac{\sigma(2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|\, t)}{t}\, dt < A_{12}, \tag{32}$$

$$|\widetilde{I}_3''| < A_{14} \int\limits_{1}^{\frac{\pi\rho}{2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|}} \frac{\omega(2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|\, t)}{t} \, \frac{\sigma(2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|\, t)}{t}\, dt.$$

Замечая, что

$$\widetilde{\omega}(2|\widetilde{w} - w_1|\, t) \leqslant (2t + 1)\, \widetilde{\omega}(|\widetilde{w} - w_1|),$$

при помощи (32) получим:

$$|\widetilde{I}_3''| < A_{15}\, \omega(|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|).$$

Для $\widetilde{I}_3'$ получается оценка такого же вида. Это можно установить при помощи неравенства:

$$\left| \frac{1}{\tau - \widetilde{w}_1} - \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\widetilde{w}_1)} \right| < \frac{\sigma(|\tau - \widetilde{w}_1|)}{|\tau - \widetilde{w}_1|},$$

которое получается в ходе доказательства леммы 2. Интеграл I_3^0 оценивается также при помощи леммы 2.

Таким образом, будем иметь неравенство:

$$|I_3| < A_{16}\omega(|\tilde{w} - \tilde{w}_1|),$$

которое вместе с оценками для I_1 и I_2 завершает доказательство леммы 3.

Для дальнейшего нам потребуется также одно известное простое предложение:

ЛЕММА 4. *Если $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < \rho$, непрерывная в $|z| \leqslant \rho$, и ее ряд Тейлора будет $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то ряд Фурье*

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos k\vartheta + d_k \sin k\vartheta)$$

функции $f(\rho e^{i\vartheta}) = \varphi(\vartheta)$ совпадает с рядом Тейлора функции $f(z)$ в точках окружности $|z| = \rho$.

Действительно, ряд Фурье функции $\varphi(\vartheta)$ может быть представлен в виде

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(c_k - d_k i)e^{ki\vartheta}\right] + \frac{1}{2}[(c_k + d_k i)e^{-ki\vartheta}];$$

в силу соотношения

$$\frac{\rho^k}{2}(c_k + d_k i) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho} f(z)z^{k-1}\,dz = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

он представляет собой ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ функции $f(z)$ в точках окружности $|z| = \rho$ с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \frac{1}{2\rho^k}(c_k - d_k i).$$

§ 3

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в $|z| < \rho$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant \rho$, и ее ряд Тейлора будет $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Мы будем рассматривать суммы вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} z^k,$$

образованные с помощью так называемых множителей сходимости $\rho_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$.

В теории рядов Фурье подобные суммы

$$\frac{c_0}{2}\rho_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos k\vartheta + d_k \sin k\vartheta)\rho_k^{(n)},$$

где c_k и d_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\vartheta)$, при выборе

$$\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$$

дают средние арифметические частных сумм Фурье для $\varphi(\vartheta)$. Выбор

$$\rho_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}$$

дает суммы Бернштейна — Рогозинского [см. ([5])], выбор

$$\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}$$

соответствует так называемому интегралу Валле-Пуссена, представляющему собой один из известных аппаратов приближения 2π-периодической функции вещественной переменной.

При каждом из указанных типов множителей сходимости, согласно известным теоремам, получается определенная оценка приближения непрерывной 2π-периодической функции вещественной переменной соответствующими тригонометрическими полиномами. Если применить эти теоремы к функции $\varphi(\vartheta) = f(\rho e^{i\vartheta})$ и принять во внимание лемму 4, то мы сразу получаем аналогичные теоремы о приближении функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho$ суммами вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} z^k.$$

Если $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$, то будем рассматривать в качестве аппарата приближения суммы

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z),$$

составленные для ряда по полиномам Фабера этой функции, соответствующим области D, где коэффициенты a_k определяются формулой (10).

ТЕОРЕМА 3. *Если область D удовлетворяет условию j и $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$ и удовлетворяющая в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то средние арифметические частных сумм ряда по полиномам Фабера дают оценку для всех $z \in \overline{D}$ и $n \geqslant 1$:*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z) \right| < \frac{A_{17}}{n^\alpha}; \tag{33}$$

здесь $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Как уже было отмечено, при условиях для границы области D $\psi'(w)$ непрерывна и не обращается в нуль на окружности $|w| = \rho$.

Функция $\psi(w)$ удовлетворяет, следовательно, условию Липшица с показателем 1 на окружности $|w| = \rho$, а функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем на границе Γ области D.

Функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$, определенные интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\tau-w}d\tau,$$

аналитические, соответственно, в областях $|w|<\rho$ и $|w|>\rho$, имеют граничные значения на окружности $|w|=\rho$, которые удовлетворяют, согласно лемме 3, условию Липшица с показателем α. Для этих граничных значений справедливо соотношение

$$f[\psi(\tilde{w})]=\varphi_1(\tilde{w})-\varphi_2(\tilde{w})\quad(|\tilde{w}|=\rho). \tag{34}$$

Положим $\varphi_1[\Phi(\tilde{z})]=\lambda(\tilde{z})$, $\varphi_2[\Phi(\tilde{z})]=\mu(\tilde{z})$, $\tilde{z}=\psi(\tilde{w})$. Эти функции также удовлетворяют условию Липшица с показателем α на кривой Г. При помощи леммы 4 и оценки С. Н. Бернштейна [см. ([5])] для приближения 2π-периодической функции вещественной переменной, удовлетворяющей условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, суммами Фейера ее ряда Фурье получим для степенного разложения $\varphi_1(w)$:

$$\left|\varphi_1(\tilde{w})-\sum_{k=0}^{n}\rho_k^{(n)}a_k w^k\right|<\frac{A_{18}}{n^\alpha},\quad(|\tilde{w}|=\rho). \tag{35}$$

Это неравенство остается в силе и при $\alpha=1$ *.

Мы воспользуемся дальше известным соотношением для полиномов Фабера [см. ([7])]:

$$\Phi_k(z)=[\Phi(z)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{[\Phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta, \tag{36}$$

где Γ_r — образ окружности $|w|=r>\rho$ при отображении $w=\Phi(\zeta)$ и точка z лежит вне Γ_r. Так как граница Г области D спрямляема, то интеграл может быть взят по Г, и z будет произвольной точкой вне Г.

Для точек z, расположенных вне Г, мы будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(z)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k. \tag{37}$$

Рассмотрим выражение:

$$h_n(z)=-\mu(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k. \tag{38}$$

Легко видеть, что $h_n(z)$ — аналитическая функция в области, внешней к Г, непрерывная в замыкании этой области. Интеграл в (38) преобразуем к виду:

* При $\alpha=1$ функция $\varphi_1(w)$ имеет ограниченную производную в круге $|w|<\rho$ [см. ([6])] и следует воспользоваться теоремой Алексича [см., например, [12])].

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\left\{\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k-\lambda(\zeta)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}[f(\zeta)+\mu(\zeta)].$$

Замечая, что для точки z, лежащей вне Γ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\mu(z), \tag{39}$$

получим для $h_n(z)$ выражение:

$$h_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\left\{\lambda(\zeta)-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k\right\}. \tag{40}$$

Для предельных значений $h_n(\tilde{z})$ будем иметь:

$$h_n(\tilde{z})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{z}}\left\{\lambda(\zeta)-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\zeta)]^k\right\}-\frac{1}{2}\left\{\lambda(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\tilde{z})]^k\right\}, \tag{41}$$

где особый интеграл можно рассматривать в обобщенном смысле главного значения так, чтобы после замены переменной $\zeta=\psi(\tau)$ получился особый интеграл по окружности $|\tau|=\rho$ в обычном смысле главного значения

Учитывая также соотношение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{\varphi_1(\tau)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\tau^k\rho_k^{(n)}}{\tau-\tilde{w}}d\tau=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(\tilde{w})-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\tilde{w}^k\right],$$

где интеграл рассматривается в обычном смысле главного значения, получим:

$$h_n(\tilde{z})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]\left[\varphi_1(\tau)-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\tau^k\right]d\tau. \tag{42}$$

Согласно лемме 2, последний интеграл абсолютно сходится; далее, при помощи (35) найдем:

$$|h_n(\tilde{z})|<\frac{A_{19}}{n^\alpha}.$$

Это неравенство вместе с (34), (35) и (37) окончательно дает:

$$\left|f(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(\tilde{z})\right|\leqslant\left|\lambda(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_k^{(n)}[\Phi(\tilde{z})]^k\right|+|h_n(\tilde{z})|<\frac{A_{20}}{n^\alpha}.$$

Оценка, полученная для $z \in \Gamma$, справедлива для всех точек $z \in D$ и для $n \geqslant 1$ *.

ТЕОРЕМА 4. *Если область D удовлетворяет условию j и $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$, то справедливо неравенство*

$$\rho_n(f, \overline{D}) < A_{21}\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{43}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$, а A_{21} — константа, не зависящая от n и $f(z)$, но зависящая от области D.

Согласно лемме 3, для функции $\varphi_1(w)$, определенной в круге $|\omega| < \rho$ интегралом (17), справедливо неравенство $\omega_1(\delta) < A_5\,\omega(\delta)$.

Очевидно, для модуля непрерывности $\tilde{\omega}(\delta)$ периодической функции вещественной переменной ϑ,

$$q(\vartheta) = \varphi_1(\rho e^{i\vartheta}) = \varphi_1(\tilde{w}),$$

будем иметь:

$$\tilde{\omega}(\delta) < A_{22}\,\omega_1(\delta) < A_{23}\,\omega(\delta).$$

Как известно [см. (5)], существует тригонометрический полином $U_n(\vartheta)$ порядка $2n-2$, для которого $|q(\vartheta) - U_n(\vartheta)| < 6\,\tilde{\omega}\left(\frac{1}{n}\right)$. Этот полином $U_n(\vartheta)$ можно получить в виде частной суммы ряда Фурье функции $q(\vartheta)$ с коэффициентами суммирования Джексона $\rho_k^{(n)}$. При помощи леммы 4 отсюда получим:

$$\left|\varphi_1(\tilde{w}) - \sum_{k=0}^{2n-2} a_k\rho_k^{(n)}\tilde{w}^k\right| < 6\,\tilde{\omega}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{44}$$

Заметим, что функция $h_n(z)$ в доказательстве теоремы 3 будет и при настоящих предположениях, в силу леммы 3, непрерывной в замкнутой внешности Γ. Также будет выполняться и соотношение (41) для предельных значений $h_n(z)$.

Действительно, для предельных значений $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ будем попрежнему иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}\,d\zeta - \frac{1}{2}\lambda(\tilde{z}),$$

хотя теперь $\lambda(\zeta)$ и не обязательно удовлетворяет на Γ условию Липшица. Это следует из (39) при использовании приведенного в доказательстве леммы 3 следствия из основной леммы И. И. Привалова.

Таким образом, мы снова приходим к формуле (42).

Используя неравенство (44) вместо (35), получим:

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{2n-2} a_k\rho_k^{(n)}\Phi_k(z)\right| < A_{24}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда уже легко получается (43).

---

* Для случая, когда Γ — аналитическая кривая, этот результат был известен ранее [см. (1)].

При помощи известного приема рассуждений в случае, когда $f(z)$ — аналитическая функция в D, имеющая в $\overline{D}$ непрерывную производную p-го порядка, получаем:

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{A_{25}}{n^p} \omega_p\left(\frac{1}{n}\right), \tag{45}$$

где $\omega_p(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(p)}(z)$ в $\overline{D}$.

В частности, если $f^{(p)}(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{A_{26}}{n^{p+\alpha}}. \tag{46}$$

Заметим, что в этом вопросе была известна менее точная оценка:

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{C(\varepsilon)}{n^{\alpha-\varepsilon}},$$

вытекающая из одной работы А. И. Маркушевича ([10]), в случае области D с границей, для которой угол наклона $\vartheta(s)$ касательной к вещественной оси удовлетворяет условию Липшица с каким-нибудь показателем $\mu > 0$, и функции $f(z)$, аналитической в D и удовлетворяющей в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем α. Здесь $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число и константа $C(\varepsilon)$ не зависит от n.

С. Н. Мергеляном ([2]) для функции $f(z)$ с теми же свойствами была установлена граница наилучшего приближения:

$$\rho_n(f, \overline{D}) < C\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\alpha}.$$

Эта граница, более высокая по сравнению с той, что получается из (46) при $p = 0$, выведена при условии для области D:

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h}\, dh < \infty,$$

несколько более широком по сравнению с (13) (условие j).

Рассуждения, подобные изложенным, позволяют при помощи соответствующих результатов теории приближения тригонометрическими суммами [см. ([5])] установить следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Если область D удовлетворяет условию j, а $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$, то для сумм, аналогичных суммам Бернштейна — Рогозинского в теории рядов Фурье, с множителем*

$$\rho_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n, \quad n = 1, 2, \ldots)$$

справедлива оценка:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z) \right| < A_{27}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{47}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$ и $z \in \overline{D}$.

ТЕОРЕМА 6. *Если область D удовлетворяет условию j, то при тех же условиях для $f(z)$ и при множителях*

$$\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}$$

справедлива оценка для $z \in \overline{D}$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z) \right| < A_{28}\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{48}$$

Рассмотрим вопрос о приближении $f(z)$ частными суммами ряда по полиномам Фабера. Здесь для изучаемого класса областей можно получить более низкую границу приближения по сравнению с ранее установленной границей [см. ([8])] для всего класса областей с гладкими контурами.

ТЕОРЕМА 7. *Если область D удовлетворяет условию j и $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$, то для всех $z \in \overline{D}$ и $n > 1$ справедливо неравенство:*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < A_{29}\, \rho_n(f, \overline{D}) \lg n, \tag{49}$$

где $A_{29} > 0$ не зависит от n.

Для доказательства заметим, что в силу леммы 1 справедливо неравенство (12). Из формулы (36) имеем для z вне Γ:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\zeta)]^k \tag{50}$$

Интеграл в этой формуле является непрерывной функцией от z в замкнутой внешности Γ. Предельные значения этой функции на Γ равны:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \tilde{z}} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\zeta)]^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\tilde{z})]^k,$$

где интеграл взят в смысле главного значения. При помощи соображений, использованных в доказательстве теоремы 3, последнее выражение можно представить в виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau| = \rho} \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(\tilde{w})} - \frac{1}{\tau - \tilde{w}} \right] \sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k d\tau, \tag{51}$$

где $\tilde{w} = \Phi(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \Gamma$. Переходя в (50) к пределу при стремлении z извне Γ к $\tilde{z}$ на Γ, получим, в силу (51), (12) и леммы 2, для всех $\tilde{z} \in \Gamma$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(\tilde{z}) \right| < A_{30} \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| \lg n. \tag{52}$$

Положим $S_n[f] = S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$ и обозначим через $T_n(z)$ полином наилучшего приближения $f(z)$ в $\overline{D}$ n-й степени.

Очевидно, $S_n[T_n] = T_n(z)$ и $|f(z) - T_n(z)| \leqslant \rho_n(f, \overline{D})$; замечая, что

$$|S_n[f - T_n]| = |S_n[f] - T_n(z)| < A_{30}\, \rho_n(f, \overline{D}) \lg n,$$

получим из последних двух неравенств искомую оценку (49), аналогичную известной теореме Лебега в действительной области [см. ([5])].

Следствие 1. *При условии теоремы* 7 *для функции и области справедливо неравенство для всех* $z \in \overline{D}$ *и* $n > 1$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < A_{31}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \lg n, \tag{53}$$

где $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f(z)$ *в* $\overline{D}$.

Действительно, эта оценка получается из (49) при помощи неравенства (43).

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы* 7 *и соотношение* $\lim\limits_{s \to 0} \omega(\delta) \lg \delta = 0$, *то* $f(z)$ *разлагается в ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z),$$

равномерно сходящийся в замкнутой области $\overline{D}$.

Рассмотрим треугольную матрицу вещественных чисел

$$\begin{array}{l} \rho_0^{(0)} \\ \rho_0^{(1)}, \rho_1^{(1)} \\ \rho_0^{(2)}, \rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rho_0^{(n)}, \rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}, \ldots, \rho_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{54}$$

и будем называть ее матрицей типа (A), если выполнены такие два условия:

$$\lim_{n \to \infty} \rho_k^{(n)} = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \rho_0^n + 2 \sum_{k=1}^{n} \rho_k^n \cos kt \right| dt < Q,$$

где Q — константа, не зависящая от n. Имеет место

ТЕОРЕМА 8. *Пусть область* $\overline{D}$ *удовлетворяет условию* j *и* $f(z)$ — *аналитическая функция в* D, *непрерывная в* $\overline{D}$; *тогда если матрица* (54) *будет типа* (A), *то полиномы*

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \rho_k^{(n)} \Phi_k(z)$$

равномерно сходятся к $f(z)$ *в* $\overline{D}$.

Для доказательства заметим, что в силу леммы 3 функция $\varphi_1(w)$, определенная интегралом типа Коши (17), непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant \rho$. Используя известную теорему о равномерной сходимости [см. ([5])] к произвольной непрерывной функции с периодом 2π тригонометрических полиномов, образованных суммированием ряда Фурье этой функции при помощи множителей матрицы типа (А), и применяя лемму 4, получим неравенство:

$$\left|\varphi_1(\tilde{w}) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \tilde{w}^k\right| < \varepsilon \tag{55}$$

для всех $n > N(\varepsilon)$ и $|\tilde{w}| = \rho$.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3 и учитывая соображения доказательства теоремы 4, связанные с тем, что функция $f(z)$, непрерывная в $\overline{D}$, не обязательно удовлетворяет условию Липшица, мы снова приходим к формуле (42), которая при помощи (55) дает оценку $|h_n(\tilde{z})| < A_{32}\varepsilon$, где A_{32} не зависит от ε и h. Это неравенство вместе с (34), (37) и (55) завершает доказательство теоремы 8.

Известно [см. ([5])], что множители $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$ образуют матрицу типа (А); это относится также к множителям $\rho_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}$ и $\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}$. Применяя теорему (8) к первому из указанных типов множителей, получаем, в частности, такой результат:

Следствие. *Если область D удовлетворяет условию j и $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$, то средние арифметические частных сумм $\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$ ряда по полиномам Фабера равномерно сходятся к $f(z)$ в замкнутой области $\overline{D}$.*

Заметим, что метод, примененный в доказательстве теоремы 3 и следующих теорем, позволяет получить новое, более элементарное доказательство следующей теоремы С. Н. Мергеляна ([2]):

Если область D имеет гладкую границу с непрерывно вращающейся касательной и $f(z)$ — аналитическая функция в D, непрерывная в $\overline{D}$ и удовлетворяющая в $\overline{D}$ условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$\rho_n(f, \overline{D}) < \frac{A_{33}(\varepsilon)}{n^{\alpha-\varepsilon}} \tag{56}$$

при любом $\varepsilon > 0$, где A_{33} не зависит от n.

Мы опять будем следовать рассуждениям доказательства теоремы 3, производя необходимые изменения.

В случае области с гладкой границей отображающая функция $w = \Phi(z)$ удовлетворяет на Γ условию Липшица с показателем $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, и константой, зависящей от ε [см. ([2])]. Такое же утверждение справедливо для обратной функции $z = \psi(w)$ на окружности $|w| = \rho$.

Функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$, определяемые интегралом (17), удовлетворяют на $|w|=\rho$ условию Липшица с показателем $\alpha-\varepsilon$. Это следует из известной теоремы И. И. Привалова (9) о предельных значениях интеграла типа Коши.

Функции $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ также удовлетворяют условию Липшица с показателем $\alpha-\varepsilon$ на Γ. Используя суммирование при помощи средних арифметических, т. е. полагая $\rho_k^{(n)}=1-\frac{k}{n}$, будем иметь вместо неравенства (35) неравенство

$$\left|\varphi_1(w)-\sum_{k=0}^{n} a_k\rho_k^{(n)}w^k\right|<\frac{A_{34}}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \tag{57}$$

где $|w|=\rho$ и A_{34} не зависит от n.

Функция $h_n(z)$ остается попрежнему непрерывной в замкнутой внешности Γ и выражается интегралом по формуле (40).

Если дана какая-нибудь непрерывная 2π-периодическая функция вещественной переменной, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $\beta>0$, то средние арифметические частных сумм Фурье этой функции удовлетворяют условию Липшица с тем же показателем β и константой, не зависящей от n. Это обстоятельство легко усмотреть из интегрального представления сумм Фейера [см. (5)]. Применяя лемму 4 и переходя на плоскость z, заключаем, что разность в фигурных скобках формулы (40) удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha-\varepsilon$ и коэффициентом, не зависящим от n. Поэтому, используя снова теорему И. И. Привалова, получим, что $h_n(z)$ удовлетворяет на Γ условию Липшица с показателем $\alpha-\varepsilon$; это же заключение верно и в замкнутой внешности Γ *.

Мы будем иметь тогда:

$$|h_n(z)-h_n(z')|<A_{35}|z-z'|^{\alpha-\varepsilon}<A_{36}|w-w'|^{\alpha-\varepsilon}$$

для $z\in\Gamma$ и $z'\in\Gamma_R$, где Γ_R — образ окружности $|w|=R$ при отображении $w=\Phi(z)$, A_{35} и A_{36} не зависят от n, z, z' и R.

Выбирая при фиксированном $z\in\Gamma$ точку $z'\in\Gamma_R$ так, чтобы $\arg w=$ $=\arg w'$, где $w'=\Phi(z')$, и полагая $R=\rho\left(1+\frac{1}{n}\right)$, получим:

$$|h_n(z)-h_n(z')|<A_{37}\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}. \tag{58}$$

Используя легко получаемую оценку [см. (11)]

$$\int_{\Gamma}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z'|}<A_{38}\lg\frac{1}{R-\rho},$$

справедливую для гладкой кривой Γ и произвольной точки $z'\in\Gamma_R$, где A_{38} не зависит от R, мы из (40) и (57) получим при $R=\rho\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

$$|h_n|(z')|<\frac{A_{39}}{n^{\alpha-\varepsilon}},\quad z'\in\Gamma_R.$$

* См., например, (1).

Эта оценка вместе с (58) дает для $z \in \Gamma$:

$$|h_n(z)| < \frac{A_{40}}{n^{\alpha-\varepsilon}}.$$

Последнее неравенство при помощи (57) дает, подобно тому как это сделано в конце доказательства теоремы 3, оценку:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z) \right| < \frac{A_{41}}{n^{\alpha-\varepsilon}}.$$

Это неравенство доказывает теорему, причем здесь установлено не только существование полинома, дающего нужный порядок приближения функции, но установлен вид приближающих полиномов. Эти полиномы получаются как средние арифметические частных сумм ряда по полиномам Фабера для $f(z)$.

Поступило
7. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sewell W. E., Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princ. Univ. Press, London, 1942.
[2] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. 37, М., 1951.
[3] Привалов И. И., Интеграл Коши, Саратов, 1919.
[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
[5] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
[6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
[7] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
[8] Альпер С. Я. и Иванов В. В., О приближении функций частными суммами ряда по полиномам Фабера, Доклады Ак. наук СССР, 90, № 3 (1953), 325—328.
[9] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
[10] Маркушевич А. И., Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables, Матем. сб., 1(43):6 (1936), 863—886.
[11] Мергелян С. Н., Равномерные приближения функций комплексного переменного, Успехи матем. наук, т. VII, в. 2(48) (1952), 31—122.
[12] Стечкин С. Б., Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 461—472.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 445—470

А. И. СКОПИН

p-РАСШИРЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩЕГО КОРНИ СТЕПЕНИ p^M ИЗ ЕДИНИЦЫ

(Представлено академиком **И. М. Виноградовым)**

В работе изучаются расширения локального поля с $p \neq 2$, имеющие в качестве группы Галуа p-группу. В случае, когда основное поле содержит первообразный корень степени p^m из единицы, определяется группа Галуа максимального расширения, получающегося m элементарными абелевыми шагами.

§ 1. Введение

В работе изучаются p-расширения (т. е. расширения, относительная группа которых имеет порядком степень $p \neq 2$) локального поля k_0, содержащего корень p-й степени из единицы. Случай расширений локального поля, не содержащего корня p-й степени из единицы, разобран И. Р. Шафаревичем в работе ([1]). Рассмотрим некоторые основные положения, общие для обоих случаев.

Будем употреблять следующие обозначения: если k — поле, то k^* — его мультипликативная группа; если G — группа, то G^p — подгруппа G, порожденная p-ми степенями всех элементов G; если H — подгруппа G, то $[G, H]$ — подгруппа G, порожденная всеми коммутаторами вида

$$(g, h) = ghg^{-1}h^{-1},$$

где $g \in G$, $h \in H$; если G — группа, то $G^{(m+1)} = (G^{(m)})^p [G^{(m)}, G^{(m)}]$, $m = 0, 1, \ldots$, и $G^{(0)} = G$; если $G^{(m)} = 1$, но $G^{(m-1)} \neq 1$, то G будет называться m-ступенной группой. Расширение K локального поля k называется m-ступенным, если группа K над k является m-ступенной группой.

Построим последовательность расширений k_0:

$$k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_m \subset \ldots \qquad (*)$$

следующим образом: для $m = 1, 2, \ldots$ поле k_m является композитом всех циклических расширений p-й степени поля k_{m-1}. Обозначим группу k_m над k_0 через G_m. Нетрудно убедиться в справедливости следующих трех утверждений:

1. *Группа G_m имеет конечное число образующих.* Подсчитаем это число. Пусть n_0 — абсолютная степень k_0. Обозначим через p^ν индекс $k_0^* : (k_0^*)^p$. Из локальной теории полей классов известно, что $\nu = n_0 + 1$, если в k_0 нет корня p-й степени из единицы, и $\nu = n_0 + 2$, если такой корень в k_0 содержится, и что группа k_1 над k_0 изоморфна фактор-группе $k_0^* / (k_0^*)^p$, т. е. является элементарной абелевой группой с ν образующими

[см. (7)]. Поле k_1 является, по своему определению, максимальным элементарным абелевым подполем k_m над k_0, т. е. принадлежит группе Фраттини $G_m^{(1)}$ группы G_m. Следовательно, число образующих группы G_m равно числу образующих G_1, т. е. равно ν.

2. *Поле k_m является m-ступенным расширением k_0.* Допустим, что для $m-1$ утверждение справедливо. Тогда, если рассматривать последовательность (*), начиная с k_1, то

$$k_m = (k_1)_{m-1}.$$

А так как подполе k_1 принадлежит в k_m подгруппе $G_m^{(1)}$, то группой k_m над k_1 является $G_m^{(1)}$, которая, по индукционному предположению, $(m-1)$-ступенна. Значит,

$$(G_m^{(1)})^{(m-1)} = G_m^{(m)} = 1.$$

3. *Поле k_m является максимальным m-ступенным расширением k_0.* Допустим, что доказываемое утверждение справедливо для $m-1$ и K имеет над k_0 группу G, для которой справедливо равенство

$$G^{(m)} = 1.$$

Тогда подполе k поля K, принадлежащее подгруппе $G^{(m-1)}$, $(m-1)$-ступенно, так как его группа $G/G^{(m-1)}$ $(m-1)$-ступенна. По предположению, $k \subset k_{m-1}$. Но над k поле K одноступенно, так как

$$(G^{(m-1)})^{(1)} = 1,$$

т. е. является композитом циклических расширений p-й степени. Отсюда непосредственно следует, что $K \subset k_m$.

Возьмем свободную группу S с ν образующими и составим для нее убывающий ряд нормальных делителей:

$$S^{(0)} \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \ldots \supset S^{(m)} \supset \ldots .$$

На основании вышеизложенного, группа G_m поля k_m может быть представлена в виде фактор-группы

$$G_m = S/H,$$

причем $H \supset S^{(m)}$, ибо $G_m^{(m)} = 1$.

Если k_0 не содержит корня p-й степени из единицы, то, как доказал И. Р. Шафаревич, $H = S^{(m)}$, что проверяется подсчетом индексов $(S:H)$ и $(S:S^{(m)})$. В случае, когда k_0 содержит корень p-й степени из единицы, подсчет индексов показывает, что

$$(S:H) < (S:S^{(m)}).$$

Это вызывает необходимость искать в G_m соотношения, отличные от тривиальных $S^{(m)} = 1$.

В настоящей работе разобран случай, когда k_0 содержит первообразный корень из единицы степени p^M. В этом предположении находятся группы G_m при $m \leqslant M$, причем вместо свободной группы берется фундаментальная группа, рассматриваемая в топологии поверхностей. Если фундаментальную группу с ν образующими обозначить через F, то

окончательный результат (см. теорему 13) записывается в виде равенства:

$$G_m = F / F^{(m)}.$$

Вопрос о реализации любой p-группы в виде группы некоторого расширения поля k_0 решается после нахождения группы G_m, как и прежде, тривиально. Действительно, для всякой p-группы G имеется номер m, для которого $G^{(m)} = 1$. Если G есть группа K над k_0, то K есть m-ступенное расширение k_0, т. е. $K \subset k_m$. Таким образом, если $m < M$, то G тогда и только тогда является группой расширения поля k_0, когда G имеет ν образующих и представима в виде фактор-группы группы F.

Для нахождения G_m оказалось удобным предварительно сделать второй центральный шаг (§ 6), т. е. от k_1 перейти не к k_2, а к композиту $\bar{k}_2$ только центральных расширений p-й степени над k_1. Группа $\bar{k}_2$ находится и для случая $M = 1$.

В § 2, 4, 5 доказываются общие групповые теоремы, используемые в дальнейшем. В § 3 приводятся теоремы, которые во всей общности не необходимы для данной работы, но в которых предлагается способ удобного, в некоторых случаях, рассмотрения элементов p-групп.

Приношу глубокую благодарность Д. К. Фаддееву, под руководством которого написана настоящая работа.

§ 2. Связь свободной группы с фактор-системами

Пусть имеется конечная p-группа G_1, минимальное число образующих которой равно ν. Представим ее как фактор-группу свободной группы S с ν образующими:

$$G_1 = S / H_1.$$

Введем в рассмотрение нормальный делитель H_2 группы S, определенный равенством

$$H_2 = H_1^p [H_1, S].$$

Группа $G_2 = S / H_2$ является расширением своего центрального нормального делителя $A = H_1 / H_2$ посредством фактор-группы G_1 и некоторой фактор-системы a_{σ_1, σ_2} (σ_1, σ_2 — элементы G_1). Группа A является элементарной абелевой.

Рассмотрим группу характеров X группы A, и пусть χ — произвольный характер из X с ядром A_χ. Группа $Z_\chi = A / A_\chi$ есть циклическая группа порядка p. Составим группу $G_\chi = G_2 / A_\chi$. Она является центральным расширением своего нормального делителя Z_χ при фактор-группе G_1 и некоторой фактор-системе $z^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$.

Будем обозначать через E группу корней p-й степени из единицы. По определению характера, если $\chi \neq 1$, то существует изоморфизм $\theta(\chi)$ группы E на группу Z_χ такой, что для любого $aA_\chi \in Z_\chi$ ($a \in A$) имеет место равенство:

$$aA_\chi = (\chi(a))^{\theta(\chi)}.$$

Элементы группы G_2 имеют вид $\tilde{\sigma}a$, где $a \in A$, $\tilde{\sigma}$ — набор представителей из классов смежности по A. Закон умножения определяется равенством

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 = \widetilde{\sigma_1\sigma_2}\, a_{\sigma_1, \sigma_2}.$$

В группе G_χ элементы имеют вид:

$$\tilde{\sigma}aA_\chi = \tilde{\sigma}(\chi(a))^{\theta(\chi)}$$

и перемножаются по закону:

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 = \widetilde{\sigma_1\sigma_2}(\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2}))^{\theta(\chi)},$$

т. е.

$$z^\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = (\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2}))^{\theta(\chi)}.$$

Обозначая

$$\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2}) = \varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2} \in E,$$

мы, таким образом, устанавливаем соответствие

$$\chi \to \varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}, \tag{1}$$

относящее каждому характеру χ некоторую фактор-систему $\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$ группы G_1 в E. Эта фактор-система определена с точностью до ассоциированных в E, т. е. характеру соответствует целый класс ассоциированных фактор-систем. Группу классов ассоциированных в E фактор-систем будем обозначать через B.

ТЕОРЕМА 1. *Группа X изоморфна B.*

1. Докажем, что соответствие (1) устанавливает гомоморфизм X в B.

Пусть $\chi = \chi_1\chi_2$; тогда, как было показано,

$$\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = \chi(a_{\sigma_1, \sigma_2}) = \chi_1(a_{\sigma_1, \sigma_2}) \cdot \chi_2(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon^{\chi_1}_{\sigma_1, \sigma_2}\varepsilon^{\chi_2}_{\sigma_1, \sigma_2}.$$

2. Ядро гомоморфизма состоит из $\chi = 1$.

Пусть $\chi \neq 1$, и допустим, что $\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$ ассоциирована с единичной фактор-системой. Но тогда и $z^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$ ассоциирована с единичной, и так как $z_\chi \neq 1$, то G_χ является прямым расширением и имеет по крайней мере $\nu + 1$ образующих, что противоречит определению $G_\chi = G_2 / A_\chi$. Таким образом, соответствие (1) является изоморфизмом X в B.

3. Докажем, что соответствие (1) есть изоморфизм X на B, т. е. в каждом классе найдется $\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$. Единичный класс соответствует единичному характеру. Пусть $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ принадлежит произвольному неединичному классу. Построим расширение E посредством фактор-группы G_1 при фактор-системе $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$. Обозначим его через G_ε и покажем, что минимальное число образующих G_ε равно ν. Пусть $\sigma_1, \ldots \sigma_\nu$ — система образующих в G_1 и $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_\nu$ — произвольные представители соответствующих элементов в G_ε. Рассмотрим множество соотношений $w(\sigma_i) = 1$ в G_ε и составим соответствующие им слова $w(\tilde{\sigma}_i)$ в G_ε. Очевидно, что

$$w(\tilde{\sigma}_i) = \varepsilon^\mu,$$

где ε — примитивный корень из E. Утверждается, что найдется слово w_0, для которого μ не делится на p. Действительно, в противном случае G_ε содержало бы подгруппу, порожденную $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_\nu$, которая должна быть изоморфной G_1 (других соотношений быть не может), и G_ε было бы изоморфно прямому произведению G_1 на E, т. е. $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ ассоциирована с единичной.

Таким образом, $G_\varepsilon \cong S / H_\varepsilon$, где H_ε — нормальный делитель S, порожденный левыми частями соотношений $w(\tilde{\sigma}_i) = 1$ в G_ε. Ввиду того что в качестве образующих $\tilde{\sigma}_i$ группы G_ε берутся представители образующих σ_i группы G_1, имеет место включение $H_1 \supset H_\varepsilon$. Так как E лежит в центре G_ε и так как $E^p = 1$, то $H_\varepsilon \supset H_2$ и $(H_1 : H_\varepsilon) = (E : 1) = p$. Таким образом, существует характер χ с ядром $H_\varepsilon / H_2 = A_\chi$ и, следовательно,

$$G_\varepsilon \cong G_2 / A_\chi,$$

т. е.

$$\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \doteq \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}.$$

Теорема доказана.

Пусть N — подгруппа A, $\bar{G}_2 = G_2 / N$ и $\bar{A} = A / N$. Будем называть расширение G_χ вложимым в $\bar{G}_2$, если имеется такая подгруппа $\bar{B}$ группы $\bar{A}$, что $\bar{G}_2 / \bar{B}$ является расширением группы порядка p посредством G_1, эквивалентным расширению G_χ. Посмотрим, какие характеры χ дают расширения G_χ, вложимые в $\bar{G}_2$. Обозначим через X_N подгруппу группы X, состоящую из всех характеров, равных единице на N.

ТЕОРЕМА 2. *G_χ тогда и только тогда вложимо в $\bar{G}_2$, когда $\chi \in X_N$.*

$\bar{G}_2$ является центральным расширением $\bar{A}$ при фактор-группе G_1 и факторах

$$\bar{a}_{\sigma_1, \sigma_2} = a_{\sigma_1, \sigma_2} N.$$

Группой характеров $\bar{A}$ можно считать X_N, полагая значение характера на классе смежности A / N равным значению характера на любом элементе этого класса смежности. Если $\bar{B}$ — любая подгруппа индекса p группы $\bar{A}$, то факторами расширения $\bar{G}_2 / \bar{B}$ являются (с точностью до изоморфизма) $\chi(\bar{a}_{\sigma_1, \sigma_2})$, где χ — характер $\bar{A}$ с ядром $\bar{B}$. Факторами же расширения G_χ являются $\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2})$. Совпадение $\chi(\bar{a}_{\sigma_1, \sigma_2})$ и $\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2})$ равносильно эквивалентности расширений.

§ 3. Центрально-свободные группы

Образуем следующий центральный ряд свободной группы с ν образующими:

$$S \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_i \supset \ldots,$$

где

$$S_1 = S^p [S, S], \quad S_{i+1} = S_i^p [S_i, S].$$

Фактор-группу $S/S_i = \mathfrak{G}_i$ будем называть i-й центрально-свободной группой. В этом параграфе приводится канонический вид элементов из $\mathfrak{G}_i$.

Центром $\mathfrak{G}_i$ является $\mathfrak{A}_i = S_{i-1}/S_i$ — элементарная абелева группа.

Представим группу S изоморфно в кольце формальных степенных рядов от ν независимых переменных $x_1, \ldots, x_\nu$, положив для образующих $a_1, \ldots, a_\nu$, соответственно:

$$a_s = 1 + x_s, \quad a_s^{-1} = 1 - x_s + x_s^2 - \cdots, \; s = 1, \ldots, \nu.$$

Каждый элемент из S представлен теперь рядом, в котором при изучении $\mathfrak{G}_i$ особый интерес представляют члены степеней $r \leqslant i$. Имеют место следующие два факта:

1) каждый элемент из S_{i-1} с точностью до слагаемых из S_i сравним с одним и только одним рядом вида:

$$1 + \sum_{r+1}^{i} p^{i-r} L_r(x) + \cdots, \tag{2}$$

где $L_r(x)$ — однородный полином Ли степени r;

2) при перемножении элементов из S_{i-1} полиномы $L_r(x)$ складываются по модулю p [см. (2)]. Это позволяет выбрать канонический базис в $\mathfrak{A}_i$.

Фиксируем некоторый базис в кольце полиномов Ли степеней $r \leqslant i$. Пусть это будут одночлены $l_{r,s}(x)$, $1 \leqslant r \leqslant i$, $1 \leqslant s \leqslant M^r$ [см. (3)].

ТЕОРЕМА 3. *Образующие $\mathfrak{A}_i$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с $l_{r,s}(x)$.*

Дадим один из способов такого взаимно однозначного соответствия: составим для $l_{r,s}(x)$ элемент $l_{r,s}(a) \in S$, заменив переменные x образующими a и операцию Ли

$$x \circ y = xy - yx$$

— операцией коммутирования в S

$$a \circ b = aba^{-1}b^{-1}.$$

Тогда

$$l_{r,s}(a) = 1 + l_{r,s}(x) + \cdots,$$

что легко доказывается индукцией по r, если учесть формулу:

$$a \circ b = aba^{-1}b^{-1} = (1+x)(1+y)(1+x)^{-1}(1+y)^{-1} = 1 + x \circ y \cdots$$

Элементы $\mathfrak{G}_{i-1}$, которые при естественном гомоморфизме S на $\mathfrak{G}_{i-1}$ соответствуют элементам

$$l_{r,s}^{p^{i-r}} = 1 + p^{i-r} l_{r,s}(x) + \cdots,$$

обозначим соответственно через $l_{i,r,s}$. В силу 1) и 2), эти элементы составляют базис $\mathfrak{A}_{i+1}$. Теорема доказана.

Так как в дальнейшем будет рассматриваться только группа $\mathfrak{G}_i$, то будем считать $a_1, \ldots, a_\nu$ ее образующими.

Замечание. Рассмотрим несколько подробнее введенные базисные элементы $l_{i,r,s}$. Из взаимной однозначности соответствия элементов $\mathfrak{A}_i$ рядам (2) следует, что в качестве $l_{i,r,s}$ можно, в случае надобности, брать результат $i-1$ раз произведенных над образующими $a_1, \ldots, a_\nu$ двух действий: коммутаций и возведений в p-ю степень, из которых коммутаций $r-1$, а возведений в p-ю степень $i-r$. При этом действия можно производить, чередуя их в произвольном порядке. В качестве примера приведем базис, который будет использован в дальнейшем (§ 5). Образующие $\mathfrak{A}_i$ разбиваются на два типа:

1) при $r=1$

$$l_{i,1,s} = a_s^{p^{i-1}};$$

2) при $r>1$ последней операцией в $l_{i,r,s}$ берется обязательно коммутация образующей a на элемент g, в котором произведено $i-2$ операции.

Если $i \geqslant 3$, то условие того, что элемент $\mathfrak{A}_i$ выражается только через образующие второго типа ($l_{i,r,s} = a \circ g$), равносильно тому, что этот элемент принадлежит образу $[S, S_1]$ при отображении S на $\mathfrak{G}_i$. Действительно, названные элементы g принадлежат образу $S_{i-2} \subset S_1$, т. е. все $a \circ g$ и их произведения принадлежат образу $[S, S_1]$. Обратно, любое произведение из $\mathfrak{A}_i$, не равное единице, составленное из одних образующих первого типа $a_s^{p^{i-1}}$, не принадлежит образу $[S, S_1]$.

Например, при $i=1$ базис $\mathfrak{A}_1$ составляют образующие $l_{1,1,s} = a_s$; при $i=2$ в базис войдут

$$l_{2,1,1} = a_1^p, \quad l_{2,2,1} = a_1 \circ a_2;$$

при $i=3$

$$l_{3,1,1} = a_1^{p^2}, \quad l_{3,2,1} = (a_1 \circ a_2)^p, \quad l_{3,3,1} = (a_1 \circ a_2) \circ a_3,$$

причем, ввиду сделанного замечания,

$$(a_1 \circ a_2)^p = a_1^p \circ a_2 = a_1 \circ a_2^p.$$

Таким образом, каждый элемент из $\mathfrak{A}_i$ однозначно представим в виде

$$\prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda_{i,r,s}}, \tag{3}$$

где $0 \leqslant \lambda_{i,r,s} \leqslant p-1$.

Введем элементы $l_{t,r,s} \in \mathfrak{G}_i$ при $t<i$. Пусть образующие $\mathfrak{G}_t$ суть $a_1^{(t)}, \ldots, a_\nu^{(t)}$ и $l_{t,r,s}^{(t)}$ — базис $\mathfrak{A}_t$, данный в теореме 3. Если

$$l_{t,r,s}^{(t)} = \varphi(a^{(t)})$$

есть некоторое фиксированное выражение $l_{t,r,s}^{(t)}$ через образующие $a^{(t)}$, то определяем $l_{t,r,s} = \varphi(a)$ через образующие a группы $\mathfrak{G}_i$. В частности, $l_{1,1,s} = a_s$. Назовем $l_{t,r,s}$ квазиобразующими $\mathfrak{G}_i$.

Замечание. По мере надобности будем различать квазиобразующие первого типа

$$l_{t,1,s} = a_s^{p^{t-1}}$$

и квазиобразующие второго типа

$$l_{t,r,s} = a \circ g \text{ при } r > 1,$$

происшедшие из соответствующих образующих $\mathfrak{A}_t$. Попрежнему при $t \geqslant 3$ квазиобразующие второго типа принадлежат образу $[S, S_1]$.

ТЕОРЕМА 4. *Элементы из $\mathfrak{G}_i$ однозначно представимы в виде:*

$$\prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \dots \prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda_{i,r,s}}, \quad 0 \leqslant \lambda_{t,r,s} \leqslant p-1. \tag{4}$$

Доказательство. Будем рассматривать $\mathfrak{G}_i$ как расширение $\mathfrak{A}_i$ посредством фактор-группы $\mathfrak{G}_{i-1}$. Тогда элементы $\mathfrak{G}_i$ однозначно представимы в виде $\tilde{\sigma} a$, где $a \in \mathfrak{A}_i$, а $\tilde{\sigma}$ — фиксированный набор представителей из классов смежности в разложении $\mathfrak{G}_i$ по $\mathfrak{A}_i$. Займемся выбором таких представителей.

Допустим, что доказываемое утверждение справедливо для $\mathfrak{G}_{i-1}$, т. е каждый элемент из $\mathfrak{G}_{i-1}$ представим в виде:

$$\prod_{r,s} \bar{l}_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \dots \prod_{r,s} \bar{l}_{i-1,r,s}^{\lambda_{i-1,r,s}}, \tag{5}$$

где $\bar{l}_{t,r,s}$ — квазиобразующие $\mathfrak{G}_{i-1}$. Так как нормальный делитель $\mathfrak{A}_i = S_{i-1}/S_i$ содержится в S_1/S_i-группе Фраттини группы $\mathfrak{G}_i$, то за образующие $\mathfrak{G}_i$ можно взять любой набор представителей из классов смежности $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}_i = \mathfrak{G}_{i-1}$, являющихся образующими $\mathfrak{G}_{i-1}$. Пусть такими представителями будут

$$l_{1,1,s} = a_s \in \bar{l}_{1,1,s}.$$

За представителя класса смежности $l_{t,r,s} = \varphi(\bar{a})$ возьмем

$$l_{t,r,s} = \varphi(a),$$

где $\varphi(\bar{a})$ — выражение $\bar{l}_{t,r,s}$ через образующие $\bar{a}_s = \bar{l}_{1,1,s}$, а $\varphi(a)$ — такое же выражение от образующих a_s. Подобранные таким образом элементы $l_{t,r,s}$ являются квазиобразующими в смысле данного для них определения, ибо если отобразить естественным образом $\mathfrak{G}_i$ на $\mathfrak{G}_t$, то образующие a_s перейдут в некоторые образующие $a_s^{(t)}$ и, следовательно, $l_{t,r,s}$ перейдут в $\varphi(a^{(t)}) \in \mathfrak{A}_t$.

В качестве представителя элемента общего вида (5) возьмем

$$\prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \dots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda_{i-1,r,s}}. \tag{6}$$

Таким образом, в силу (6) и (3), каждый элемент $\tilde{\sigma} a$ имеет однозначное представление в виде (4). Теорема доказана.

Общее правило для перемножения элементов из $\mathfrak{G}_i$ в канонической форме довольно сложно. Вопрос сводится к приведению к каноническому виду произведения

$$\sigma\sigma' = \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \dots \prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda_{i,r,s}} \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda'_{1,r,s}} \dots \prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda'_{i,r,s}}.$$

Ограничимся краткими замечаниями:

1) Если $t_1 + t_2 > i$, то l_{t_1, r_1, s_1} и l_{t_2, r_2, s_2} коммутируют.

2) Если $t_1 + t_2 \leqslant i$, то $l_{t_1, r_1, s_1} \circ l_{t_2, r_2, s_2} \equiv l_{t_1+t_2, r_1+r_2, s_2} \pmod{S_{t_1+t_2} / S_i}$.

Чтобы перевести $\sigma\sigma'$ в каноничecкий вид, нужно «передвинуть» квазиобразующие σ' на соответствующие им места σ. При таком передвижении возникают коммутаторы, которые, согласно 2), имеют первый индекс бо́льший, чем у того элемента, который «передвигался». Возникшие квазиобразующие передвигаем на соответствующие места σ. Такой процесс заканчивается после конечного числа операций, так как, ввиду возрастания первых индексов у возникающих элементов, они, наконец, по 1), начинают коммутировать с остальными,

Пусть X — группа характеров $\mathfrak{A}_i$ и $\chi \in X$; индекс ядра A_χ в $\mathfrak{A}_i$ равен p. По теореме 1, группа $\mathfrak{G}_\chi = \mathfrak{G}_i / A_\chi$ является центральным расширением нормального делителя $\mathfrak{A}_i / A_\chi \cong E$ при фактор-группе $\mathfrak{G}_{i-1}$ и факторах $\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = \chi(a_{\sigma_1, \sigma_2})$, где $\tilde\sigma_1 \tilde\sigma_2 = \widetilde{\sigma_1\sigma_2} a_{\sigma_1, \sigma_2}$ в $\mathfrak{G}_i$. Определим базис в X следующими равенствами:

$$\chi_{r_0, s_0}(l_{i, r_0, s_0}) = \varepsilon, \quad \chi_{r_0, s_0}(l_{i, r, s}) = 1, \text{ если } r \neq r_0 \text{ или } s \neq s_0.$$

Элементы $\mathfrak{G}_i / A_{\chi_{r_0, s_0}}$ имеют вид:

$$\prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda_{i-1, r, s}} \cdot l_{i, r_0, s_0}^{\lambda_{i, r_0, s_0}} A_{\chi_{r_0, s_0}},$$

так как все образующие $\mathfrak{A}_i$, кроме l_{i, r_0, s_0}, принадлежат $A_{\chi_{r_0, s_0}}$.

Обозначим через $\mathfrak{G}_{\chi_{r_0, s_0}}$ расширение E посредством $\mathfrak{G}_{i-1}$ при факторах $\varepsilon^{\chi_{r_0, s_0}}_{\sigma_1, \sigma_2}$. Элементами $\mathfrak{G}_{\chi_{r_0, s_0}}$ являются произведения вида:

$$\prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda_{i-1, r, s}} \cdot \chi_{r_0, s_0}\Big(\prod_{r, s} l_{i, r, s}^{\lambda_{i, r, s}}\Big) = \prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda_{i-1, r, s}} \varepsilon^{\lambda_{i, r_0, s_0}}.$$

Допустим, что образующие $a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}$ не входят в выражение l_{i, r_0, s_0}. Обозначим нормальный делитель $\mathfrak{G}_{i-1}$, порожденный образующими $a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}$, через $\mathfrak{H}_{r_0, s_0}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Если* $\sigma_1 \equiv \sigma_1'$ *и* $\sigma_2 \equiv \sigma_2' \pmod{\mathfrak{H}_{r_0, s_0}}$, *то* $\varepsilon^{\chi_{r_0, s_0}}_{\sigma_1', \sigma_2'} = \varepsilon^{\chi_{r_0, s_0}}_{\sigma_1, \sigma_2}$.

Пусть $\sigma_1' = \sigma_1\eta_1$, $\sigma_2' = \sigma_2\eta_2$, где $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{H}_{r_0, s_0}$. Обозначим:

$$\eta_1 = \varphi_1(a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}), \quad \eta_2 = \varphi_2(a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}), \quad \tilde\sigma_1 = \prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda_{i-1, r, s}},$$

$$\tilde\sigma_2 = \prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda'_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda'_{i-1, r, s}}, \quad \widetilde{\sigma_1\sigma_2} = \prod_{r, s} l_{1, r, s}^{\lambda''_{1, r, s}} \ldots \prod_{r, s} l_{i-1, r, s}^{\lambda''_{i-1, r, s}}.$$

Тогда в $\mathfrak{G}_i$ имеет место равенство

$$\tilde\sigma_1 \cdot \tilde\sigma_2 = \widetilde{\sigma_1\sigma_2} \prod_{r, s} l_{i, r, s}^{\lambda''_{i, r, s}},$$

где $\prod_{r, s} l_{i, r, s}^{\lambda''_{i, r, s}}$ — элемент, образовавшийся за счет приведения к канони-

ческому виду произведения

$$\tilde{\sigma}_1 \cdot \tilde{\sigma}_2 = \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda_{i-1,r,s}} \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda'_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda'_{i-1,r,s}} =$$

$$= \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda''_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda''_{i-1,r,s}} \prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda''_{i,r,s}}.$$

Как было определено ранее,

$$\varepsilon_{\sigma_1,\sigma_2}^{\chi_{r_0,s_0}} = \chi_{r_0,s_0}\left(\prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda''_{i,r,s}}\right) = \varepsilon^{\lambda''_{i,r_0,s_0}}.$$

Аналогично перемножаем

$$\widetilde{\sigma_1\eta_1} \cdot \widetilde{\sigma_2\eta_2} = \widetilde{\sigma'_1\sigma'_2} \prod_{r,s} l_{i,r,s}^{\lambda'''_{i,r,s}},$$

т. е. в $\mathfrak{G}_i$ выполняется равенство

$$\prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda_{i-1,r,s}} \varphi_1(a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}) \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda'_{1,r,s}} \ldots \prod l_{i-1,r,s}^{\lambda'_{i-1,r,s}} \varphi_2(a_{s_1}, \ldots, a_{s_q}) =$$

$$= \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda'''_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{i-1,r,s}^{\lambda'''_{i-1,r,s}} \prod l_{i,r,s}^{\lambda'''_{i,r,s}}.$$

Можно утверждать, что $\lambda''_{i,r_0,s_0} = \lambda'''_{i,r_0,s_0}$, так как в φ_1 и в φ_2 не входят образующие, из которых составлено l_{i,r_0,s_0}.

Но

$$\varepsilon_{\sigma'_1,\sigma'_2}^{\chi_{r_0,r_0}} = \varepsilon^{\lambda'''_{i,r_0,s_0}},$$

т. е.

$$\varepsilon_{\sigma_1,\sigma_2}^{\chi_{r_0,s_0}} = \varepsilon_{\sigma'_1,\sigma'_2}^{\chi_{r_0,s_0}},$$

и теорема доказана.

§ 4. Подгруппа фундаментальной группы

В дальнейшем будут использованы некоторые факты из теории поверхностей.

Рассмотрим связную ориентируемую замкнутую поверхность P; фиксируем на ней симплициальное разбиение [см. (4)]. Пусть числа α_0, α_1, α_2 суть соответственно число вершин треугольников, число ребер и число граней (самих треугольников). Число

$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

постоянно для P и называется эйлеровой характеристикой поверхности [см. (4)]. Число

$$h = \frac{2 - N}{2}$$

называется родом поверхности P. Поверхность рода h гомеоморфна сфере с h «ручками».

Непрерывный образ в P направленного отрезка прямой называется путем на P. Два пути называются гомотопными, если их концы совпадают,

и они переводятся друг в друга непрерывной деформацией на поверхности P. Отношение гомотопности разбивает пути на классы гомотопных.

Если конец одного пути является началом второго, то произведением этих путей называется путь, являющийся образом отрезка, составленного из прообразов исходных путей так, что конец первого совпадает с началом второго. Если перемножаемые пути заменить гомотопными, то произведение окажется гомотопным исходному произведению.

Фиксируем на P точку O. Классы гомотопных путей, начало и конец которых находятся в точке O, образуют фундаментальную группу F поверхности P. Группа F имеет $2h$ образующих, связанных единственным соотношением:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} = 1.$$

Связная поверхность $\widetilde{P}$ называется i раз накрывающей поверхностью для P, если существует непрерывное отображение G поверхности $\widetilde{P}$ на P, удовлетворяющее следующим условиям:

1. В каждую точку A поверхности P отображаются i точек $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}$ поверхности $\widetilde{P}$. Говорят, что $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_i$ лежат над A.

2. Для точек $A, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_i$ существуют окрестности.

$$U(A),\ U(\widetilde{A}_1),\ U(\widetilde{A}_2), \ldots, U(\widetilde{A}_i)$$

такие, что $U(\widetilde{A}_1), U(\widetilde{A}_2), \ldots, U(\widetilde{A}_i)$ посредством G топологически отображаются на $U(A)$.

Возьмем произвольную подгруппу H индекса i группы F. Имеет место следующая теорема:

Существует i раз накрывающая P поверхность $\widetilde{P}$ такая, что ее фундаментальная группа изоморфна H.

Эта теорема в более общем виде доказана, например, в книге (4), стр. 217—221. Из хода доказательства можно сделать представляющий здесь интерес вывод о том, что эйлерова характеристика построенной поверхности $\widetilde{P}$ равна iN. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим основные пункты доказательства.

Пусть A — произвольная вершина симплициального разбиения поверхности P. Совокупность путей, идущих из фиксированной точки O в A, разбиваем на H-классы $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_i$, относя в один H-класс пути U и V всякий раз, когда замкнутый путь UV^{-1} принадлежит H. Число H-классов, принадлежащих одной вершине A, равно индексу i подгруппы H в F, ибо если U — произвольный путь из O в A, а

$$F = Hf_1 + Hf_2 + \cdots + Hf_i$$

— разложение F по H, то за H-классы можно принять

$$\overline{A}_1 = Hf_1U,\ \overline{A}_2 = Hf_2U, \ldots, \overline{A}_i = Hf_iU.$$

Пусть $\overline{A}$ и $\overline{B}$ принадлежат соответственно A и B. H-классы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называются «соседними», если A и B являются концами одного ребра c рассматриваемого симплициального разбиения P и путь UcV^{-1} принадлежит H, как только $U \in \overline{A}$, $V \in \overline{B}$.

Для каждого H-класса $\overline{A}$, принадлежащего вершине A, существует точно один принадлежащий вершине B соседний H-класс $\overline{B}$. Действительно, пусть U — фиксированный путь из $\overline{A}$. H-класс состоит из пути Uc и всех остальных путей V, для которых путь UcV^{-1} принадлежит подгруппе H. Таким образом каждому ребру AB соответствует точно i пар $\overline{A}, \overline{B}$.

Пусть ABC — произвольный треугольник симплициального разбиения P и $\overline{A}$ — фиксированный H-класс, принадлежащий вершине A. Тогда существует точно по одному H-классу $\overline{B}$ и $\overline{C}$, принадлежащему соответственно вершинам B и C, таким, что H-классу $\overline{A}, \overline{B}$ и $\overline{C}$ — попарно соседние. Действительно, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ определяются однозначно и являются соседними между собой, что проверяется непосредственно.

Пусть

$$AB = c,\ \ AC = b,\ \ CB = a,\ \ U \in \overline{A},\ \ Ub \in \overline{C},\ \ Uc \in \overline{B}.$$

Тогда

$$Ub \cdot a \cdot (Uc)^{-1} = Ubac^{-1}U^{-1}.$$

Но путь $Ubac^{-1}U^{-1}$ гомотопен нулю (так как bac^{-1} представляет собой обход треугольника и, следовательно, стягивается в точку) и, значит, принадлежит подгруппе H. Так как H-класс $\overline{A}$ можно было фиксировать i способами, то отсюда следует, что треугольнику ABC соответствует точно i троек $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.

После этого оказываются выполненными достаточные условия [см. ([4])] для того, чтобы H-классы образовали схему некоторого симплициального комплекса $\widetilde{P}$. Именно, H-классу $\overline{A}$ ставится во взаимно однозначное соответствие вершина $\widetilde{A}$ комплекса $\widetilde{P}$, паре соседних H-классов $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ — ребро $\widetilde{A}\widetilde{B}$ и тройке попарно соседних H-классов $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ — треугольник $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ комплекса $\widetilde{P}$.

Остается доказать, что $\widetilde{P}$ — связный комплекс, являющийся накрывающим для P, и что фундаментальная группа $\widetilde{P}$ изоморфна H. Эти доказательства здесь опускаются [см. ([4])].

Ввиду того что каждой вершине A, ребру AB и треугольнику ABC на поверхности P соответствует точно i вершин $\widetilde{A}$, ребер $\widetilde{A}\widetilde{B}$ и треугольников $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ на $\widetilde{P}$, эйлерова характеристика $\widetilde{P}$ равна iN.

Группу с четным числом $2h$ образующих $a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h$, связанных единственным соотношением

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1} = 1,$$

будем называть фундаментальной группой.

Очевидна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Подгруппа индекса i фундаментальной группы с $2h$ образующими является фундаментальной группой с $2h_i$ образующими, где*

$$2h_i = i(2h - 2) + 2.$$

Действительно, по приведенному сейчас доказательству, подгруппа является фундаментальной группой поверхности с эйлеровой характеристикой iN. Следовательно, $2h_i = 2 - iN$, чо $N = 2 - 2h$, откуда

$$2h_i = 2 - i(2 - 2h) = i(2h - 2) + 2,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Об одном классе p-групп

Пусть $\mathfrak{P}$ — конечная p-группа с четным числом образующих $a_1, \ldots, a_{2\nu}$.

Образуем убывающий ряд нормальных делителей $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}_0 \supset \mathfrak{P}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{P}_i \supset \ldots, \tag{7}$$

где

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_{i+1} = \mathfrak{P}_i^p [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}].$$

Группа $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^p [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ является группой Фраттини группы $\mathfrak{P}$; обозначим ее через Φ. Пусть, кроме того, $\Phi_1 = [\Phi, \mathfrak{P}]$.

ТЕОРЕМА 7. *Если в $\mathfrak{P}$ выполняется соотношение:*

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) = \rho \in \Phi_1,$$

то найдутся другие образующие $a'_1, \ldots, a'_{2\nu}$ группы $\mathfrak{P}$, в которых выполняется соотношение:

$$(a'_1 \circ a'_2) \ldots (a'_{2\nu-1} \circ a'_{2\nu}) = 1,$$

т. е. $\mathfrak{P}$ есть гомоморфный образ фундаментальной группы.

Для доказательства покажем, что если

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) = \rho \in \mathfrak{P}_i \cap \Phi_1, \quad i \geqslant 2,$$

то найдутся образующие, в которых

$$(a'_1 \circ a'_2) \ldots (a'_{2\nu-1} \circ a'_{2\nu}) = \rho' \in \mathfrak{P}_{i+1} \cap \Phi_1.$$

Отсюда теорема следует непосредственно, так как для $i = 2$ $\mathfrak{P}_2 \cap \Phi_1 = \Phi_1$, и ряд (7) для p-группы $\mathfrak{P}$ заканчивается единицей.

Все дальнейшие выкладки ведутся с точностью до множителей из $\mathfrak{P}_{i+1}$, и вместо равенств пишутся сравнения по модулю $\mathfrak{P}_{i+1}$. Ввиду того что $\mathfrak{P} / \mathfrak{P}_{i+1}$ есть гомоморфный образ $i+1$-й свободно-центральной группы, справедливы следующие утверждения, вытекающие из замечаний на стр. 451 и 453:

1) Элементы $\mathfrak{P}_i$ коммутируют с элементами $\mathfrak{P}$ по модулю $\mathfrak{P}_{i+1}$.

2) $\rho \equiv \prod_{\alpha=1}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}, \quad g_\alpha \in \mathfrak{P}_{i-1},$

так как образующие вида $a_s^{p^i}$ отсутствуют из-за того, что $\rho \in \Phi_1$. Таким образом, имеем сравнение:

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) \equiv \prod_{\alpha=1}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}. \tag{8}$$

Покажем, что все коммутаторы в правой части можно «уничтожить» за счет выбора новых образующих.

Умножим обе части (8) на $(g_1 \circ a_{j_1})$; тогда, ввиду 1), получим:

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (g_1 \circ a_{j_1}) (a_{j_1-1} \circ a_{j_1}) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) \equiv \prod_{\alpha=2}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}$$

или

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (g_1 \circ a_{j_1})(a_{j_1} \circ a_{j_1+1}) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) \equiv \prod_{\alpha=2}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}},$$

в зависимости от четности j_1. Далее, очевидно, что

$$(g_1 \circ a_{j_1})(a_{j_1-1} \circ a_{j_1}) = g_1 a_{j_1} g_1^{-1} a_{j_1}^{-1} a_{j_1-1} a_{j_1} a_{j_1-1}^{-1} a_{j_1} \equiv$$
$$\equiv a_{j_1-1} (g_1 a_{j_1} g_1^{-1} a_{j_1}^{-1}) a_{j_1} a_{j_1-1}^{-1} a_{j_1}^{-1} = (a_{j_1-1} g_1) a_{j_1} (a_{j_1-1} g_1)^{-1} a_{j_1}^{-1} \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}$$

и

$$(g_1 \circ a_{j_1})(a_{j_1} \circ a_{j_1+1}) = g_1 a_{j_1} g_1^{-1} a_{j_1+1} a_{j_1}^{-1} a_{j_1+1}^{-1} =$$
$$= g_1 (a_{j_1} g_1^{-1} a_{j_1+1} a_{j_1}^{-1} a_{j_1+1}^{-1} g_1) g_1^{-1} \equiv a_{j_1} (g_1^{-1} a_{j_1+1}) a_{j_1}^{-1} (g_1^{-1} a_{j_1+1})^{-1} \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}.$$

Если заменить образующую a_{j_1-1} на $a'_{j_1-1} = a_{j_1-1} g_1$ в случае четного j_1 и a_{j_1+1} — на $a'_{j_1+1} = g_1^{-1} a_{j_1+1}$ в случае нечетного j_1, что допустимо для системы образующих, так как $g_1 \in \mathfrak{P}_{i-1} \subset \mathfrak{P}_1 = \Phi$, то сравнения примут вид:

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{j_1} \circ a'_{j_1+1}) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) \equiv \prod_{\alpha=2}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}},$$

или

$$(a_1 \circ a_2) \ldots (a'_{j_1-1} \circ a_{j_1}) \ldots (a_{2\nu-1} \circ a_{2\nu}) \equiv \prod_{\alpha=2}^{A} (a_{j_\alpha} \circ g_\alpha) \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}.$$

При этом в правой части оставшиеся a_{j_α} заменяются таким же образом. Вид сомножителей при этом не изменится, так как если в $a \circ g$ положить $a = a'g$, то получим:

$$(a \circ g) = a' g_1 g g_1^{-1} a'^{-1} g^{-1} \equiv a' g a'^{-1} g^{-1} = a' \circ g \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}},$$

ибо

$$g_1 g g_1^{-1} \equiv g \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}},$$

в силу замечания к теореме 4.

Таким образом, получено сравнение, подобное (8), но число сомножителей в его правой части на один меньше, чем в (8). Повторяя нужное число раз произведенную операцию, придем к сравнению:

$$(a'_1 \circ a'_2) \ldots (a'_{2\nu-1} \circ a'_{2\nu}) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_{i+1}}.$$

Так как умножение обеих частей равенства производилось на элементы $a \circ g$, принадлежащие Φ, то отсюда следует, что

$$\rho' = (a'_1 \circ a'_2) \ldots (a'_{2\nu-1} \circ a'_{2\nu}) \in \mathfrak{P}_{i+1} \cap \Phi_1.$$

Теорема доказана.

§ 6. Второй центральный шаг

Рассмотрим локальное поле k_0, степень которого над R_p равна n_0. Пусть оно содержит первообразный корень ε степени p из единицы. Ясно, что n_0 четно, так как

$$(R_p(\varepsilon) : R_p) = p - 1.$$

Первообразный корень p^m-й степени с наибольшим m, принадлежащий k_0, будем обозначать через e.

Построим композит k_1 всех циклических расширений k_0 степени p. Обозначим через G_1 группу k_1 над k_0. G_1 — элементарная абелева с $\nu = n_0 + 2$ образующими. Над k_1 построим композит $\bar{k}_2$ всех центральных циклических расширений k_1 степени p. В настоящем параграфе определяется $\bar{G}_2$ — группа поля $\bar{k}_2$ над k_0.

Выберем базис в фактор-группе $k_0^{\bullet}/(k_0^{\bullet})^p$ и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ — числа, принадлежащие базисным классам. Считаем для определенности, что $\alpha_1 = e$. Образующие автоморфизмы G_1 обозначим соответственно через $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu$ так, чтобы

$$(\sqrt[p]{\alpha_i})^{\bar{a}_i} = \varepsilon\sqrt[p]{\alpha_i}, \quad (\sqrt[p]{\alpha_j})^{\bar{a}_i} = \sqrt[p]{\alpha_j} \text{ при } j \neq i, \quad i = 1, \ldots, \nu.$$

Обозначим продолжающий $\bar{a}_i$ автоморфизм поля $\bar{k}_2$, через a_i. Пусть S — свободная группа с ν образующими,

$$G_1 = S/H_1, \quad H_2 = H_1^p [H_1, S], \quad G_2 = S/H_2.$$

Тогда $\bar{G}_2 = G_2/N$, ибо в $\bar{G}_2$ выполняются соотношения:

$$a_i^{p^2} = (a_i \circ a_j)^p = (a_i \circ a_j) \circ a_k = 1.$$

N лежит в центре G_2. Задача заключается в нахождении N, т. е. соотношений в центре $A = H_1/H_2$ группы G_2.

Поле $\bar{k}_2$ составлено из центральных циклических расширений поля k_1 степени p. Каждое такое расширение $k_1(\sqrt[p]{x})$ имеет над k_0 группу G_x, являющуюся центральным расширением циклической группы Z_x порядка p посредством G_1 при некоторой фактор-системе $z^x_{\sigma_1, \sigma_2}$. Пусть $z \in Z_x$. Группа Z_x поля $k_1(\sqrt[p]{x})$ над k_1 при помощи равенств

$$(\sqrt[p]{x})^z = \varepsilon\sqrt[p]{x}$$

отображается изоморфно $z \leftrightarrow \varepsilon$ на группу E. При этом изоморфизме фактор-системы $z^x_{\sigma_1, \sigma_2}$ переходят в некоторые фактор-системы $\varepsilon^x_{\sigma_1, \sigma_2}$; классы ассоциированных с этими фактор-системами заполняют некоторое подмножество B_x группы B. Следующие теоремы позволяют установить, из каких фактор-систем состоит B_x.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть K является нормальным расширением поля k, содержащего ε. Расширение $K(\sqrt[p]{x})$ тогда и только тогда является центральным, когда существуют числа $y_\sigma \in K$, для которых $x^{\sigma-1} = y_\sigma^p$, где σ — любой автоморфизм K над k. При этом $y_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_{\sigma_2} = y_{\sigma_1\sigma_2} \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$, где $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ — фактор-система в группе E.*

Действительно, пусть σ — автоморфизм K над k, $\tilde{\sigma}$ — продолжающий его автоморфизм $K(\sqrt[p]{x})$ над k, z — автоморфизм $K(\sqrt[p]{x})$ над K. Обозначим

$$(\sqrt[p]{x})^z = \varepsilon_z (\sqrt[p]{x})$$

и пусть

$$(\sqrt[p]{x})^{\tilde{\sigma}} = \sqrt[p]{x^{\sigma}},$$

где в правой части стоят фиксированные для каждого σ значения корня. Если $\tilde{\sigma}z = z\tilde{\sigma}$, то

$$(\sqrt[p]{x^{\sigma}})^{z} = \varepsilon_z \sqrt[p]{x^{\sigma}},$$

откуда, разделив обе части равенства на $(\sqrt[p]{x})^{z}$, получим

$$\left(\frac{\sqrt[p]{x^{\sigma}}}{\sqrt[p]{x}}\right)^{z} = \frac{\sqrt[p]{x^{\sigma}}}{\sqrt[p]{x}},$$

т. е.

$$\sqrt[p]{\frac{x^{\sigma}}{x}} \in K \quad \text{и} \quad \frac{x^{\sigma}}{x} = y_{\sigma}^{p},$$

где $y_{\sigma} \in K$.

Обратно, если $x^{\sigma} = y_{\sigma}^{p}x$, то при надлежащем выборе продолжения $\tilde{\sigma}$ будем иметь

$$(\sqrt[p]{x})^{\tilde{\sigma}} = y_{\sigma} \sqrt[p]{x}$$

и

$$(\sqrt[p]{x})^{\tilde{\sigma} z} = \varepsilon_z y_{\sigma} \sqrt[p]{x} = (\sqrt[p]{x})^{z\tilde{\sigma}}.$$

Наконец,

$$(y_{\sigma_1}^{p})^{\sigma_2} y_{\sigma_2}^{p} = (x^{\sigma_1 - 1})^{\sigma_2} x^{\sigma_2 - 1} = x^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2 + \sigma_2 - 1} = x^{\sigma_1\sigma_2 - 1} = y_{\sigma_1\sigma_2}^{p},$$

т. е.

$$y_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_{\sigma_2} = y_{\sigma_1\sigma_2} \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2},$$

де $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \in E$. То, что $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ образуют фактор-систему, следует из равенства

$$\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} = \frac{y_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_{\sigma_2}}{y_{\sigma_1\sigma_2}}.$$

Полагая в исследуемом случае $k_0 = k$ и $k_1 = K$, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. *Фактор-система $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ из предыдущей теоремы совпадает с фактор-системой $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^{x}$.*

Проверяем:

$$(\sqrt[p]{x})^{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2} = (y_{\sigma_1} \sqrt[p]{x})^{\tilde{\sigma}_2} = y_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_{\sigma_2} \sqrt[p]{x} = y_{\sigma_1\sigma_2} \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \sqrt[p]{x} = \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} (\sqrt[p]{x})^{\widetilde{\sigma_1\sigma_2}},$$

т. е.

$$(\sqrt[p]{x})^{z_{\sigma_1, \sigma_2}^{x}} = \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} \sqrt[p]{x}.$$

В силу определения $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^{x}$,

$$\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^{x} = \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}.$$

Если обозначить совокупность классов фактор-систем $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ из B, состоящих из ассоциированных с единичной в поле k_1 т. е. представимых в виде

$$\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2} = \frac{y_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_{\sigma_2}}{y_{\sigma_1, \sigma_2}}, \quad y_\sigma \in k_1, \tag{9}$$

через B_k, то результатом последних двух теорем является включение $B_x \subset B_k$.

Установим обратное включение. Пусть $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ — фактор-система в E, представимая в виде (9). Тогда числа y_σ удовлетворяют соотношению

$$(y_{\sigma_1}^p)^{\sigma_2} y_{\sigma_2}^p = y_{\sigma_1\sigma_2}^p,$$

откуда следует, что существует x, для которого

$$x^{\sigma-1} = y_\sigma^p,$$

причем x определен с точностью до множителя из k_0, т. е. поле $k_1(x)$ однозначно определено, и существует фактор-система $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^x$, которая, по доказанному, равна $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$.

Если $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ представлена в виде (9) двумя способами при помощи y_σ и $\bar{y}_\sigma$, то

$$\bar{y}_\sigma = y_\sigma \bar{\bar{y}}_\sigma,$$

где числа $\bar{\bar{y}}_\sigma$ удовлетворяют соотношению

$$\bar{\bar{y}}_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{\bar{y}}_{\sigma_2} = \bar{\bar{y}}_{\sigma_1\sigma_2},$$

т. е. $\bar{\bar{y}}_\sigma = \bar{\bar{x}}^{\sigma-1}$. Тогда из $\bar{x}^{\sigma-1} = \bar{y}_\sigma^p$ получаем:

$$\bar{x}^{\sigma-1} = x^{\sigma-1} (\bar{\bar{x}}^{\sigma-1})^p,$$

т. е.

$$\bar{x}^{\sigma-1} = (x\bar{\bar{x}}^p)^{\sigma+1},$$

откуда $\bar{x} = x\bar{\bar{x}}^p$ с точностью до множителя из k_0, и, следовательно, $\bar{x}$ и x порождают одно поле

$$k_1(\sqrt[p]{\bar{x}}) = k_1(\sqrt[p]{x}).$$

Таким образом, $B_k = B_x$.

Возьмем поле k над k_0 с группой G и фактор-систему $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ в E. Скрещенное произведение поля k с его группой G при факторах $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ будем обозначать через $(k, \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2})$. Ввиду того что индекс этой алгебры равен p (так как $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^p = 1$), ее инвариант имеет вид $\frac{m}{p}$ [см. ([5])]. Мы будем употреблять мультипликативную запись инварианта, т. е. инвариантом будем называть ε^m, где ε — фиксированный первообразный корень p-й степени из единицы, и записывать:

$$(k, \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}) = \varepsilon^m.$$

В дальнейшем будут производиться вычисления с фактор-системами. Иногда, для удобства, при задании скрещенного произведения вместо фактор-системы $\varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}$ будут записываться равенства в алгебре, полностью характеризующие эту фактор-систему.

Чтобы фактор-система $\varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}$, принадлежащая какому-либо классу из B, принадлежала B_k, необходимо и достаточно, чтобы

$$(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}) = 1.$$

Выберем базис в группе характеров X группы A, как это делалось на стр. 453. Здесь базисные характеры удобнее обозначать через χ_i и $\chi_{j,k}$. Для них, по определению, имеют место равенства:

$$\chi_i(a_r^p) = \chi_i(a_s \circ a_t) = 1,$$

если $r \neq i$, s и t — любые, $\chi_i(a_i^p) = \varepsilon$, и

$$\chi_{j,k}(a_r^p) = \chi_{j,k}(a_s \circ a_t) = 1$$

при любом r и при $j \neq s$ или $k \neq t$ и $\chi_{j,k}(a_j \circ a_k) = \varepsilon$.

Чтобы подсчитать инвариант $(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2})$, разложим эту алгебру в прямое произведение и подсчитаем инвариант каждого сомножителя. Пусть

$$\chi = \prod \chi_i^{\xi_i} \prod_{j,} \chi_{j,k}^{\xi_{j,k}};$$

тогда

$$(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}) = \prod_i (k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2})^{\xi_i} \prod_{j,k} (k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2})^{\xi_{j,k}},$$

так как, по теореме 1,

$$\varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2} = \prod_i (\varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2})^{\xi_i} \prod_{j,k} (\varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2})^{\xi_{j,k}}.$$

Подсчитаем инварианты $(k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2})$ и $(k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2})$.

1) Алгебра $(k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2})$ подобна циклической $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_i}), \varepsilon)$.

Обозначим через C_i тот нормальный делитель G_1, которому принадлежит подполе $k_0(\sqrt[p]{\alpha_i})$. Этот нормальный делитель порожден всеми образующими G_1, кроме $\bar{a}_i$. По теореме 5, можно утверждать, что

$$\varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2} = \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1', \sigma_2'},$$

как только $\sigma_1 \equiv \sigma_1'$ и $\sigma_2 \equiv \sigma_2' \pmod{C_i}$. Таким образом, фактор-система $\varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2}$ может рассматриваться заданной на фактор-группе G_1/C_i, т. е. на группе поля $k_0(\sqrt[p]{\alpha_i})$ над k_0. Если

$$\bar{\sigma}_1 = \ldots a_i^{\lambda_i} \ldots, \quad \bar{\sigma}_2 = \ldots a_i^{\lambda_i'} \ldots,$$

то

$$\varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2} = \chi_i(a_{\sigma_1, \sigma_2}),$$

где a_{σ_1, σ_2} — элемент центра G_2, который получается в результате приведения к каноническому виду произведения $\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$ (см. стр. 453). Так как χ_i отлично от единицы только на одной образующей центра — на a_i^p, то

$$\chi_i(a_{\sigma_1, \sigma_2}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lambda_i + \lambda_i' < p, \\ \varepsilon, \text{ если } \lambda_i + \lambda_i' \geqslant p. \end{cases}$$

Ввиду того что $(k_1; \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2})$ подобна $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_i}), \varepsilon^{\chi_i}_{a_i^{\lambda_i}, a_i^{\lambda_i'}})$ [см. ([6])], мы получаем равенство инвариантов, которое в обозначениях, принятых для циклических алгебр, имеет вид

$$(k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1, \sigma_2}) = (k_0(\sqrt[p]{\alpha_i}), \varepsilon).$$

2) Покажем, что $(k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1\sigma_2})$ подобна $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k}), a_j^p = a_k^p = 1, a_j \circ a_k = \varepsilon)$. Действительно, пусть $C_{j,k}$ — нормальный делитель G_1, которому принадлежит поле $k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k})$. Он порождается всеми образующими, кроме $\bar{a}_j$ и $\bar{a}_k$. По теореме 5, утверждаем, что

$$\varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2} = \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1', \sigma_2'}$$

для $\sigma_1 \equiv \sigma_1'$ и $\sigma_2 \equiv \sigma_2' \pmod{C_{j,k}}$, т. е. фактор-система может рассматриваться на группе поля $k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k})$. Следовательно, $(k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2})$ подобна $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k}), \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_2})$, где $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ — автоморфизмы поля $k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k})$, индуцированные автоморфизмами σ_1 и σ_2 [см. ([6])]. Но

$$\varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2} = \chi_{j,k}(a_{\sigma_1, \sigma_2}),$$

где a_{σ_1, σ_2} имеет такое же происхождение, как и в 1). По выбору характера $\chi_{j,k}$, имеем:

$$\chi_{j,k}(a_j^p) = \chi_{j,k}(a_k^p) = 1, \quad \chi_{j,k}(a_j \circ a_k) = \varepsilon,$$

что полностью характеризует фактор-систему, и

$$(k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1, \sigma_2}) = (k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k}), \ a_j^p = a_k^p = 1, \ a_j \circ a_k = \varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что последняя алгебра подобна циклической

$$(k_0(\sqrt[p]{\alpha_k}), \ u^p = \alpha_j),$$

где $u^{-1}\sqrt[p]{\alpha_k}\,u = \varepsilon\sqrt[p]{\alpha_k}$. Действительно, рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{M} = (k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}), a_j^p = 1)$$

алгебры $\mathfrak{A} = (k_0(\sqrt[p]{\alpha_j}, \sqrt[p]{\alpha_k}), a_j^p = a_k^p = 1, a_j \circ a_k = \varepsilon)$. Она является матричной. Найдем коммутаторную с $\mathfrak{M}$ подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначим ее через $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$. Очевидно, что $\sqrt[p]{\alpha_k} \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$. Далее, ввиду равенств

$$a_j a_k a_j^{-1} = \varepsilon a_k,$$
$$a_j \sqrt[p]{\alpha_j}\, a_j^{-1} = \varepsilon^{-1} \sqrt[p]{\alpha_j},$$

получаем, что

$$u = a_k \sqrt[p]{\alpha_j} \in \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}.$$

Но

$$u^{-1} \sqrt[p]{\alpha_k}\, u = \varepsilon \sqrt[p]{\alpha_k}$$

и

$$u^p = (a_k \sqrt[p]{\alpha_j})^p = \alpha_j,$$

т. е. $\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$ есть циклическая алгебра $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_k}), \alpha_j)$.

Так как $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$ [см. ([5])], то доказано, что

$$(k_1, \varepsilon_{\sigma_1, \sigma_2}^{\chi_{j,k}}) = (k_0(\sqrt[p]{\alpha_k}), \alpha_j).$$

Инвариант алгебры $k_0(v, u)$ с таблицей умножения

$$v^p = \alpha, \quad u^p = \beta, \quad u \circ v = \varepsilon$$

обозначим символом (α, β). Имеют место следующие свойства символа (α, β):

1°. $(\alpha, \beta) = 1$ тогда и только тогда, когда β есть норма элемента из $k_0(\sqrt[p]{\alpha})$ [см. ([5])].

2°. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)^{-1}$. Действительно, алгебра $(k_0(\sqrt[p]{\alpha}), \beta)$ обратно изоморфна алгебре $(k_0(\sqrt[p]{\beta}), \alpha)$, ибо соответствия $\sqrt[p]{\alpha} \to v$, $u \to \sqrt[p]{\beta}$ дают обратный изоморфизм в силу равенств:

$$\sqrt[p]{\alpha}\, u = \varepsilon u \sqrt[p]{\alpha},$$
$$\sqrt[p]{\beta}\, v = \varepsilon v \sqrt[p]{\beta};$$

инварианты же обратно изоморфных алгебр взаимно обратны [см. ([5])].

3°. $(\alpha, \beta'\beta'') = (\alpha, \beta')(\alpha, \beta'')$. Это равенство очевидно, так как фактор-система разбивается в произведение, алгебра — в прямое произведение, а инвариант мультипликативен.

4°. Для любого $\alpha \in k_0$, не являющегося p-й степенью элемента из k_0, найдется $\beta \in k_0$ такое, что $(\alpha, \beta) \neq 1$ (невырожденность символа). Действительно, для такого α существует прямое дополнение в k^* с точностью до p-х степеней:

$$k_0^* \equiv \{\alpha\} \times A \pmod{(k_0^*)^p}.$$

Поле классов группы норм $H=\{\alpha^p\}\times A$ имеет степень p над k_0, так как $(k_0^{\bullet}:H)=p$ [см. (7)]. Следовательно, это поле есть $k_0(\sqrt[p]{\bar\beta})$, причем $(\alpha, \bar\beta)\neq 1$, ибо $\alpha\,\bar\in\, H$.

5°. Для α, фигурирующего в 4°, найдется β, для которого $(\alpha, \beta)=\varepsilon$. Это свойство очевидно, так как если

$$(\alpha, \bar\beta)=\varepsilon^q\neq 1,$$

то в качестве β можно взять $\bar\beta^{q_1}$, где $qq_1\equiv 1 \pmod p$. Элементы $\alpha, \beta \in k$, удовлетворяющие условию $(\alpha, \beta)=1$, называются ортогональными.

Результатом подсчета инвариантов является, таким образом, равенство:

$$(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2})=\prod_i(\alpha_i, \varepsilon)^{\xi_i}\prod_{j,k}(\alpha_j, \alpha_k)^{\xi_{j,k}} \tag{10}$$

для характера

$$\chi=\prod_i\chi_i^{\xi_i}\prod_{j,k}\chi_{j,k}^{\xi_{j,k}}. \tag{11}$$

Приступаем к нахождению нормального делителя $N\subset G_2$ такого, что

$$\bar G_2=G_2/N.$$

Так как $\bar G_2$ есть группа поля $\bar k_2$, являющегося композитом всех циклических центральных расширений k_1 степени p, то всякое расширение G_χ группы E посредством G_1 и $\varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}$ тогда и только тогда является группой центрального циклического расширения степени p поля k_1, когда G_χ есть фактор-группа $\bar G_2$. По теореме 2, это имеет место для тех и только тех характеров χ, которые равны единице на N.

Возьмем произвольный элемент из N

$$\prod_i(a_i^p)^{\lambda_i}\prod_{j,k}(a_j\circ a_k)^{\lambda_{j,k}}.$$

Тогда если χ, взятое в форме (11), принадлежит X_N, то

$$\chi\Big(\prod_i(a_i^p)^{\lambda_i}\prod_{j,k}(a_j\circ a_k)^{\lambda_{j,k}}\Big)=\varepsilon^{\sum\limits_i\lambda_i\xi_i+\sum\limits_{j,k}\lambda_{j,k}\xi_{j,k}}=1,$$

т. е.

$$\sum_i\lambda_i\xi_i+\sum_{j,k}\lambda_{j,k}\xi_{j,k}\equiv 0 \pmod p, \tag{12}$$

и, обратно, из (12) следует, что $\chi\in X_N$.

Пусть

$$(\alpha_i, \varepsilon)=\varepsilon^{\mu_i}, \quad (\alpha_j, \alpha_k)=\varepsilon^{\mu_{j,k}}. \tag{13}$$

Тогда из (10) и (13) получаем:

$$(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2})=\varepsilon^{\sum\limits_i\mu_i\xi_i+\sum\limits_{j,k}\mu_{j,k}\xi_{j,k}}=1,$$

т. е.

$$\sum_i \mu_i \xi_i + \sum_{j,k} \mu_{j,k} \xi_{j,k} \equiv 0 \pmod p) \tag{14}$$

для тех и только тех $\varepsilon^{\chi}_{\sigma_1, \sigma_2}$, для которых G_χ является группой центрального циклического расширения k_1 степени p. Равенства (12) и (14) выполняются для одних и тех же $\xi_i, \xi_{j,k}$, т. е.

$$\lambda_i \equiv t_{\mu_i}, \quad \lambda_{j,k} \equiv t_{\mu_{j,k}} \pmod p), \quad 0 \leqslant t \leqslant p-1.$$

Таким образом, N является циклической группой с образующими

$$\prod_i (a_i^p)^{\mu_i} \prod_{j,k} (a_j \circ a_k)^{\mu_{j,k}},$$

т. е. в $\overline{G}_2$ выполняется соотношение

$$\prod_i (a_i^p)^{\mu_i} \prod_{j,k} (a_j \circ a_k)^{\mu_{j,k}} = 1. \tag{15}$$

Замечание. Если k_0 содержит корень p^m-й степени из единицы, где $m > 1$, то ε является p-й степенью в k_0 и поэтому $(\alpha_i, \varepsilon) = 1$, т. е. соотношение (15) превращается в равенство

$$\prod_{j,k} (a_j \circ a_k)^{\mu_{j,k}} = 1. \tag{15'}$$

Соотношение (15) можно привести к более удобному виду, выбрав специальным образом базис в $\overset{*}{k}_0$. Докажем, что в $\overset{*}{k}_0$ можно выбрать базис $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\nu/2}, \beta_{\nu/2}$ по модулю $(\overset{*}{k}_0)^p$, удовлетворяющий соотношениям ортогональности:

$$(\alpha_i, \beta_i) = \varepsilon, \quad (\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_i, \beta_j) = (\beta_i, \beta_j) = 1 \quad \text{при } i \neq j.$$

В качестве α_1 можно взять любой базисный элемент $\overset{*}{k}_0$. Для конкретности будем в дальнейшем считать $\alpha_1 = e$.

В силу 5°, в $\overset{*}{k}_0$ найдется такое число β_1, что $(\alpha_1, \beta_1) = \varepsilon$. Выделим в $\overset{*}{k}_0$ прямое дополнение к $\{\alpha_1\} \times \{\beta_1\}$ по модулю $(\overset{*}{k}_0)^p$:

$$\overset{*}{k}_0 \equiv \{\alpha_1\} \times \{\beta_1\} \times \{\gamma_1\} \times \cdots \times \{\gamma_{\nu-2}\} \pmod{(\overset{*}{k}_0)^p}.$$

Покажем, что все γ можно считать ортогональными к α_1 и β_1. Действительно, если

$$(\alpha_1, \gamma_i) = \varepsilon^{r_i}$$

и

$$(\beta_1, \gamma_i) = \varepsilon^{s_i};$$

то вместо γ_i можно взять $\gamma_i \beta_1^{-r_i} \alpha_1^{s_i}$ и тогда, на основании свойств 2° и 3°, получим:

$$(\alpha_1, \gamma_i \beta_1^{-r_i} \alpha_1^{s_i}) = (\alpha_1, \gamma_i)(\alpha_1, \beta_1)^{-r_i} (\alpha_1, \alpha_1)^{s_i} = \varepsilon^{r_i} \varepsilon^{-r_i} = 1,$$
$$(\beta_1, \gamma_i \beta_1^{-r_i} \alpha_1^{s_i}) = (\beta_1, \gamma_i)(\beta_1, \beta_1)^{-r_i} (\beta_1, \alpha_1)^{s_i} = \varepsilon^{s_i} \varepsilon^{-s_i} = 1.$$

В качестве α_2 можно взять любое число из ортогонального к $\{\alpha_1\} \times \{\beta_1\}$ дополнения и подобрать к нему β_2 так, чтобы $(\alpha_2, \beta_2) = \varepsilon$. Продолжая таким образом, мы исчерпаем весь базис k_0^* по модулю $(k_0^*)^p$.

Если обозначить через a_i и b_i автоморфизмы поля $\overline{k}_2$, соответствующие в прежнем смысле числам α_i и β_i, то соотношения (15) упростятся благодаря тому, что равенства (13) превратятся теперь в следующие равенства:

$$\mu_2 = (\alpha_1, \beta_1) = 1, \quad \mu_i = 0$$

при $i \neq 2$, если $\alpha_1 = \varepsilon$,

$$\mu_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

если $m > 1$,

$$\mu_{2i-1, 2i} = 1 \cdot/. (\alpha_i, \beta_i) = \varepsilon \cdot/., \quad \mu_{t, s} = 0$$

при $t \neq 2i - 1$ или $s \neq 2i$.

Тогда получим теоремы:

ТЕОРЕМА 10. *Если k_0 содержит корень p-й степени из единицы и не содержит корня p^2-й степени из единицы, то группа $\overline{G}_2$ поля $\overline{k}_2$ имеет образующие $a_1, b_1, \ldots, a_{\nu/2}, b_{\nu/2}$, в которых выполняется единственное нетривиальное соотношение:*

$$b_1^p (a_1 \circ b_1)(a_2 \circ b_2) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2}) = 1. \tag{16}$$

ТЕОРЕМА 10′. *Если k_0 содержит корень p^2-й степени из единицы, то в $\overline{G}_2$ имеются образующие $a_1, b_1, \ldots, a_{\nu/2}, b_{\nu/2}$, в которых выполняется единственное нетривиальное соотношение:*

$$(a_1 \circ b_1)(a_2 \circ b_2) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2}) = 1, \tag{16′}$$

т. е. $\overline{G}_2$ оказывается гомоморфным образом фундаментальной группы.

§ 7. Группа поля k_m в случае $\sqrt[p^M]{1} \in k_0$

Замечание. Если $k_0 \subset k_1 \subset k \subset K$ — нормальные расширения k_0 с p-группами, то в качестве образующих автоморфизмов K можно брать любые продолжения в K образующих автоморфизмов k. Действительно, в этом случае k принадлежит нормальному делителю, содержащемуся в группе K над k_1, т. е. в группе Фраттини группы K над k_0, так как k_1 является максимальным элементарным абелевым подполем K.

Пусть k_0 содержит корень p^M-й степени из единицы. Возьмем $m < M$ и рассмотрим последовательность полей

$$k_0 \subset \overline{k}_2 \subset \overline{k}_m \subset k_m,$$

где

$$\overline{k}_m = \overline{k}_2 (\sqrt[p^m]{\alpha_1}, \sqrt[p^m]{\beta_1}, \ldots, \sqrt[p^m]{\alpha_{\nu/2}}, \sqrt[p^m]{\beta_{\nu/2}}),$$

k_m — максимальное m-ступенное расширение k_0, определенное в § 1. Группу $\overline{k}_m$ обозначим через $\overline{G}_m$, группу k_m — через $G_m = \mathfrak{P}$. Пусть

$$\Phi_1 = [\Phi_1, \mathfrak{P}],$$

где $\Phi = \mathfrak{P}^p [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ — группа Фраттини $\mathfrak{P}$.

За образующие G_m поля k_m можно взять такие автоморфизмы

$$a_1, b_1, \ldots, a_{\nu/2}, b_{\nu/2}, \tag{17}$$

которые продолжают образующие поля $\overline{k}_2$, связанные соотношением (16′).

ТЕОРЕМА 11. *В группе $\overline{G}_m$ можно выбрать образующие, в которых выполняется соотношение* (16′).

В силу замечания, можно считать, что

$$(\sqrt[p^m]{\alpha_i})^{a_i} = e\sqrt[p^m]{\alpha_i}, \quad (\sqrt[p^m]{\alpha_j})^{a_i} = \sqrt[p^m]{\alpha_j}, \quad (\sqrt[p^m]{\beta_k})^{a_i} = \sqrt[p^m]{\beta_k},$$

$$(\sqrt[p^m]{\alpha_k})^{b_i} = \sqrt[p^m]{\alpha_k}, \quad (\sqrt[p^m]{\beta_i})^{b_i} = e\sqrt[p^m]{\beta_i}, \quad (\sqrt[p^m]{\beta_j})^{b_i} = \sqrt[p^m]{\beta_j}, \quad k \text{ — любое}, \quad j \neq i,$$

где e — корень p^m-й степени из единицы.

Теперь очевидно, что $(a_1 \circ b_1) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2})$ не изменяет как элементов поля $\overline{k}_2$, так и $\sqrt[p^m]{\alpha_i}$, $\sqrt[p^m]{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, \nu/2$, т. е. не изменяет элементов из $\overline{k}_m$.

ТЕОРЕМА 12. *Подполе $\overline{k}_m$ поля k_m принадлежит* Φ_1.

$\overline{k}_2$ является максимальным центральным двуступенным подполем k_m. Следовательно, $\overline{k}_2$ принадлежит $\Phi^p [\mathfrak{P}, \Phi]$. Значит, автоморфизмы из Φ_1 не изменяют элементов из $\overline{k}_2$. Кроме того, каждый автоморфизм из Φ_1 не изменяет также и $\sqrt[p^m]{\alpha_i}$, $\sqrt[p^m]{\beta_i}$, так как сумма показателей, с которыми фиксированная образующая входит в элемент из Φ_1, равна нулю. Таким образом, Φ_1 не изменяет всех элементов $\overline{k}_m$,

Обратно, возьмем произвольный автоморфизм σ из $\mathfrak{P}$. Ввиду того что $\mathfrak{P}$, как всякая конечная p-группа, является гомоморфным образом N-й свободно-центральной группы $\mathfrak{G}_N$ (при достаточно большом N), взятый автоморфизм можно выразить (не обязательно единственным образом) через квазиобразующие $l_{t,r,s}$, составленные из образующих (17):

$$\sigma = \prod_{r,s} l_{1,r,s}^{\lambda_{1,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{N,r,s}^{\lambda_{N,r,s}}. \tag{18}$$

Если автоморфизм (18) не изменяет элементов из $\overline{k}_2$, то он принадлежит $\Phi^p [\mathfrak{P}, \Phi]$ и, значит, квазиобразующие с $t = 1, 2$ отсутствуют, т. е.

$$\sigma = \prod_{r,s} l_{3,r,s}^{\lambda_{3,r,s}} \ldots \prod_{r,s} l_{N,r,s}^{\lambda_{N,r,s}}. \tag{19}$$

Если автоморфизм (19) не изменяет $\sqrt[p^m]{\alpha_i}$ и $\sqrt[p^m]{\beta_i}$, $i=1,\ldots,\nu/2$, то квазиобразующие с $r=1$ отсутствуют, т. е. в (19) входят лишь квазиобразующие второго типа в смысле замечания к теореме 3. Действительно, квазиобразующие второго типа имеют вид $a\circ g$, где a — образующая из (17), а $g\in\Phi$, так как $t\geqslant 3$, т. е. не изменяют $\sqrt[p^m]{\alpha_i}$ и $\sqrt[p^m]{\beta_i}$, а квазиобразующая $l_{t,1,s}=a_s^{p^{t-1}}$ (не умаляя общности, считаем, что a_s соответствует $\sqrt[p^m]{\alpha_s}$) изменяет $\sqrt[p^m]{\alpha_s}$ на $e^{p^{t-1}}\sqrt[p^m]{\alpha_s}$. Отсюда следует, что σ, действуя на $\sqrt[p^m]{\alpha_s}$, переводит его в

$$e^{\sum\limits_{t=3}^{N}\lambda_{t,1,s}\,p^{t-1}}\sqrt[p^m]{\alpha_s},$$

т. е. для того, чтобы $\sqrt[p^m]{\alpha_s}$ не изменялся под действием σ, необходимо чтобы для $t=3,\ldots,m$ было $\lambda_{t,1,s}=0$. Для остальных $t=m+1,\ldots,N$ равенство $\lambda_{t,1,s}=0$ следует из соотношений в $\mathfrak{P}$. Но это равенство означает, что σ состоит из сомножителей вида $a\circ g$, каждый из которых принадлежит Φ_1. Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 11 и 12 дают право утверждать, что в группе $\mathfrak{P}$ выполняется соотношение:

$$(\alpha_1\circ b_1)\ldots(a_{\nu/2}\circ b_{\nu/2})=\rho\in\Phi_1.$$

Применяя теорему 7, получаем, что $\mathfrak{P}$ является гомоморфным образом фундаментальной группы F с ν образующими. Запишем это в виде равенства

$$\mathfrak{P}=F/H.$$

Ввиду того что $\mathfrak{P}$ является группой m-ступенного поля, для него выполняется соотношение $\mathfrak{P}^{(m)}=1$.

Составим для F убывающий ряд нормальных делителей:

$$F=F^{(0)}\supset F^{(1)}\supset\ldots\supset F^{(m)}\supset\ldots,$$

где

$$F^{(m)}=(F^{(m-1)})^p\,[F^{(m-1)},\ F^{(m-1)}].$$

Вследствие равенства $\mathfrak{P}^{(m)}=1$, получаем:

$$H\supset F^{(m)}.$$

ТЕОРЕМА 13. $\mathfrak{P}=F/F^{(m)}$.

Достаточно доказать равенство индексов:

$$(F:H)=(F:F^{(m)}),$$

т. е.

$$(k_m:k_0)=(F:F^{(m)}).$$

Допустим, что доказываемое утверждение справедливо для $m-1$, т. е.

$$(k_{m-1}:k_0)=(F:F^{(m-1)}).$$

Тогда

$$(k_m:k_{m-1})=p^{n_0(k_{m-1}:k_0)+2},$$

так как абсолютная степень k_{m-1} равна $n_0(k_{m-1}:k_0)$. Далее, число образующих $F^{(m-1)}$, по теореме 6, равно

$$(F:F^{(m-1)})(\nu-2)+2=(F:F^{(m-1)})n_0+2.$$

Таким образом, справедливы равенства:

$$(F:H)=(k_m:k_0)=(k_m:k_{m-1})(k_{m-1}:k_0)=p^{n_0(k_{m-1}:k_0)+2}(k_{m-1}:k_0),$$

$$(F:F^{(m)})=(F:F^{(m-1)})(F^{(m-1)}:F^{(m)})=(F:F^{(m-1)})\,p^{(F:F^{(m-1)})\,n_0+2}.$$

Правые части этих равенств совпадают, в силу индукционного предположения, и теорема доказана.

Поступило
28. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шафаревич И. Р., О p-расширениях, Матем., сб., т. 20 (62) : 2 (1947), 351—363.
[2] Скопин А. И., Фактор-группы одного верхнего центрального ряда свободной группы, Доклады Ак. наук СССР, 74, № 3 (1950), 425—428.
[3] Witt E., Treue Darstellung Liescher Ringe, J. reine und angew. Math., 177 (1937), 152—160.
[4] Зейферт Г. и Трельфалль В., Топология, М. — Л., ГОНТИ, 1938.
[5] Albert A., Structure of algebras, Am. Math. Soc., B., 24, 1939.
[6] Deuring M., Algebren, Ergebnisse der Math., 4, H. 1, 1935.
[7] Chevalley C., Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, J. Fac. Sci. Univ. Tokio, II, v. 9 (1933), 365—476.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
19 (1955), 471—482

Л. А. СКОРНЯКОВ

МЕТРИЗАЦИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ В СВЯЗИ С ДАННОЙ СИСТЕМОЙ КРИВЫХ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе доказывается, что проективную плоскость можно метризовать так, чтобы кривые данной системы оказались геодезическими.

В книге (5) (теорема 2, стр. 19) было показано, что в метрическом пространстве $\mathfrak{R}$, в котором замыкание каждого ограниченного множества компактно, любые две точки можно соединить геодезической (локально кратчайшей), если это пространство удовлетворяет условию выпуклости (см. D4) и условию D: для каждой точки $O \in \mathfrak{R}$ существует такое число $\rho > 0$, что для любых двух точек A, B, удовлетворяющих условию $d(A, O)$, $d(B, O) < \rho$, и любого $\varepsilon > 0$ существует число δ, $0 < \delta < \varepsilon$, для которого найдется единственная точка B_δ, удовлетворяющая равенствам

$$d(A, B) + d(B, B_\delta) = d(A, B_\delta),$$

$$d(B, B_\delta) = \delta \quad (d(A, B) \text{ — расстояние в } \mathfrak{R}).$$

Если две точки из $\mathfrak{R}$ соединяются не более чем одной геодезической и $\mathfrak{R}$ двумерно (в смысле Урысона), то $\mathfrak{R}$ гомеоморфно евклидовой плоскости или проективной плоскости. В первом случае геодезические гомеоморфны интервалу (0,1), во втором — окружности (теорема 1, стр. 79). Для первого случая в книге (5) доказывается обратная теорема (теорема 1, стр. 89). В настоящей работе такая теорема доказывается для второго случая. Основной результат содержит следущая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Σ — система подмножеств проективной плоскости Π, называемых кривыми; каждая кривая из Σ гомеоморфна окружности; точки из Π и кривые из Σ при естественном определении инцидентности образуют абстрактную проективную плоскость* [см., например,(3) стр. 115]. *Тогда в Π можно ввести метрику $d(A, B)$, обладающую следующими свойствами:*

D1. *Метрика d индуцирует в Π естественную топологию.*

D2. *Если $A, B \in \Pi$, то $d(A, B) \leqslant 1$.*

D3. *Если $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, то точки A, B, C располагаются на одной кривой из Σ.*

D4. *Если A и C — различные точки из Π, то существует такая точка $B \in \Pi$, что*

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

D5. *Если точки* $A, B \in \Pi$, $d(A, B) < 1$ *и* ε — *произвольное число, то существует число* δ, $0 < \delta < \varepsilon$, *для которого найдется единственная точка* B_δ, *удовлетворяющая равенствам:*

$$d(A, B) + d(B, B_\delta) = d(A, B_\delta) \text{ и } d(B, B_\delta) = \delta.$$

Так как свойство D4 совпадает с условием выпуклости в книге (5) (стр. 11), а свойство D5 влечет выполнение условия D той же книги (стр. 12), то сформулированная теорема решает обратную задачу для проективной плоскости [см. (5), стр. 89].

Чтобы доказать теорему 1, рассмотрим круг S, лежащий в евклидовой плоскости E. Обозначим через O, R, Γ и K, соответственно, центр, радиус, окружность и замыкание круга S.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в круге* S *задана система* Ξ *подмножеств, называемых кривыми, удовлетворяющая следующим требованиям:*

Ξ0. *Каждая кривая гомеоморфна интервалу* (0,1).

Ξ1. *Если* l — *кривая из* Ξ, *то ее замыкание в* S *совпадает с* l, *а замыкание* l * *в* K *является простой дугой. Точки из* $\Gamma \cap \overline{l}$ *назовем концами кривой* l.

Ξ2. *Точки из* S *и кривые из* Ξ *при естественном определении инцидентности образуют абстрактную евклидову плоскость* [см. (3), стр. 117].

Ξ3. *Кривые* k *и* l *параллельны тогда и только тогда, если их концы совпадают.*

Тогда в S *можно ввести метрику* $\delta(A, B)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

Δ1. *Метрика* δ *индуцирует в* S *естественную топологию.*

Δ2. *Для всех точек* $A, B \in S$

$$\delta(A, B) < 2R.$$

Δ3. *Если последовательности* $\{A_n^i\}$, $i = 1, 2$, *точек из* S *сходятся к точкам* $X^i \in \Gamma$ *в смысле топологии плоскости* E *и* X^i *служат концами одной и той же кривой из* Ξ, *то*

$$\lim \delta(A_n^1, A_n^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } X^1 = X^2, \\ 2R, & \text{если } X^1 \neq X^2. \end{cases}$$

Δ4. *Если* $A \in S$, $B_n \in S$, $\lim B_n = X \in \Gamma$,** *то* $0 < \lim \delta(A, B_n) < 2R$.

Δ5. *Точки* A, B, C *лежат в указанном порядке на кривой из* Ξ *тогда и только тогда, если*

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C).$$

Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *В евклидовой плоскости, образованной точками из* S *и кривыми из* Ξ, *справедливы аксиомы порядка.*

Действительно, если S гомеоморфно отобразить на E с сохранением порядка, то кривые из Ξ будут удовлетворять условиям теоремы 1 книги (5), стр. 89, в ходе доказательства которой устанавливается справедливость нашей леммы.

---

* Если M — некоторое множество, то через $\overline{M}$ обозначается его замыкание.

** Если $\{B_n\}$ — последовательность точек, то $\lim B_n$ обозначает ее предел в смысле топологии плоскости E или Π в зависимости от контекста.

Определение. Если точки из S (кривые из Ξ) A, B, C лежат на одной кривой из Ξ (параллельны), причем B располагается между A и C *, то будем писать (ABC).

Пусть l — некоторая кривая из Ξ, проходящая через O. Обозначим через 0 и 2π ее концы, а через s — одну из дуг $(0, 2\pi)$ окружности Γ. После отождествления 0 и 2π дуга s превращается в окружность σ. Из $\Xi 1$ — $\Xi 3$ вытекает, что между точками из σ и пучками параллельных кривых из Ξ существует взаимно однозначное соответствие. Если $A \in S$, $\alpha \in \sigma$ (α можно считать числом полуинтервала $[0\ 2\pi)$), то обозначим через a_α кривую, проходящую через A и принадлежащую пучку α.

ЛЕММА 2. *Если* A, $A_n \in S$, α, $\alpha_n \in \sigma$, $\lim A_n = A$, $\lim \alpha_n = \alpha$, *то топологический предел* [см. (4), стр. 166] *последовательности кривых* $(a_n)_{\alpha_n}$ *совпадает с* $\overline{a}_\alpha$.

Доказательство. Возьмем лежащую в S окружность γ с центром в точке A. Из точек $C_n = (a_n)_{\alpha_n} \cap \gamma$ выберем сходящуюся последовательность $\{C'_n\}$. Пусть $\lim C'_n = C$. Из теорем 1 и 4 книги (5) вытекает, что $lt\,[A_nC_n]$ ** совпадает с замыканием некоторой кривой $h \in \Xi$. Из $\Xi 1$— $\Xi 3$ и соотношения $\lim \alpha_n = \alpha$ легко получить, что $h = a_\alpha$. Так как проведенное рассуждение сохраняет силу для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{C_n\}$, то

$$lt\,(a_n)_{\alpha_n} = \overline{a}_\alpha.$$

ЛЕММА 3. *Если* $\alpha \in \sigma$, $\lim A_n = X \in \Gamma$ *и точка* X *служит несобственной точкой пучка* β, *причем* $\beta \in \sigma$ *и* $\alpha \neq \beta$, *то* $lt\,(a_n)_\alpha \subset \Gamma$.

Допустим, что существуют такие точки $B_n \in (a_n)_\alpha$, что

$$\lim B_n = B \in S.$$

Тогда, ввиду леммы 2,

$$lt\,(a_n)_\alpha - b_\alpha.$$

Поэтому X оказывается концом кривой пучка α, что несовместимо с условием $\alpha \neq \beta$.

ЛЕММА 4. *Если* $h^i_n \in \Xi$, $i = 1, 2$, $A_n = h^1_n \cap h^2_n$, $lt h^i_n = h^i$, $h^1 \nparallel h^2$, *то* $\lim A_n$ *существует и равен* $A = h^1 \cap h^2$.

Действительно, для всякой сходящейся подпоследовательности $\{A'_n\}$ последовательности $\{A_n\}$ имеем:

$$\lim A'_n = A \in K.$$

Так как $A'_n \in h^i_n$, то $A \in \overline{h}^i$. Отсюда, ввиду $\Xi 3$, следует, что

$$A = \overline{h}^1 \cap \overline{h}^2 = h^1 \cap h^2.$$

Теперь отождествим кривую l с интервалом $(0,1)$. Если $A \in S$, $\alpha \in \sigma$, $\alpha \neq 0$, то положим

$$t^\alpha_a = a_\alpha \cap l.$$

---

* Не исключаются случаи $A = B$, $B = C$ или $A = B = C$.

** Если A, $B \in S$ (П), то $[AB]$ обозначает кривую из $\Xi(\Sigma)$, проходящую через точки A и B. Если $\{M_n\}$ — последовательность множеств, то через ltM_n обозначается ее топологический предел.

При этом t_a^α можно считать числом из (0,1). Определим неотрицательную функцию $f(A, B, \alpha)$, где $A, B \in S$, $\alpha \in \sigma$, $\alpha \neq 0$, равенством

$$f(A, \alpha) B, = \left| t_a^\alpha - t_b^\alpha \right|.$$

ЛЕММА 5. *Функция $f(A, B, \alpha)$ обладает следующими свойствами:*

$f1$. $f(A, B, \alpha) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a_\alpha = b_\alpha$.

$f2$. $f(A, B, \alpha) = f(B, A, \alpha)$.

$f3$. $f(A, B, \alpha) + f(B, C, \alpha) \geqslant f(A, C, \alpha)$.

$f4$. $f(A, B, \alpha) + f(B, C, \alpha) = f(A, C, \alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $(a_\alpha b_\alpha c_\alpha)$.

$f5$. $f(A, B, \alpha)$ *является непрерывной функцией* α.

Свойства $f1$—$f4$ становятся очевидными, если принять во внимание $\Xi 1$—$\Xi 3$ и лемму 1. Свойство $f5$ легко вывести из лемм 2 и 4.

Свойство $f5$ позволяет определить неотрицательную функцию

$$\delta(A, B) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, B, \alpha)\, d\alpha.$$

Из $f1$—$f3$ вытекает, что δ обладает следующими свойствами:

$\delta 1$. $\delta(A, B) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A = B$;

$\delta 2$. $\delta(A, B) = \delta(B, A)$;

$\delta 3$. $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geqslant \delta(A, C)$,

т. е. задает в S метрику. Покажем, что эта метрика обладает свойствами $\Delta 1$—$\Delta 5$.

Во-первых, заметим, что справедливость $\Delta 2$ сразу следует из $f5$ и соотношения $f(A, B, \alpha) < 1$.

Для доказательства $\Delta 3$ заметим, что, согласно лемме 3, для всех α, кроме одного (обозначим его через α_0),

$$lt\,(a_n^i)_\alpha \subset \Gamma.$$

Следовательно, $\lim f(A_n^1, A_n^2, \alpha)$ равен 0 или 1. Из $\Xi 1$—$\Xi 3$ и леммы 1 нетрудно вывести, что 0 получается при $X^1 = X^2$, а 1 — при $X^1 \neq X^2$. Допустим, что

$$\lim \delta(A_n^1, A_n^2) = t, \quad 0 < t < 2R.$$

Выберем число ε так, чтобы

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi(2R - t)}{2R}, \ \frac{\pi t}{2R}\right\}.$$

Если α_0 отлично от 0 и 2π, то потребуем дополнительно, чтобы ε было меньше $\min\{\alpha_0, \ 2\pi - \alpha_0\}$. Если $\alpha_0 = 0$, то положим $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = \varepsilon$; если $\alpha_0 = 2\pi$, то положим $\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = 0$; в остальных случаях положим $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$. Ввиду теоремы Дини [см., например, ([2]), стр. 29], на отрезках $[0, \alpha_0 - \varepsilon']$ и $[\alpha_0 + \varepsilon'', 2\pi]$ функции $f(A_n^1, A_n^2, \alpha)$ равномерно сходятся к 0 или 1. Поэтому

$$I_1 = \lim \frac{R}{\pi} \int_0^{\alpha_0 - \varepsilon'} f(A_n, B_n, \alpha)\, d\alpha = 0 \text{ или } \frac{R}{\pi}(\alpha_0 - \varepsilon'),$$

$$I_2 = \lim \frac{R}{\pi} \int_{\alpha_0 + \varepsilon''}^{2\pi} f(A_n, B_n, \alpha)\, d\alpha = 0 \text{ или } \frac{R}{\pi}(2\pi - \alpha_0 - \varepsilon'').$$

Но тогда в первом случае

$$t < \lim \frac{R}{\pi} \int\limits_{\alpha_0 - \varepsilon'}^{\alpha_0 + \varepsilon''} f(A_n, B_n, \alpha)\, d\alpha \leqslant \frac{R}{\pi}(\varepsilon' + \varepsilon'') \leqslant \frac{R}{\pi} 2\varepsilon < t,$$

а во втором —

$$t > I_1 + I_2 = 2R - \frac{R}{\pi}(\varepsilon' + \varepsilon'') \geqslant 2R - \frac{R}{\pi} 2\varepsilon > t.$$

И то и другое противоречиво.

Чтобы проверить свойство $\Delta 4$, допустим, что точка X служит несобственной точкой пучка β. Из лемм 1 и 3 вытекает, что для достаточно больших n и $\alpha \neq 0$, β, 2π имеет место:

$$f(A, B_n, \alpha) \leqslant w = \max\{t_a^\beta,\ 1 - t_a^\beta\}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim \delta(A, B_n) = \lim \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(A, B_n, \alpha)\, d\alpha \leqslant 2Rw < 2R.$$

Если $\lim \delta(A, B_n) = 0$, то обозначим через Y второй конец кривой $[AX]$ и рассмотрим последовательность точек $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ из S, сходящуюся к Y. Ввиду $\delta 3$,

$$\delta(A, C_n) \geqslant \delta(B_n, C_n) - \delta(A, B_n).$$

Переходя к пределу и учитывая $\Delta 3$, будем иметь:

$$\lim \delta(A, C_n) \geqslant 2R,$$

вопреки полученному выше. Таким образом,

$$0 < \lim \delta(A, B_n) < 2R.$$

В случае (ABC), ввиду $f4$, для всех α будем иметь:

$$f(A, B, \alpha) + f(B, C, \alpha) = f(A, C, \alpha),$$

откуда следует первая часть $\Delta 5$. Для доказательства второй части заметим, что, благодаря $f3$ и $\delta 3$, соотношение

$$\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$$

влечет за собой соотношение

$$f(A, B, \alpha) + f(B, C, \alpha) = f(A, C, \alpha) \qquad (*)$$

для всех значений α. Допустим, что A, B и C не лежат на одной кривой из Ξ. Из леммы 1 вытекает существование отличных от A, B, C точек D и E, для которых справедливо (DAC) и (AEB). Ввиду аксиомы Паша (она имеет место в силу леммы 1), кривая $d_\beta = [DE]$ пересекает стороны AB и BC треугольника ABC. Отсюда следует $(a_\beta c_\beta b_\beta)$ или $(c_\beta a_\beta b_\beta)$, что вызывает противоречие между $(*)$ и $f4$. Точно так же возникает противоречие, если имеет место (ACB) и $B \neq C$ или (CAB) и $A \neq B$. Свойство $\Delta 5$ доказано.

Проверим, наконец, Δ1. Из лемм 2 и 4 вытекает, что равенство

$$\lim A_n = A$$

влечет равенство

$$\lim \delta(A, A_n) = 0.$$

Пусть теперь $\lim \delta(A, A_n) = 0$ и B — предельная точка последовательности $A_1, \ldots, A_n, \ldots$. Пусть подпоследовательность $A_1', \ldots, A_n', \ldots$ сходится к B. Ввиду Δ4, $B \in S$. Поэтому δ3 дает:

$$\delta(A, B) \leqslant \delta(A, A_n') + \delta(A_n', B).$$

Переходя к пределу, получим $\delta(A, B) = 0$, откуда, согласно δ1, $A = B$. Таким образом,

$$\lim A_n = A.$$

Свойство Δ1, а с ним и вся теорема 2 доказаны.

Переходим к доказательству теоремы 1. Рассмотрим несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 6. *Никакая кривая из* Σ *не разбивает* Π.

Допустим, что кривая $k \in \Pi$ разбивает Π. Если точки A и B располагаются в различных компонентах множества $\Pi \setminus k$ *, то каждая из дуг кривой $[AB]$, соединяющих A с B, должна пересечь k. Но этот результат противоречит свойствам системы Σ.

ЛЕММА 7. *Множество* $\Pi \setminus k$, *где* $k \in \Sigma$, *гомеоморфно кругу.*

Это утверждение вытекает из леммы 6 и предложений [6 : 41] (стр. 133), [6 : 11] (стр. 130) и [7 : 211] (стр. 139) книги (¹).

Пусть кривая $k \in \Sigma$. Ввиду леммы 7, можно считать, что $\Pi \setminus k$ гомеоморфно кругу S радиуса 1. Части кривых из Σ, лежащие в $\Pi \setminus k$, образуют систему кривых Ξ, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Отождествив S и $\Pi \setminus k$, можно ввести в S метрику, удовлетворяющую условиям Δ1—Δ5.

Продолжим эту метрику на замыкание K круга S. Если $A, B \in K$, то положим

$$\rho(A, B) = \lim \delta(A_n, B_n),$$

где последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ состоят из точек, лежащих в S и сходящихся, соответственно, к точкам A и B в смысле топологии множества K. Из Δ1 и Δ3 вытекает, что $\rho(A, B)$ не зависит от выбора последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ и при $A, B \in S$, совпадает с $\delta(A, B)$. Очевидно также, что

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C).$$

ЛЕММА 8. *Если* $A, B \in S$, X *и* Y — *различные концы кривой* $[AB]$ *из* Ξ, *точки* X, A, B, Y *расположены в указанном порядке* (возможно, что $A = B$), *то*

$$\rho(X, A) + \rho(A, B) + \rho(B, Y) = 2.$$

---

* Через $M \setminus N$ обозначается дополнение множества N в множестве M.

Для доказательства выберем на кривой $[AB]$ такие точки X_n, Y_n, что

$$\lim X_n = X, \quad \lim Y_n = Y.$$

Ввиду $\Delta 5$, $\rho(X_n, A) + \rho(A, B) + \rho(B, Y_n) = \rho(X_n, Y_n)$. Отсюда, в силу $\Delta 3$, вытекает требуемое равенство.

ЛЕММА 9. *Если $A \in S$, $B \in \Gamma$* (Γ, как и раньше, обозначает окружность круга S), *то $\rho(A, B)$ отлично от 0 и 2.*

Лемма 9 является непосредственным следствием свойства $\Delta 4$.

ЛЕММА 10. *Если A и B — концы кривых, принадлежащих пучкам α и β соответственно, то, считая α и β числами полуинтервала* $[0, 2\pi)$ (см. стр. 473), *будем иметь:*

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \dfrac{|\alpha - \beta|}{\pi}, & \text{если пара } A,\ B \text{ не разделяет пары } 0, 2\pi, \\ \dfrac{2\pi - |\alpha - \beta|}{\pi} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для определенности допустим, что $\alpha < \beta$. Пусть $A_n, B_n \in S$, $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$. Если A, B не разделяет $0, 2\pi$, то из лемм 1 и 3 вытекает:

$$\lim |t^{\xi}_{a_n} - t^{\xi}_{b_n}| = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < \xi < \beta, \\ 0, & \text{если } 0 < \xi < \alpha \text{ или } \beta < \xi < 2\pi. \end{cases}$$

По той же причине, если A, B разделяет $0, 2\pi$, будем иметь:

$$\lim |t^{\xi}_{a_n} - t^{\xi}_{b_n}| = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \xi < \alpha \text{ или } \beta < \xi < 2\pi, \\ 0, & \text{если } \alpha < \xi < \beta. \end{cases}$$

Лемму 10 легко вывести из полученных соотношений, если принять во внимание теорему Дини [см., например, (²), стр. 29].

ЛЕММА 11. *Пусть среди точек A, B, C хоть одна лежит в S. Тогда для того чтобы эти точки лежали в указанном порядке на замыкании некоторой кривой из Ξ, необходима и достаточна справедливость равенства:*

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C).$$

Необходимость легко выводится из леммы 8 и свойств $\Delta 3$ и $\Delta 5$. Приведем рассуждение для случая $A \in \Gamma$, $B, C \in S$. Пусть X — конец кривой $[BC]$, отличный от A. Если

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C),$$

то лемма 8 дает противоречивое соотношение:

$$2 = \rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, X) > \rho(A, C) + \rho(C, X) = 2.$$

Для доказательства достаточности допустим, что указанное в формулировке равенство справедливо. Если A, B, $C \in S$, то утверждение леммы вытекает из $\Delta 5$. Кроме того, возможны следующие существенно различные случаи:

а) $A, C \in S$, $B \in \Gamma$, в) $A \in S$, B, $C \in \Gamma$,

б) $A, B \in S$, $C \in \Gamma$, г) $A, C \in \Gamma$, $B \in S$.

В случае а) найдется точка $\dot{D}$, лежащая между B и C, но не между A и C. Учитывая первую часть нашей леммы, получим:

$$\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, D) + \rho(D, C) \geqslant \rho(A, D) + \rho(D, C),$$

что противоречит $\Delta 5$.

Если в случае б) (ABC) не имеет места, то возьмем точку D, расположенную между B и C, но не удовлетворяющую (ABD). Из $\Delta 5$ вытекает, что

$$\rho(A, D) < \rho(A, B) + \rho(B, D).$$

Поэтому

$$\rho(A, D) + \rho(D, C) < \rho(A, C),$$

что противоречит неравенству треугольника.

В случае в), взяв между A и B точку D, будем иметь:

$$\rho(A, C) = \rho(A, D) + \rho(D, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, D) + \rho(D, C) \geqslant \rho(A, C).$$

Ввиду б), отсюда вытекает (ADC), т. е. $B = C$.

В случае г) надо показать, что A и C служат различными концами некоторой кривой из Ξ. Обозначим через C' конец кривой $[AB]$, отличный от A. Из леммы 10 следует, что

$$\rho(A, C) = 2 - \rho(C, C'),$$

а из леммы 8 —

$$\rho(A, B) = 2 - \rho(B, C').$$

Поэтому данное по условию равенство принимает вид:

$$2 - \rho(B, C') + \rho(B, C) = 2 - \rho(C, C'),$$

откуда

$$\rho(B, C) + \rho(C, C') = \rho(B, C'),$$

что, в силу в), дает:

$$C = C'.$$

Лемма 11 доказана.

Отождествив концы кривых системы Ξ, мы превратим K в П. После этого становится возможным приступить к построению метрики $d(A, B)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Пусть $A, B \in \Pi$. Положим

$$d(A, B) = \min\{\rho(A, B), 2 - \rho(A, B)\}.$$

Из $\Delta 2$, $\Delta 4$ и леммы 10 вытекает, что $d(A, B) \geqslant 0$. Из свойства $\Delta 1$ и лемм 9 и 10 следует, что $d(A, B) = 0$ тогда и только тогда, если $A = B$. Соотношение $d(A, B) = d(B, A)$ очевидно. Чтобы установить, что d — метрика, остается показать справедливость неравенства треугольника.

Заметим, что

$$d(A, B) \leqslant \rho(A, B) \tag{*}$$

и

$$d(A, B) \leqslant 1. \tag{**}$$

Допустим, что

$$d(A, B) + d(B, C) < d(A, C). \qquad (***)$$

Если

$$d(A, B) = \rho(A, B) \quad \text{и} \quad d(B, C) = \rho(A, C),$$

то мы, ввиду (*), сразу приходим к противоречию с (***). Если

$$d(A, B) = \rho(A, B), \text{ а } d(B, C) = 2 - \rho(B, C),$$

то (***), (*) и (**) дают противоречивое неравенство

$$2 < d(A, C) + \rho(B, C) - \rho(A, B) \leqslant d(A, C) + \rho(A, C) \leqslant 2.$$

Обратимся к случаю

$$d(A, B) = 2 - \rho(A, B), \quad d(B, C) = 2 - \rho(B, C).$$

Если $A, B \in k$, то можно считать, что $A, B \in \Gamma$ и $d(A, B) = \rho(A, B)$. Поэтому в рассматриваемом случае можно допустить, что кривая $[AB]$ отлична от k. Те же соображения позволяют считать, что $[BC] \neq k$.

Обозначим через X^1 и X^2 концы кривой $[AB] \in \Xi$, а через Y^1 и Y^2 — концы кривой $[BC] \in \Xi$. Ввиду лемм 8 и 11,

$$d(A, B) = \rho(A, X^1) + \rho(B, X^2), \quad d(B, C) = \rho(B, Y^1) + \rho(C, Y^2).$$

Отсюда, поскольку, в силу леммы 10, $\rho(X^2, Y^1) = \rho(X^1, Y^2)$, получаем:

$$d(A, B) + d(B, C) = \rho(A, X^1) + \rho(X^2, B) + \rho(B, Y^1) + \rho(Y^2, C) \geqslant$$
$$\geqslant \rho(A, X^1) + \rho(X^2, Y^1) + \rho(Y^2, C) \geqslant \rho(A, C) \geqslant d(A, C).$$

Остается показать, что метрика d обладает свойствами $D1$—$D5$.

ЛЕММА 12. *Если* $A, A_n \in \Pi$ *и* $\lim A_n = A$, *то* $\lim d(A, A_n) = 0$.

Допустим, что $\lim d(A, A_n) = d \neq 0$. Тогда последовательность $\{A_n\}$ можно разбить на подпоследовательности $\{A_n^1\}$ и $\{A_n^2\}$, для которых

$$\lim \rho(A, A_n^1) = d \neq 0 \text{ и } \lim \rho(A, A_n^2) = 2 - d \neq 2.$$

Найдем такое число $\varepsilon > 0$, чтобы отрезки $U: [0, \varepsilon]$, $V: [d - \varepsilon, d + \varepsilon]$ и $W: [2 - \varepsilon, 2]$ попарно не пересекались. Тогда найдется число $N > 0$ такое, что при $n > N$ $\rho(A, A_n^1) \in V$. Так как

$$\rho(A, A_n^1) = \lim \rho(A_m^1, A_n^1),$$

то для каждого n найдется такой номер m_n, что $\rho(A_{m_n}^1, A_n^1) \in V$. При этом числа m_n можно выбрать так, что $m_n \to \infty$. Однако, в силу $\Delta 1$ и $\Delta 3$, для достаточно больших n должно иметь место:

$$\rho(A_{m_n}^1, A_n^1) \in U \cup W.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $\{A_n^1\}$ пусто. Аналогично устанавливается пустота $\{A_n^2\}$. Таким образом, $\{A_n\}$ пусто.

ЛЕММА 13. *Если* $A, A_n \in \Pi$ *и* $\lim d(A, A_n) = 0$, *то* $\lim A_n = A$.

Для доказательства выберем из последовательности $\{A_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{A_n'\}$ и положим $\lim A_n' = A'$. Ввиду леммы 12, $\lim d(A', A_n') = 0$. Так как

$$d(A, A') \leqslant d(A, A_n') + d(A', A_n'),$$

то $d(A, A') = 0$ и, следовательно, $A = A'$.

Из лемм 12 и 13 следует справедливость свойства D1. Выполнение свойства D2 очевидно.

Пусть теперь

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C). \qquad (*)$$

Очевидно, можно допустить, что хотя бы одна из точек A, B, C лежит в $\Pi \setminus k$, т. е. в S. Так что следует рассмотреть такие случаи:

$$\text{I. } \rho(A, B), \rho(B, C), \rho(A, C) \leqslant 1,$$
$$\text{II. } \rho(A, B), \rho(B, C) \leqslant 1, \rho(A, C) \geqslant 1,$$
$$\text{III. } \rho(A, B) \leqslant 1, \rho(B, C), \rho(A, C) \geqslant 1,$$
$$\text{IV. } \rho(A, B), \rho(A, C) \leqslant 1, \rho(B, C) \geqslant 1,$$
$$\text{V. } \rho(A, B), \rho(B, C) \geqslant 1.$$

В случаях I и III соотношение (*) можно переписать, соответственно, в виде

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C) \text{ и } \rho(A, B) + \rho(A, C) = \rho(B, C).$$

Поэтому коллинеарность точек A, B, C (т. е. принадлежность их одной кривой из Σ) есть следствие леммы 11. В случае II, допустив неколлинеарность точек A, B, C, ввиду леммы 11, будем иметь:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C).$$

Так как соотношение (*) в этом случае превращается в равенство

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(A, C) = 2,$$

то мы приходим к противоречивому неравенству:

$$2 > 2\rho(A, C) \geqslant 2.$$

В случае IV аналогичные рассуждения приводят к противоречивому неравенству

$$2 < 2\rho(A, C) \leqslant 2.$$

В случае V, так же как и при доказательстве неравенства треугольника для d, можно допустить, что $[AB]$ и $[BC]$ отличны от k. Положим

$$X = [AB] \cap k, \quad Y = [BC] \cap k.$$

При этом будем считать, что точка X возникла при отождествлении точек X^1, $X^2 \in \Gamma$, а точка Y — при отождествлении точек Y^1, $Y^2 \in \Gamma$.

Тогда леммы 10 и 11 и предположение о неколлинеарности точек A, B, C дают:

$$d(A, B) + d(B, C) = \rho(A, X^1) + \rho(X^2, B) + \rho(B, Y^1) + \rho(Y^2, C) >$$
$$> \rho(A, X^1) + \rho(X^2, Y^1) + \rho(Y^2, C) = \rho(A, X^1) + \rho(X^1, Y^2) + \rho(Y^2, C) \geqslant$$
$$\geqslant \rho(A, C) \geqslant d(A, C),$$

что противоречит соотношению (*). Свойство D3 доказано.

Перейдем к свойству D4. Если $A, C \in k$, то его справедливость вытекает из леммы 10. Если $A \in S$ и $\rho(A, C) \leqslant 1$, то возьмем в S точку B, лежащую между A и C. Лемма 11 дает:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C) = d(A, C).$$

Так как $\rho(A, B)$, $\rho(B, C) \leqslant 1$, то получаем:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Если $A \in S$ и $\rho(A, C) > 1$, то обозначим через X^1 и X^2 концы кривой $[AC]$ из Ξ. В качестве B возьмем такую точку, чтобы A располагалась между B и C, а $\rho(A, B)$ не превышало 1. Тогда, ввиду лемм 8 и 11,

$$d(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, X^1) + \rho(X^2, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Переходя к свойству D5, заметим, что в случае $A, B \in k$, точку B_δ легко найти при помощи леммы 10, так что можно считать, что $[AB] \neq k$. Положим $X = [AB] \cap k$. Если $B \in k$, то возьмем

$$\delta < \min\{\varepsilon,\ d(A, B),\ |1 - \rho(A, B)|\}.$$

Точка B_δ, подчиненная условию $\rho(B, B_\delta) = \delta$ и лежащая на более длинной (в смысле метрики ρ) из дуг кривой $[AB]$, соединяющих A с B, будет удовлетворять D5. В случае $B \in S$ дополнительно потребуем, чтобы δ не превышало $d(B, X)$. Если

$$d(A, B) = \rho(A, B),$$

то точку B_δ подчиняем требованию $\rho(B, B_\delta) = \delta$. Если, кроме того, $A \neq X$, то точку B_δ выбираем так, чтобы пара A, B не отделяла B_δ от X, а пара B, X отделяла B_δ от A. В случае $A = X$ B_δ выбираем на более длинной (в смысле метрики ρ) из дуг кривой $[AB]$, соединяющих A с B. Тогда, ввиду леммы 11,

$$\rho(A, B_\delta) = \rho(A, B) + \rho(B, B_\delta).$$

Отсюда имеем:

$$\rho(A, B_\delta) < 1$$

и, поскольку $\delta < 1$,

$$d(A, B_\delta) = d(A, B) + d(B, B_\delta).$$

Если же

$$d(A, B) = 2 - \rho(A, B),$$

то в качестве B_δ возьмем точку, лежащую на $[A, B]$, отделенную от X парой A, B и удовлетворяющую условию $\rho(B, B_\delta) = \delta$. Ввиду лем-

мы 11,

$$\rho(A, B_\delta) + \rho(B, B_\delta) = \rho(A, B),$$

откуда $\rho(A, B_\delta) > 1$, и, следовательно,

$$-d(A, B_\delta) + d(B, B_\delta) = -d(A, B).$$

Остается доказать единственность точки B_δ. В силу леммы 10, можно ограничиться случаем $[AB] \neq k$. Допустим, что B'_δ — вторая точка, удовлетворяющая D5. В силу D3 и выбора δ, точка $B'_\delta \in S$. Если имеет место $(BB_\delta B'_\delta)$ или $(BB'_\delta B_\delta)$, то из леммы 11 вытекает, что $\rho(B_\delta, B'_\delta) = 0$, т. е. $B'_\delta = B_\delta$. Если же справедливо $(B_\delta BB'_\delta)$, то, учитывая выбор B_δ, при помощи лемм 8 и 11 нетрудно получить:

$$d(A, B'_\delta) + d(B'_\delta, B) = d(A, B),$$

что противоречит свойствам B'_δ.

Поступило
16. VI. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947.

[2] Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа, т. 2, М.—Л., 1944.

[3] Скорняков Л. А., Проективные плоскости, Успехи матем. наук, 6 (1951), 112—154.

[4] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., 1937.

[5] Busemann H., Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, London, 1942.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

19 (1955), 483—484

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 19

Альпер С. Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области . . . . № 6, 423—444

Аманов Т. И. Граничные функции классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$ . . № 1, 17—32

Апарисио Бернардо Э. О некоторых свойствах многочленов с целыми коэффициентами и о приближении функций в среднем многочленами с целыми коэффициентами . . . . № 5, 303—318

Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций . . . . № 5, 285—302

Бачелис Р. Д. О разностных операторах с постоянными коэффициентами . . . . № 1, 69—80

Виноградов И. М. Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений . . . . № 1, 3—10

Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек . . . . № 4, 173—186

Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций . . . . № 2, 133—190

Дикий Л. А. Дзета-функция дифференциального уравнения на конечном отрезке . . . . № 4, 187—200

Дынкин Е. Б. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями . . . . № 4, 247—266

Каменомостская С. Л. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа с малым параметром при старших производных . . . . № 5, 345—360

Козлова З. И. О накрытии множеств . . . . № 2, 125—132

Коробов Н. М. Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений . . . . № 5, 361—380

Королюк В. С. О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок . . . . № 1, 81—96

Королюк В. С. Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова . . . . № 2, 103—124

Кострикин А. И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 . . . . № 3, 233—244

Кошляков Н. С. Письмо в редакцию . . . . № 3, 271

Красносельский М. А. и Соболев В. И. Условия сепарабельности пространств Орлича . . . . № 1, 59—68

Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения второго порядка. II . . . . № 1, 33—58

Марченко В. А. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов . . . . № 6 381—422

Мацкина Р. Ю. О взаимно однозначных непрерывных образах гильбертова пространства . . . . № 4, 267—272

Пинскер М. С. Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями . . . . № 5, 319—344

Положий Г. Н. Вариационно-топологические теоремы краевых задач теории кручения валов переменного сечения. Метод сохранения области и мажорантных областей . . . . № 3, 233—270

Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа . . . . № 1, 11—16

Родосский К. А. О распределении малых значений модуля ζ-функции . . . . № 2, 97—102

Скопин А. И. p-расширения локального поля, содержащего корни степени p^M из единицы . . . . № 6, 445—470

Скорняков Л. А. Метризация проективной плоскости в связи с данной системой кривых . . . . № 6, 471—482

Соколов Н. П. О пучках вещественных кубических тройничных форм . . . . № 3, 201—232

Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) . . . . № 4, 221—246

Супруненко Д. А. Об одном свойстве нильпотентных матричных групп . . . . № 4, 273—274

Фаддеев Д. К. К теории гомологий для конечных групп операторов . . . . № 3, 193—200

Фрейман Г. А. Обратные задачи аддитивной теории чисел № 4, 275—284

Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов . . . . № 4, 201—220

Замечание Ю. Л. Шмульяна по поводу статьи Ю. М. Гаврилова «О сходимости итерационных процессов» . . . . № 2, 191
